

## 准教授 梶野 直孝 (確率論)

「フラクタル」と総称される、Euclid 空間や Riemann 多様体のような滑らかな空間とは全く異質の幾何的性質を有する空間において、幾何的に自然な Laplacian および対応する確率過程の構成と詳細な解析を行うことを目標とする研究をしている。取り扱いの比較的容易な Euclid 自己相似フラクタルや tree 型のフラクタルの他、近年では様々な統計物理・量子物理モデルから定まるランダムフラクタルも研究対象とすることが可能になりつつある。

特に確率論では Schramm–Loewner 発展 (SLE) とも密接な関係にある「Liouville 量子重力」と呼ばれる曲面上のランダム幾何の研究が Miller–Sheffield による一連の研究を中心に急速に進展しており、この幾何構造の下での自然な拡散過程として Garban–Rhodes–Vargas (2016) により構成された Liouville Brown 運動も重要な対象として注目を集めている。これに対し [8] では熱核の連続性と (粗い) 上からの不等式評価を、[7] で得た拡散過程の熱核の上からの評価に関する一般論を援用することで証明した。

また Klein 群 (Riemann 球面上の Möbius 変換のなす離散群) の極限集合や複素力学系の Julia 集合など、等角写像による歪みを許す形の自己相似性しか持たないフラクタルも複素関数論における普遍的な対象として重要であるが、近年はこの範疇のフラクタルにおける幾何的に自然な Laplacian の構成と解析を目指す研究も行っている。現時点では Klein 群の極限集合として与えられる円詰込フラクタル (のいくつかの具体例) における自然な Laplacian (の候補) の構成と Weyl 型固有値漸近挙動の証明に成功している ([5])。分布の意味での自己等角性を持つランダムフラクタル曲線である SLE に対して同様の考察を行うことは今後の重要課題である。

その他、フラクタル上の Laplacian に対し典型的に成り立つことが知られている、対称拡散過程の熱核に対する重要な不等式評価である劣 Gauss 型熱核評価と、対応するエネルギー測度 (関数のエネルギーの概念を状態空間上の測度として定式化したもの) や拡散過程の領域境界への調和測度 (領域境界への初到達位置の確率分布)・トレース過程 (拡散過程の標本路から領域境界上にある部分だけを抜き出して得られる飛躍型確率過程) の性質の間の関連を明らかにすることも、当該分野における重要な問題意識である。これに関し [6] では「劣 Gauss 型熱核評価が上下両方とも空間全体で成立するならば、エネルギー測度は空間上の自然な体積測度と互いに特異である」という 20 数年来の未解決予想を肯定的に解決し、また [3] では容量密度条件を満たす一様領域に対し、調和測度およびトレース過程の熱核の自然な形の上下評価を証明した。

さらに [4] では、劣 Gauss 型熱核評価を満たす空間が与えられたとき、エネルギー測度および空間の「擬等角構造」を保ちつつ距離と体積測度を適切に取り替えることによりその空間が (上記よりも弱い意味で) 「いくらでも Gauss 型に近い」劣 Gauss 型熱核評価を満たすようにできること、しかし  $d \geq 3$  に対する  $d$  次元 Sierpiński gasket では同種の取り替えにより Gauss 型熱核評価を満たすようにはできないことを示した。後者の結果は、2 次元 Sierpiński gasket に対して木上 (2008) の研究や [9, 10] で展開された「フラクタル上の測度論的 Riemann 構造」に対する解析学がその自然な高次元化に対しては展開できないことを意味しており、興味深い。

以上の研究はいずれもフラクタル上の  $L^2$  型エネルギー汎関数を対象とするものであるが、関連分野のいくつかの重要な問題意識を背景として、 $p \neq 2$  に対し  $L^p$  型非線型エネルギー汎関数をフラクタル上に構築し解析する研究が近年重要になりつつある。これについて [2] では  $L^p$  型エネルギー汎関数が満たすべき自然な縮小性不等式の族を「一般化  $p$ -縮小性」として定式化し、微分可能性の証明や  $p$ -調和関数の解析への応用を与えるとともにフラクタル上の  $L^p$  型エネルギー汎関数の既存の構築法からこの性質が自然に従うことを証明した。さらに [1] では既存の構築法を部分列の各点収束極限による構築に修正することにより、フラクタル上の  $L^p$  型エネルギー汎関数および対応する  $p$ -エネルギー測度で種々の自然な不等式を満たすものを構築した。

- [1] N. Kajino and R. Shimizu, Korevaar-Schoen  $p$ -energy forms and associated  $p$ -energy measures on fractals, preprint, 2024. [arXiv:2404.13435](#)
- [2] N. Kajino and R. Shimizu, Contraction properties and differentiability of  $p$ -energy forms with applications to nonlinear potential theory on self-similar sets, preprint, 2024. [arXiv:2404.13668](#)
- [3] N. Kajino and M. Murugan, Heat kernel estimates for boundary trace of reflected diffusions on uniform domains, preprint, 2023. [arXiv:2312.08546](#)
- [4] N. Kajino and M. Murugan, On the conformal walk dimension: Quasisymmetric uniformization for symmetric diffusions, *Invent. math.* **231** (2023), no. 1, 263–405.
- [5] N. Kajino, The Laplacian on some self-conformal fractals and Weyl’s asymptotics for its eigenvalues: A survey of the analytic aspects, in: *The Proceedings of the 12th MSJ-SI “Stochastic Analysis, Random Fields and Integrable Probability”*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 87, 2021, pp. 293–314.
- [6] N. Kajino and M. Murugan, On singularity of energy measures for symmetric diffusions with full off-diagonal heat kernel estimates, *Ann. Probab.* **48** (2020), no. 6, 2920–2951.
- [7] A. Grigor’yan and N. Kajino, Localized upper bounds of heat kernels for diffusions via a multiple Dynkin-Hunt formula, *Trans. Amer. Math. Soc.* **369** (2017), no. 2, 1025–1060.
- [8] S. Andres and N. Kajino, Continuity and estimates of the Liouville heat kernel with applications to spectral dimensions, *Probab. Theory Related Fields* **166** (2016), no. 3–4, 713–752.
- [9] N. Kajino, Analysis and geometry of the measurable Riemannian structure on the Sierpiński gasket, in: *Fractal Geometry and Dynamical Systems in Pure and Applied Mathematics I: Fractals in Pure Mathematics*, Contemp. Math., vol. 600, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013, pp. 91-133.
- [10] N. Kajino, Heat kernel asymptotics for the measurable Riemannian structure on the Sierpinski gasket, *Potential Anal.* **36** (2012), no. 1, 67–115.