

助教 藤田遼 (表現論)

私は有限次元単純 Lie 代数やそのルート系に付随して生じる代数系 (量子群や Hecke 代数など) の表現論を研究しています。特に、表現の成す圏の構造や異なる代数系の表現論の関係、それらの背後にある幾何学的構造に興味があります。現在の中心的な研究対象はアフィン量子群の表現論です。アフィン量子群はアフィン Lie 代数と呼ばれる重要な無限次元 Lie 代数の普遍包絡環の量子変形として定義される代数系で、理論物理における可解格子模型やそこに現れる R 行列の研究の中で 1980 年代半ばに導入されました。表現論的には、アフィン量子群の有限次元表現の成す圏では完全可約性とテンソル積の対称性が同時に失われており、そのために基礎となる単純 Lie 代数の有限次元表現の圏と比べてより複雑で興味深い現象が見られます。

基礎となる Lie 代数が ADE 型のときは、中島啓氏による 2000 年代半ばまでの研究で、圏多様体を用いてアフィン量子群の有限次元表現を幾何学的に実現する手法が確立されています。私は論文 [2,3] において、この手法を用いて、Dynkin 圏に付随する量子アフィン型 Schur-Weyl 双対性関手を研究しました。この関手は圏 Hecke 代数と呼ばれるアフィン Hecke 代数の変種の表現をアフィン量子群の表現に結びつけるもので、Kang-柏原-Kim によって導入された一般的構成の重要な例として得られます。これは元来 R 行列の特異性の情報をもとに純代数的に構成されるものですが、私はそれとは独立に圏多様体を用いた幾何学的別構成を与え、表現のクラスを適切に制限した上で関手が圏同値を導くことを示しました。論文 [5] では、同様の手法を用いて、ADE 型アフィン量子群の基本表現の間の R 行列の特異性が Dynkin 圏の直既約表現の間の拡大群の次元に対応することを示し、そこから基本表現の間の R 行列の分母を量子 Cartan 行列を用いて統一的に書き下す簡明な公式を得ました。

ADE 型ではない残りの BCFG 型アフィン量子群の表現論については、主に上述の幾何学的手法が使えないという理由により、未解決の問題がより多く残されています。一方で近年、複数のグループによる研究の進展によって、BCFG 型アフィン量子群の表現論はその Dynkin 図形を展開 (unfolding) して得られる ADE 型アフィン量子群の表現論との間に密接な関係を持つことが分かってきました。私の現在の研究は、この未だミステリアスな関係についての理解を深め、BCFG 型を含めたアフィン量子群の表現論についてより系統的な理解を得ることをひとつの目標としています。この方向で行った Se-jin Oh 氏との共同研究 [6] では、BCFG 型の量子 Cartan 行列が展開された ADE 型ルート系を用いて記述できることを示しました。その応用として、更に David Hernandez 氏、大矢浩徳氏とも共同で行った研究 [7] では、 q 指標環の変形を与える量子 Grothendieck 環について、BCFG 型とそれを展開した ADE 型の間に非自明な同型を構成し、これを用いて BCFG 型の量子 Grothendieck 環の標準基底に関する正值性及び B 型の場合に既約 q 指標の決定アルゴリズムの有効性 (Kazhdan-Lusztig 予想の類似) を証明しました。R 行列の特異性に関しては、上述の Oh 氏との共同研究で BCFG 型やより広いクラスの表現に対して前段落の分母公式を部分的に拡張したことに加え、村上浩大氏との共同研究 [8] では更に量子 Cartan 行列の解釈を通じて (一般化された) 前射影代数の表現論とも関係があることを観察しました。後者は特に、団代数の異なる 2 つの圏化 (すなわち、アフィン量子群から生じる乗法的圏化と前射影代数やその一般化から生じる加法的圏化) の数値的特徴量の一致を示唆して興味深く、これを理論的に明確にすることも今後の研究課題のひとつです。

1. Tilting modules of affine quasi-hereditary algebras. *Adv. Math.*, 324:241–266, 2018.
2. Affine highest weight categories and quantum affine Schur-Weyl duality of Dynkin quiver types. *Represent. Theory*, 26:211–263, 2022.
3. Geometric realization of Dynkin quiver type quantum affine Schur-Weyl duality. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (22):8353–8386, 2020.
4. (with Michael Finkelberg) Coherent IC-sheaves on type A_n affine Grassmannians and dual canonical basis of affine type A_1 . *Represent. Theory*, 25:67–89, 2021.
5. Graded quiver varieties and singularities of normalized R-matrices for fundamental modules. *Selecta Math. (N.S.)*, 28: article number 2, 2022.
6. (with Se-jin Oh) Q-data and representation theory of untwisted quantum affine algebras. *Comm. Math. Phys.*, 384(2):1351–1407, 2021.
7. (with David Hernandez, Se-jin Oh, and Hironori Oya) Isomorphisms among quantum Grothendieck rings and propagation of positivity. *J. Reine Angew. Math.*, 785:117–185, 2022.
8. (with Kota Murakami) Deformed Cartan matrices and generalized pre-projective algebras I: Finite type. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, published online, DOI: 10.1093/imrn/rnac054.