

助教 宮澤仁 (微分幾何学, 位相幾何学)

ゲージ理論と指数理論およびそれらの 3, 4 次元多様体の微分トポロジーへの応用を研究している。

4 次元多様体の微分トポロジーは 5 次元以上の多様体とは全く異なった振る舞いを示す。コンパクトな n 次元位相多様体に対して $n \neq 4$ なら入りうる微分構造は高々有限個なことがわかっているが、4 次元位相多様体で複数の微分構造が見ついているものはほとんど無限個の微分構造が見ついている。さらに n 次元ユークリッド空間は $n \neq 4$ のときには微分構造は一意だが、 $\mathbb{R}^4$ には非加算無限個の微分構造がある。

このような強力な結果をもたらす手法にゲージ理論がある。これは 3, 4 次元多様体で、ある非線形偏微分方程式を考え、その解の情報から (微分) トポロジー的な情報をとりだす分野である。このとき用いられる非線形偏微分方程式は元々素粒子物理学で考えられていたものであり、代表的なものに、Yang-Mills 方程式の解の特別な場合である ASD 方程式、1994 年に Witten によって導入された Seiberg-Witten 方程式がある。

私の研究の主要なトピックのひとつは、後者の Seiberg-Witten 理論の亜種、実 Seiberg-Witten 理論の研究である。4 次元多様体 X と X 上の involution $\iota: X \rightarrow X$ について ι が良い条件を満たすなら Seiberg-Witten 方程式を考える解の空間に”ねじれた”群作用が持ち上がる。この群作用で固定される解を数えることによって、 X と X 上の involution ι の組 (X, ι) を調べることができる。

S^4 への $\mathbb{R}P^2$ の埋め込みを考えて、それに沿った二重分岐被覆を考えることで、次を証明できる： $\mathbb{R}P^2$ の S^4 への埋め込みの無限族で、互いに位相的には同値だが滑らかには互いに同値でないものが存在する ([5])。 S^4 内のエキゾチックな曲面に関する背景を述べる。エキゾチックな曲面埋め込みに関する研究自体は列挙することが困難なほど数多くの研究があるが、最も基本的な閉 4 次元多様体である S^4 内のエキゾチックな曲面埋め込みの例はあまり多くない。実際、 S^4 内の向き付け可能な曲面によるエキゾチックな曲面埋め込みは発見されていない。さらに向き付け不可能な例についても Finashin-Kreck-Viro や Finashin による例をはじめあまり知られていない。さらに、向き付け不可能なエキゾチック曲面結び目で今まで知られていた例の種数はいずれも 5 以上であり、種数が小さい例は知られていなかった。

このほかに、[2] や [4] において involution が自由な場合の実 Seiberg-Witten 理論およびインスタントンモジュライの向き付けについて指数の Witten localization を用いて研究を行った。

最近行っている研究のうちひとつは、involution が自由でない場合の実 Seiberg-Witten 理論のモジュライの向きを定める際の障碍や向きの決定に必要なデータについて研究している。これは、単に技術的に重要なだけでなく、既存の Seiberg-Witten 理論と真に異なる現象が起き、実際に向きを付けられない場合などが存在し、実 Seiberg-Witten 理論が既存のゲージ理論とは異なる振る舞いをする、さらには既存のゲージ理論で拾えない情報を拾えることの理由に迫ろうとするものである。

参考文献

- [1] Hokuto Konno, Jin Miyazawa, and Masaki Taniguchi. Involutions, links, and Floer cohomologies. *Journal of Topology*, Vol. 17, No. 2, p. e12340, 2024.
<https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/topo.12340>

- [2] Jin Miyazawa. Localization of a $KO^*(pt)$ -valued index and the orientability of the $\text{Pin}^-(2)$ monopole moduli space. Algebraic & Geometric Topology, Vol. 25, No. 2, pp. 887–918, 2025.
<https://msp.org/agt/2025/25-2/p07.xhtml>
- [3] Hokuto Konno, Jin Miyazawa, and Masaki Taniguchi. Involutions, knots, and Floer K-theory. Compositio Mathematica, Vol. 161, No. 11, p. 2852–2910, 2025.
<https://doi.org/10.1112/S0010437X25102820>
- [4] Jin Miyazawa. Localization of indices and orientations on G -instanton moduli spaces. arXiv preprint arXiv:2209.03039(to appear in Mathematical Research Letters), 2022.
<https://arxiv.org/abs/2209.03039>
- [5] Jin Miyazawa. A gauge theoretic invariant of embedded surfaces in 4-manifolds and exotic P^2 -knots. arXiv preprint arXiv:2312.02041(to appear in Annals of Mathematics), 2023.
<https://arxiv.org/abs/2312.02041>
- [6] Jin Miyazawa. Boundary Dehn twists on Milnor fibers and Family Bauer–Furuta invariants, arXiv preprint arXiv:2410.21742, 2024.
<https://arxiv.org/abs/2410.21742>
- [7] Jin Miyazawa, JungHwan Park, and Masaki Taniguchi. A satellite formula for real Seiberg–Witten Floer homotopy types. arXiv preprint arXiv:2504.03270, 2025.
<https://arxiv.org/abs/2504.03270>