

准教授 疋田辰之 (幾何学的表現論の研究)

数学や数理論理学ではしばしば一見全く異なる数学的対象が等価になる双対性と呼ばれる現象が観察されている。例えばミラー対称性や Langlands 双対性などが有名である。そして同じものを別の数学的手法で計算することにより、より具体的で非自明な主張が得られることもある。このような現象は物理的考察によって降ってくる場合も多いが、仮想的な応用先である組み合わせ論の問題を探索としてその背後にある双対性のような現象を見つけるのが私の研究の一つの目標である。

[1] ではシャッフフル予想 (今では Carlsson-Mellit により証明されている) と呼ばれる二つの対称関数の間の等式を出発点とし、既に知られていた等式の片側の Hilbert スキームを用いた代数幾何的解釈とは別に、もう一方の A 型アファイン Springer ファイバーのホモロジーを用いた位相幾何的解釈を与えた。

[2] では Braden-Licata-Proudfoot-Webster の意味でのシンプレクティック双対性のもとで、コホモロジー環という位相幾何的な対象と座標環のとある商という代数幾何的な対象が入れ替わるという現象を発見した。この現象自体は例えば組み合わせ論的な応用には不十分だが、少なくともシンプレクティック双対性がこの方向で有用であることを示唆しているように思われる。

[3] では代数幾何側の理解を深めるために、シンプレクティック特異点解消の同変変換層の導来圏に表現論的な構造 (最高ウェイト圏) を入れる予想を定式化した。特にその K 群に表現論的には既約表現のなす基底に対応する標準基底と呼ばれるものを定義し、それを計算するアルゴリズムを与えた。例えば Hilbert スキームの場合には双対標準基底の特別な元としてシャッフフル予想に現れる変換層が現れると予想されるため、(双対) 標準基底を明示的に求めるのは組み合わせ論への応用のためには非常に重要な問題であると思われる。またここで現れる表現論的な構造は偏屈層の圏として実現できることも多いため、予想はこれがより位相幾何的、あるいは超局所層的な記述を持つことも示唆している。

また [3] では標準基底の理論の別方向への精密化として、トーリックハイパーケーラー多様体の場合にその楕円コホモロジーへの持ち上げを議論している。特にシンプレクティック双対性と標準基底の関係について、 K 理論レベルでは退化して見えない双対性があることが観察された。現時点では楕円標準基底の一般的な特徴付けは見つかっていないが、[4] ではトーリックではない例に対して双対性を基本原理として正規化の選び方の自由度を除いて楕円標準基底を計算した。計算結果は楕円標準基底の背後にある種の頂点作用素超代数の表現論があることを示唆しているように思われる。

[5] では別の組み合わせ論の問題として Stanley-Stembridge 予想と呼ばれる

グラフの彩色対称関数に関する基本的な予想を考え始めた. ここでは加藤周氏によって幾何的に示された単位区間グラフに対する彩色対称関数の公式の代数的な証明を与え, その副産物としてその (q, t) -類似を定義した. またその応用として Stanley-Stembridge 予想を認めると彩色対称関数を基本対称式で展開したときの係数を適切に正規化すると分割のなす集合上の確率を定めることを観察した.

[6] では逆にそのような確率を帰納的に実際に構成することによって特に Stanley-Stembridge 予想を証明した. この証明自体は幾何も表現論も使わない初等的なものであるが, そこで得られた公式は代数幾何的な解釈を示唆しているように思われる. 一方で彩色対称関数は Hessenberg 多様体のコホモロジーを用いた位相幾何的な記述などが既に知られているため, それらを結びつける双対性があるかという問いは自然なものと思われる.

- [1] Affine Springer fibers of type A and combinatorics of diagonal coinvariants, *Adv. Math.*, **263** (2014), 88–122.
- [2] An algebro-geometric realization of the cohomology ring of Hilbert scheme of points in the affine plane, *Int. Math. Res. Not.* (2016).
- [3] Elliptic canonical bases for toric hyper-Kahler manifolds, arXiv:2003.03573.
- [4] Non-toric examples of elliptic canonical bases I, arXiv:2410.12770.
- [5] (q, t) -chromatic symmetric functions, arXiv:2503.23597.
- [6] A proof of the Stanley-Stembridge conjecture, arXiv:2410.12758.