

助教 石川 勝巳 (位相幾何学)

結び目や3次元多様体の不変量に興味を持ち、特にカンドルと呼ばれる代数系や、それを用いて得られる不変量について研究を進めてきた。カンドルは1980年代初頭にJoyce, Matveevによって独立に導入された代数系であり、群の概念をその共役演算に着目して一般化したものと言うことができる。カンドルは結び目理論と非常に相性が良く、彩色数やカンドルコサイクル不変量など、多くの不変量が考案され、(曲面)結び目の研究に応用されてきた。しかし、結び目群(結び目補空間の基本群)に対応する基本カンドルは結び目群とその周辺構造から復元され、カンドルを用いた不変量の多くが群の言葉で書き直されることが知られている。筆者はただカンドルを用いても本質的に新しい不変量は得られないと見ており、カンドルを便利な道具として利用して複雑な問題を見通し良く解決しようとする方向や、カンドルそのものではなくそれを拡張した概念を考えることで本質的に新しい不変量を得ようとする試みの方が重要なのではないかと考えている。

[4]では零点の配置の問題をカンドル彩色の問題に置き換え、彩色の変化を力学系的に捉えることにより、多項式の零点配置に関する予想(Hoste予想)を全ての二橋結び目に対して肯定的に解決したが、[5]では同様の考え方を応用し、Hoste予想に対する反例の存在を示した。また、カンドルの一般化としてバイカンドルと呼ばれるものが知られているが、実際にはバイカンドルから得られる不変量はカンドルから得られる不変量へと帰着されるということを証明した([2], [3])。群の分類空間に対応するカンドル空間というものに関して、[8]ではその基本群にあたるカンドルの付随群が内部自己同型群の群ホモロジーの言葉で完全に記述されることを示し、さらに[9]ではカンドル空間の或る被覆空間に適切な群作用を定義して拡張カンドル空間との関係を調べることにより、Alexanderカンドルの(コ)ホモロジーを群(コ)ホモロジーのスペクトル系列から帰納的に計算する方法を与え、実際にいくつかのカンドルのホモロジーを決定した。[1]では微分多様体上に滑らかなカンドル演算が定義されたもの(smooth quandle)を考え、特にその中で連結かつ推移的なものについて基礎理論の構築を行った。すなわち、その局所構造を構成する要素を明らかにするとともに局所構造と全体構造の関係を示し、低次元の場合に分類を与えた。

群の場合にはLie群の局所構造であるLie環を変形することによって量子群が得られ、これを基に結び目や3次元多様体の多くの不変量が発見された。では、同様の考え方で「量子カンドル」と呼べるようなものは存在するだろうか?現時点では夢のまた夢でしかないが、例えば「量子カンドルコサイクル不変量」が存在するのならば「双曲体積の量子化」を考えることもでき、それはすなわち体積予想などの重要な問題の解決にも繋がるのではないかと期待しているのである。

- [1] *On the classification of smooth quandles*, preprint.
- [2] *Knot quandles vs. knot biquandles*, Internat. J. Math **31** (2020).
- [3] (with K. Tanaka) *Quandle colorings vs. biquandle colorings*, preprint, arXiv:1912.12917.
- [4] *Hoste's conjecture for the 2-bridge knots*, Proc. Amer. Math. Soc. **147** (2019), 2245–2254.
- [5] *Quandle coloring conditions and zeros of the Alexander polynomials of Montesinos links*, J. Knot Theory Ramifications **27** (2018).
- [6] (with M. Hirasawa and M. Suzuki) *Alternating knots with Alexander polynomials having un-expected zeros*, Topology Appl. **253** (2019), 48–56.
- [7] (with K. Ichihara and E. Matsudo) *Minimal coloring numbers on minimal diagrams of torus links*, J. Knot Theory Ramifications **29** (2020).
- [8] *On the associated groups of the quandles*, preprint.
- [9] *Spectral sequences on quandle homology*, preprint.