

## 教授 中西賢次（非線形分散型方程式の数学解析）

私の研究分野は偏微分方程式の数学解析で、主な対象は非線形波動または非線形分散型と呼ばれる非線形偏微分方程式である。これらは、プラズマ・水面波・超流動・光ファイバーなど様々な物理的状況における、相互作用の強い波動の時空間発展を記述するもので、波の分散性と非線形相互作用の競合により色々な時間変化を表すことができる。代表的なものは非線形 Schrödinger 方程式や KdV 方程式などが挙げられる。偏微分方程式の理論上もっとも基礎的な初期値問題の局所的可解性については、20世紀後半からの精密な線形および多重線形の関数評価式の整備によって、広範な方程式と関数空間を扱えるようになった。近年はそれに基づいて解の時間大域的様相の解析が進んでおり、典型的な解からそれらの複合的状況まで徐々に明らかにされつつある。私の最近の研究では、一般解全体の様相を捉えることを目指しており、特に、異なる典型的挙動の間の時間的遷移や、解空間の中での中間的状態の解析のため、技術開発と現象解明の両軸で研究を行っている [2]。下記論文リスト内の成果としては、球対称性 Strichartz 評価の正則化を利用して、4次元 Zakharov 系に対して基底状態以下のエネルギーを持つ球対称解を、散乱と（弱い意味の）爆発に分類した [6]。4次元 Zakharov 系はエネルギー集約現象について、4次元のみに現れる端点 Strichartz 評価が絡んだ複雑なエネルギー臨界性を呈するが、この論文では波動方程式の解をポテンシャルとする Schrödinger 方程式に対する一様 Strichartz 評価という新しい手法を開発した。更に球対称でない場合についても、双線形の端点 Strichartz 評価を利用して、同様な一様評価を導出し、大域存在に関しては球対称の仮定を外すことに成功した [5]。また、初期値問題の局所適切性についても、連立相手の分散性を双線形評価のノルムに上手く組み込むことにより、適切性の成り立つ Sobolev 空間の指数を完全に決定した [4]。非線形項がさらに低次で長距離型の場合については、非常に一般的な時空依存の線形ポテンシャルと多重ソリトンより一般的な非分散性波動成分の介在の下でも、分散性波動成分が線形解に漸近することは無いことを証明した [7]。また、消散項付き非線形 Klein-Gordon 方程式に対して、二重ソルトンの近傍を初期値とする解の時間大域挙動を5つの集合に完全分類した。二重ソリトンが非線形反発力で互いに遠ざかりながら生き残るケースが余次元2の多様体を成すことは先行研究で示されていたが、異なる漸近挙動に対応する初期値の間関係は不明だった。我々の研究では、ソルトンの1つが崩壊して他方は生き残るケースがそれぞれ余次元1の多様体を成し、それら二つを境界において二重ソルトンの多様体で接続した集合が、残りの初期値を爆発と大域減衰に対する二つの領域に分けていることを示した [3]。非線形分散型以外では、Trudinger-Moser 不等式を全平面および円盤上のエネルギー制約下で調べ、最良定数達成元の存在・非存在を隔てる臨界非線形増大度を漸近展開の形で具体的に求め、全空間では第2項が消えることと、どちらの領域でも第3項に Apéry 定数が現れることを示した [9]。また、同様の非線形項を持つ拡散方程式に対して特異性を持つ定常解と正則な時間発展解を構成し、初期値問題に対する解の非一意性を示した [8]。更に [1] では方程式の型を制約せず、非常に広範な非線形偏微分方程式に対する Cauchy 問題を考え、初期状態の周波数帯を半空間に制限するとフーリエ超関数の空間で時間大域的適切性が得られることを示した。これらの解は、粘性 Burgers 方程式や非圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対する既知の複素数値爆発解を含んでおり、特に前者について、古典解や緩増加超関数としての有限時間爆発とフーリエ超関数での時間大域適切性がどのように両立しているか詳しく調べた。

論文リスト

- [1] Kenji Nakanishi and Baoxiang Wang, *Global wellposedness of general nonlinear evolution equations for distributions on the Fourier half space*. J. Funct. Anal. **289** (2025), no. 8, 111004, doi.org/10.1016/j.jfa.2025.111004.
- [2] K. Nakanishi, *Global dynamics around and away from solitons*. ICM—International Congress of Mathematicians. Vol. 5. Sections 9–11, 3822–3840, EMS Press, Berlin
- [3] Kenjiro Ishizuka and Kenji Nakanishi, *Global dynamics around 2-solitons for the nonlinear damped Klein-Gordon equations*. Ann. PDE **9** (2023), no. 1, Paper No. 2, 79 pp.
- [4] Timothy Candy, Sebastian Herr and Kenji Nakanishi, *The Zakharov system in dimension  $d \geq 4$* . J. Eur. Math. Soc. **25** (2023), no. 8, 3177–3228.
- [5] Timothy Candy, Sebastian Herr and Kenji Nakanishi, *Global wellposedness for the energy-critical Zakharov system below the ground state*. Adv. Math. **384** (2021), 107746.
- [6] Zihua Guo and Kenji Nakanishi, *The Zakharov system in 4D radial energy space below the ground state*. Amer. J. Math. **143** (2021), no. 5, 1527–1600.
- [7] Jason Murphy and Kenji Nakanishi, *Failure of scattering to solitary waves for long-range nonlinear Schrödinger equations*. Discrete Contin. Dyn. Syst. **41** (2021), no. 3, 1507–1517.
- [8] Slim Ibrahim, Hiroaki Kikuchi, Kenji Nakanishi and Juncheng Wei, *Non-uniqueness for an energy-critical heat equation on  $\mathbb{R}^2$* . Math. Ann. **380** (2021), no. 1-2, 317–348.
- [9] Slim Ibrahim, Nader Masmoudi, Kenji Nakanishi and Federica Sani, *Sharp threshold nonlinearity for maximizing the Trudinger-Moser inequalities*. J. Funct. Anal. **278** (2020), no. 1, 108302, 52 pp.