

特定助教 南出 新（数論幾何学の研究）

私はこれまで、遠アーベル幾何、そして、その応用について研究を行ってきた。以下では、その概要を紹介する。

そのような“応用”の一つとして、（副有限）グロタンディーク・タイヒミュラー群 GT の理論への応用が挙げられる。[2] では、GT と有理数体の絶対ガロア群の比較の文脈から、「GT は強非分解性（＝任意の開部分群が非自明な直積分解を持たない）をみたすか」という問題を提起し、特に、この問題の“副 I 版”を肯定的に解決した。最終的に、辻村昇太氏との共同研究 [8] において、オリジナルの問題についても肯定的に解決した。これらの研究では、中村博昭氏、M. Saidi 氏、玉川安騎男氏らにより示されていた、有限体上の遠アーベル幾何的結果が重要な役割を果たす。

また、GT は、 n (≥ 4) 次副有限組紐群 $\hat{B}_n$ に自然に外作用することが知られている。星裕一郎氏、望月新一氏との共同研究 [1] では、($\hat{B}_n$ の部分商として現れる) 副有限純写像類群 $\hat{\Gamma}_{0,n+1}$ への GT の自然な外作用について、研究を行った。[1] では、まず、「 $(0, 3)$ 、又は、 $(1, 1)$ 型双曲的曲線の配置空間の間の一般化射影から生じる一般化ファイバー部分群は群論的である」という遠アーベル幾何的結果を証明した。この結果は、望月新一氏、玉川安騎男氏により示されていた、非 $(0, 3)$ 、 $(1, 1)$ 型双曲的曲線の場合の結果を、補完するものといえる。そして、この結果と、組み合わせ論的遠アーベル幾何の結果を適用することで、 $\hat{\Gamma}_{0,n+1}$ の任意の外部自己同型が、GT と $n+1$ 次対称群 $\mathfrak{S}_{n+1}$ の $\hat{\Gamma}_{0,n+1}$ への自然な外作用から生じることを示した。その後、中村博昭氏との共同研究 [3] では、GT の $\hat{B}_n$ への自然な外作用について、研究を行った。[3] では、新たに、ある副有限群 “ Z_n ” の $\hat{B}_n$ への自然な外作用を定義した。そして、[1] で得られた結果（＝ $\hat{\Gamma}_{0,n+1}$ の外部自己同型群の計算）を活用することにより、 $\hat{B}_n$ の任意の外部自己同型が、GT と Z_n の $\hat{B}_n$ への自然な外作用から生じることを示した。

別の“応用”として、ディオファントス幾何への応用が挙げられる。望月新一氏により創始された宇宙際タイヒミュラー理論では、遠アーベル幾何を活用することにより、様々なディオファントス幾何的不等式が帰結される。一方、これらの不等式は“非明示的”であるという課題があった。望月新一氏、I. Fesenko 氏、星裕一郎氏、W. Porowski 氏との共同研究 [10] では、特定の状況で、これらの不等式を完全に明示化することに成功した。

並行して、辻村昇太氏と共同で、 p 進局所体の遠アーベル幾何の一般化に関する研究も行っている。例えば、遠アーベル幾何と密接に関連した群論的性質として、副有限群のスリム性（＝任意の開部分群が中心自明）やエラスティック性（＝任意の開部分群の位相的に有限生成な非自明正規閉部分群は開）という概念がある。実際、 p 進局所体の絶対ガロア群がスリム性やエラスティック

ク性をみtasすることが知られていた. [5] では, この結果を, 任意の剰余標数 p の完備離散付値体の場合に一般化した. [6], [7] では, スリム性より強い概念として, “強内的非分解性” という概念を導入し, その性質について, 研究を行った. 特に, 任意の剰余標数 p の完備離散付値体の絶対ガロア群や, その概副 p 最大商が, 強内的非分解性をみtasことを示した. [9] では, p 進局所体の遠アーベル幾何の代表的な結果 (例えば, p 進局所体に付随した様々な数値的不変量, モノイド, 正準同型の復元定理; p 進局所体の絶対ガロア群の外部自己同型の幾何性の判定法) を, ある種の有限性 (や代数性) をみtas剰余無限混標数完備離散付値体の場合に一般化することに成功した.

([6], [7] の延長線上にある) 澤田晃一郎氏, 辻村昇太氏との共同研究 [4] では, (より一般に) 遠アーベル幾何に現れる様々な副有限群について考察し, それらの連正規閉部分が強内的非分解性をみtasことを証明した.

- [1] Y. Hoshi, A. Minamide, and S. Mochizuki, Group-theoreticity of numerical invariants and distinguished subgroups of configuration space groups, *Kodai Math. J.* **45** (2022), pp. 295–348.
- [2] A. Minamide, Indecomposability of various profinite groups arising from hyperbolic curves, *Math. J. Okayama Univ.* **60** (2018), pp. 175–208.
- [3] A. Minamide and H. Nakamura, The automorphism groups of the profinite braid groups, *Amer. J. Math.* **144** (2022), pp. 1159–1176.
- [4] A. Minamide, K. Sawada, and S. Tsujimura, *On generalizations of anabelian group-theoretic properties*, to appear in *Hiroshima Math. J.*
- [5] A. Minamide and S. Tsujimura, Anabelian group-theoretic properties of the absolute Galois groups of discrete valuation fields, *J. Number Theory* **239** (2022), pp. 298–334.
- [6] A. Minamide and S. Tsujimura, Internal indecomposability of profinite groups, *Adv. Math.* **409** (2022), No. 108689.
- [7] A. Minamide and S. Tsujimura, *Anabelian group-theoretic properties of the pro- p absolute Galois groups of Henselian discrete valuation fields*, RIMS Preprint **1952** (August 2021).
- [8] A. Minamide and S. Tsujimura, *Strong indecomposability of the profinite Grothendieck-Teichmüller group*, preprint (February 2022).
- [9] A. Minamide and S. Tsujimura, *Anabelian geometry for Henselian discrete valuation fields with quasi-finite residues*, RIMS Preprint **1973** (June 2023).
- [10] S. Mochizuki, I. Fesenko, Y. Hoshi, A. Minamide, and W. Porowski, Explicit estimates in inter-universal Teichmüller theory, *Kodai Math. J.* **45** (2022), pp. 175–236.