

助教 金城翼 (代数幾何学の研究)

私の主な研究テーマはモジュライ空間の幾何学である。特に導来代数幾何学や超局所層理論、および幾何学的表現論との関連に興味を持って研究している。

1 これまでの研究

1.1 コホモロジー的 Donaldson–Thomas 理論の Higgs 束への応用

Donaldson–Thomas(DT) 理論は三次元カラビヤウ多様体上の接続層の仮想的な数を数え上げる理論であり、Thomas によって 1998 年に導入された。2012 年ごろ、Joyce らは DT 不変量の偏屈層による圏化 (CoDT 偏屈層) を導入し、コホモロジー的 Donaldson–Thomas 理論 (CoDT 理論) を創始した。CoDT 理論は (インスタントン)Floer 理論の複素類似であるため数学的に非常に深い理論であると考えられており、また元の DT 理論への層理論的・表現論的な応用をもたらすと期待された。しかし、Joyce らの CoDT 偏屈層の構成は非常に難解であり、あまり多くのことがわかっていないのが現状である。

私は論文 [Kin22] において、三次元カラビヤウ多様体 X が代数曲面 S の標準束として記述される場合の CoDT 不変量、すなわち CoDT 偏屈層のコホモロジーを調べ、**次元還元定理**を証明した。この定理は X の CoDT 不変量と S 上の接続層のモジュライ空間の Borel–Moore ホモロジーの同型を与えるものであり、**代数曲面の接続層のモジュライ空間のトポロジーの研究に CoDT 理論を応用することが可能になった**。また、リーマン面 C の標準束の全空間 $\mathrm{Tot}_C(K_C)$ 上のピュアなコンパクト台接続層は C 上の Higgs 束と対応するため、リーマン面上の Higgs 束のモジュライ空間のトポロジーの研究に CoDT 理論を応用することも可能になった。

その後、小関直紀氏との共同研究 [KK23] において、上述のアイデアを用いて Higgs 束のモジュライ空間のトポロジーに関する研究を行った。 C 上の階数 r で次数が d であるような不安定 Higgs 束のモジュライ空間を $\mathrm{Higgs}_{r,d}(C)$ と書くことにする。このとき、論文 [KK23] では CoDT 理論を応用することで BPS 層という純 Hodge 加群 $\mathcal{BPS}_{r,d} \in \mathrm{MHM}(\mathrm{Higgs}_{r,d}(C))$ を導入した。BPS 層は $\gcd(r, d) = 1$ の場合は定数層のシフトと同型であり、一般には定数層のシフトを特異点に沿って修正したものになっている。論文 [KK23] の主定理の一つとして $\mathrm{Higgs}_{r,d}(C)$ の BPS 層のコホモロジーが Hodge 構造込みで d に依存しないという主張を証明した。この主張は GL_r -Higgs 束のモジュライ空間の位相的ミラー対称性として解釈される主張であり、 $\gcd(r, d) = 1$ の場合には $\mathrm{Higgs}_{r,d}(C)$ の Hodge 数が d に依存しないという Mellit, Groechenig–Wyss–Ziegler, Yu の結果を復元するものである。

論文 [KK23] の核となるアイデアは $\mathrm{Tot}_C(\omega_C) \times \mathbb{A}^1$ の接続層のモジュライ空間を滑らかな空間の導来臨界点として記述する増田成希氏との共同研究 [KM24] である。系として三次元カラビヤウ多様体 $\mathrm{Tot}_C(\omega_C) \times \mathbb{A}^1$ の CoDT 偏屈層の消滅サイクル関手による簡易な記述が得られる。この結果は非可換導来代数幾何学を用いることで証明された。

1.2 CoDT 偏屈層を用いた仮想基本類の構成

上述した次元還元定理について、[Kin22] ではより一般に、局所完全交叉導来アルティンスタック Y の (-1) -シフト余接複体 $T^*[-1]Y$ 上の CoDT 偏屈層のコホモロジーが Y の Borel–Moore ホモロジーと同型であることを証明した。この主張は古典的な Thom 同型定理の一般化になっており、Thom 同型を用いたオイ

ラー類の構成を一般化することで (-1) -シフト余接複体 $T^*[-1]Y$ のオイラー類にあたるものを定義することができる。論文 [Kin21] では Y が準射影的な導来スキームであるという仮定のもと、このホモロジー類が Y の仮想基本類と一致することを証明した。

2 今後の研究の方向性

2.1 シンプレクティックスタックのコホモロジーと Donaldson–Thomas 理論

節 §1.1 で前述のように、CoDT 理論を用いることで Higgs 束のモジュライ空間に BPS 層を定義することができる。より一般に、導来シンプレクティックスタックの良モジュライに対して BPS 層が定義できることを期待しており、現在はその構成のための導来シンプレクティック幾何学の基礎についての研究をおこなっている。特にシンプレクティック表現に付随するシンプレクティック商のコホモロジーの幾何学的表現論の研究、および一般の導来シンプレクティックスタックに対する局所模型の研究を進めている。BPS 層の理論を G -Higgs 束のモジュライ空間や G -局所系のモジュライ空間に適用することで、位相的ミラー対称性や幾何学的ラングランズ対応の研究に応用が与えられることが期待される。

2.2 超局所層理論の導来幾何化

節 §1.2 で前述のように、CoDT 理論を用いることで仮想基本類の新しい構成が与えられる。この構成と Behrend–Fantechi による仮想基本類の構成の合致の証明は、超局所層理論の導来代数幾何的な一般化が哲学的な背景にある。現在は Adeel Khan 氏らとの共同研究において、導来化された超局所層理論の基礎づけを与える研究を進めている。また、導来化された超局所層理論を用いることで、CoDT 不変量に Hall 代数の構造を構成する研究を進めている。

参考文献

- [Kin21] Tasuki Kinjo, *Virtual classes via vanishing cycles*, To appear in *Geometry and Topology* (2021).
- [Kin22] ———, *Dimensional reduction in cohomological Donaldson–Thomas theory*, *Compositio Mathematica* **158** (2022), no. 1, 123–167.
- [KK23] Tasuki Kinjo and Naoki Koseki, *Cohomological χ -independence for Higgs bundles and Gopakumar–Vafa invariants*, To appear in *Journal of the European Mathematical Society* (2023).
- [KM24] Tasuki Kinjo and Naruki Masuda, *Global critical chart for local Calabi–Yau threefolds*, *International Mathematics Research Notices* **2024** (2024), no. 5, 4062–4093.