

教授 望月 拓郎 (微分幾何・代数幾何の研究)

[1] を含む一連の研究において調和バンドルの特異性について調べ、漸近挙動の分類を得ました。そして、その結果に基づいて、ワイルド調和バンドルや純ツイスター  $D$  加群を研究し、小林-Hitchin 対応や半単純ホロノミック  $D$  加群の強 Lefschetz 定理などを得ました。さらに、その自然な発展として、[2] において混合ツイスター  $D$  加群の理論を確立しました。その過程で、不確定特異点と Stokes 現象にも関心を抱き、有理型平坦束の局所構造の研究、ホロノミック  $D$  加群の Betti 構造の研究などを行ってきました。[7] では、一般のホロノミック  $D$  加群の圏から enhanced ind-sheaves の圏への関手の像の特徴づけについて研究しました。[9] では、不確定ホッジフィルトレーションの理論の整備を行いました。プレプリント “Stokes shells and Fourier transforms” (arXiv:1808.01037) ではフーリエ変換によって得られる  $D$  加群のストークス構造がどのように記述されるかを研究しています。また、“ $L^2$ -complexes and twistor complexes of tame harmonic bundles” (arXiv:2204.10443) では純ツイスター  $D$  加群の強 Lefschetz 定理を精密化して、ケーラー多様体間の固有射の場合に成り立つことを示しています。

近年は、以前の研究で得られた結果・知見を、調和バンドルやツイスター  $D$  加群に関連する対象や、より具体的な題材に適用することを試みています。

ワイルド調和バンドルの小林-Hitchin 対応は Higgs 束上の調和バンドルの分類をパラボリック構造の分類に帰着するものといえます。数理物理で自然に現れるヒッグス束上の調和バンドルの分類は、ある種の物理的な対象の分類と関連づけられるため興味深いです。そこで、“Harmonic bundles and Toda lattices II” (Communications in Mathematical Physics **328**, 2014) では、小林-Hitchin 対応を用いて、二次元戸田方程式の実数値解の分類を行い、さらに同伴する有理型平坦束の Stokes 構造やモノドロミーを具体的に計算しました。その後、Qiongling Li 氏との共同研究 “Complete solutions of Toda equations and cyclic Higgs bundles over non-compact surfaces (IMRN 2025)” と “Isolated singularities of Toda equations and cyclic Higgs bundles” (arXiv:2010.06129) において、より一般に非コンパクトリーマン面上の戸田方程式に対応する調和束の存在や分類について調べました。Li 氏との共同研究は、非退化対称積を持つ調和束の存在と分類の研究 [8] や、Hitchin-切断に属する Higgs 束上の調和計量の存在の研究 “Higgs bundles in the Hitchin section over non-compact hyperbolic surfaces (Proc. Lond. Math. Soc (3) **129**, 2024)” などに発展しています。

多重周期性を持つインスタントンやモノポールは “無限次元のワイルド調和バンドル” とみなす見方が有効であり、これまでの調和バンドルの研究で培ってきた知見を活かせます。この観点から “Asymptotic behaviour and the Nahm transform of doubly periodic

instantons with square integrable curvature, (Geometry & Topology 18, 2014)” では二重周期性を持つインスタントンの研究を行い、漸近挙動の大雑把な分類, Nahm 変換, 小林-Hitchin 対応などを確立しました。また, モノポールについても研究を進めています。例えば, 吉野将旭氏との共著論文 “Some characterization of Dirac type singularity of monopoles (Comm. Math. Phys. 356, 2017)” ではモノポールの Dirac 型特異性の比較的容易な特徴付けを得ています。さらに, 体積が無限大のケーラー多様体上の Kobayashi-Hitchin 対応 [5] を確立し, これに基づいて [6], “Triply periodic monopoles and difference modules on elliptic curves (SIGMA 16, 2020)” および “Doubly periodic monopoles and  $q$ -difference modules” (arXiv:1902.03551) では, 周期性を持つモノポールと差分加群や  $q$ -差分加群との間の小林-Hitchin 対応を得ています。

コンパクト Riemann 面上の調和バンドルは, Higgs 場のスカラー倍によって自然に変形されていきます。スカラーを 0 にする極限は古典的によく研究されてきましたが, [3] では, スカラーを大きくした場合にどのような現象が生じるかについて研究しました。そして, スカラーを大きくしていくと調和バンドルの複雑さがヒッグス場の固有値が 0 の部分に集中していくことを示しました。また調和バンドルの階数が 2 の場合に極限を具体的に記述することができました。最近, 再び関連する問題について取り組み, Szilard Szabo 氏との共同研究 [10] において, ヒッグス束の階数が高くスペクトル曲線が滑らかな場合に, 極限への収束の速さが指数オーダーであることを一般に確立しました。さらに, “Asymptotic behaviour of the Hitchin metric on the moduli space of Higgs bundles” (arXiv:2305.17638) において, モジュライ空間上の Hitchin 計量の漸近挙動についての研究を行いました。階数が 2 で対称的な場合の精密化も研究しています。

混合ツイスター  $D$  加群の関手性と, 有理型関数に混合ツイスター  $D$  加群が同伴することを用いると, 多くの自然なホロノミック  $D$  加群が自然に混合ツイスター構造を持つことがわかります。この観点から, [4] では代数的関数に付随して得られる Kontsevich 複体というものが, ある混合ツイスター  $D$  加群の  $V$ -フィルトレーションの相対 de Rham 複体と擬同型であることを証明しています。また, プレプリント “Twistor property of GKZ-hypergeometric systems” (arXiv:1501.04146) では, 特に超幾何ホロノミック  $D$  加群上の混合ツイスター  $D$  加群について調べています。

このように具体的な例や関連する対象の研究を通じて, 調和バンドルや混合ツイスター  $D$  加群の理論を整備し, より多くの場面で使えるものに育てていくとともに, また自分自身の研究領域を広げていきたいと考えています。多くの興味深い研究対象・課題がありますので, 少しずつ形にしていきたいと思っています。

- [1] Wild harmonic bundles and wild pure twistor  $D$ -modules, *Astérisque* **340**, 2011
- [2] Mixed twistor  $D$ -modules, *Lecture Notes in Mathematics*, **2125**. Springer, 2015
- [3] Asymptotic behaviour of certain families of harmonic bundles on Riemann surfaces, *J. Topol.* **9** (2016), 1021–1073
- [4] A twistor approach to the Kontsevich complexes. *Manuscripta Mathematica*, **157** (2018), 193–231
- [5] Kobayashi-Hitchin correspondence for analytically stable bundles. *Trans. Amer. Math. Soc.* **373** (2020), 551–596.
- [6] Periodic monopoles and difference modules. *Lecture Notes in Mathematics*, **2300**, Springer, Cham, 2022.
- [7] Curve test for enhanced ind-sheaves and holonomic  $D$ -modules, I, II. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* (4), **55**, (2022), 575–679, 681–738
- [8] (with Q. Li) Harmonic metrics of generically regular semisimple Higgs bundles on noncompact Riemann surfaces, *Tunis. J. Math.* **5** (2023), 663–711.
- [9] Rescalability of integrable mixed twistor  $D$ -modules *Progr. Math.*, **352** Birkhäuser/Springer, Cham, 2025, 13–207.
- [10] (with Sz. Szabó) Asymptotic behaviour of large-scale solutions of Hitchin's equations in higher rank, *Moduli* **2** (2025), e6.