准教授 入江 慶（位相幾何学・微分幾何学の研究）

シンプレクティック幾何学（特にシンプレクティック容量と Hamilton 力学系の周期軌道）および関連する話題について研究している。

大域シンプレクティック幾何学における記念碑的な結果である Gromov の圧縮不可能性定理は，擬正則曲線を用いてシンプレクティック多様体の「幅」を測ることで示された。Ekeland-Hofer はこの「幅」の持つ性質を公理化してシンプレクティック容量の概念を導入し，さらに Hamilton 力学系の周期軌道に関する一種の min-max 値としてシンプレクティック容量が定義できることを見出した。一方 Floer は擬正則曲線の理論をもとに，Hamilton 力学系の周期軌道や Lagrange 部分多様体の交叉点に関わる Morse ホモロジーの理論を創始した（Floer ホモロジー）。

以上の研究をもとに，Floer-Hofer や Viterbo はシンプレクティック・ホモロジーの理論を展開した。この理論によれば Floer ホモロジーから定まる min-max 値としてシンプレクティック容量を定義することができるが，この容量を実際に計算・評価するのは非自明な問題である。私は [1] や [8] において，余接束内の「Fiberwise に凸」な領域の容量の計算をループ空間の（相対）ホモロジーの計算に帰着する手法を導入し，いくつかの応用を与えた。この手法の基本的なアイデアは，余接束の Floer ホモロジーと底空間の自由ループ空間のホモロジーとが同型であるという有名な結果（Viterbo の定理）を「定量化」するというものである。以上の研究との関連でビリヤード力学系の周期軌道についても調べている（[2], [9]）。

Hamilton 力学系の周期軌道に関わる Floer ホモロジーは円筒を定義域とする擬正則曲線を用いて定義される。より一般の（開）Riemann 面を定義域とする擬正則曲線を考えることで，Floer ホモロジー上に種々の積構造を定義することができる。特に余接束の Floer ホモロジーを考えると，上で述べた Viterbo の定理を介して，自由ループ空間のホモロジー上に積構造を与えることができる。これはストリング・トポロジー（Chas-Sullivan の創始したループ空間上の交叉理論）で研究されている積構造と一致すると考えられていて，部分的には証明されている。私は [5] において，ストリング・トポロジーで考える積構造を鎖複体のレベルで扱うための基礎を整備した。この結果に基づいた [7] では，Lagrange 部分多様体に対する Floer 理論と（鎖複体レベルの）ストリング・トポロジーとを結びつける Fukaya の構想の一部を厳密に実行した。

Hamilton 系の周期軌道に関わる Floer ホモロジーの発展形の一つとして，Hutchings による埋込接触ホモロジー（ECH）がある。ECH を用いると三次元閉接触多様体に対して可算無限個の容量の系列が定義され，その漸近挙動

から接触多様体の体積が復元されるという著しい性質が成り立つ（Cristofaro-Gardiner, Hutchings, Ramos による）。[3] ではこの性質の帰結として，三次元閉接触多様体上の Reeb 力学系に対する C^∞ 級の閉補題を導いた。[4] では [3] の結果を用いて二次元閉シンプレクティック多様体上の Hamilton 微分同相写像に対する C^∞ 級の閉補題を証明した。また [6] では，近年急速に発展した極小曲面に対する Morse 理論を用いて [3] と類似の議論が可能であることを示した。

[10] では，[3] の結果が高い（五以上の）次元を持つ接触多様体上の Reeb 力学系に対しても拡張されるか，という問題意識にもとづき，Reeb 力学系に対する strong closing property という性質を定義した。また ECH や接触ホモロジーを抽象化して action selecting functor という概念を導入し，その枠組みの中で strong closing property の或る十分条件を与えた。その後の Chaidez-Tanny 等の研究で実際に strong closing property を満たす高次元 Reeb 力学系の例が見つかっている。Strong closing property が Reeb 力学系においてどの程度一般的（あるいは例外的）な性質なのか理解するのが今後の重要な課題である。

[1] Symplectic homology of disc cotangent bundles of domains in Euclidean space, J. Symplectic Geom. 12 (2014), 511–552.

[2] Periodic billiard trajectories and Morse theory on loop spaces, Comment. Math. Helv. 90 (2015), 225–254.

[3] Dense existence of periodic Reeb orbits and ECH spectral invariants, J. Mod. Dyn. 9 (2015), 357–363.

[4] A C^∞ closing lemma for Hamiltonian diffeomorphisms of closed surfaces, Geom. Funct. Anal. 26 (2016), 1245–1254. (with M. Asaoka)

[5] A chain level Batalin-Vilkovisky structure in string topology via de Rham chains, Int. Math. Res. Not. IMRN 2018, 4602–4674.

[6] Density of minimal hypersurfaces for generic metrics, Ann. of Math (2). 187 (2018), 963–972. (with F. C. Marques and A. Neves)

[7] Chain level loop bracket and pseudo-holomorphic disks, Journal of Topology. 13 (2020), 870–938.

[8] Symplectic homology of fiberwise convex sets and homology of loop spaces, J. Symplectic Geom. 20 (2022), 417–470.

[9] Capacity of billiard tables and S^1-equivariant loop space homology, J. Fixed Point Theory Appl. 24 (2022).

[10] Strong closing property of contact forms and action selecting functors, J. Fixed Point Theory Appl. 26 (2024) .