

教授 尾高悠志（代数幾何学・複素幾何学・モジュライ空間に関わる研究）

古典的で重要な代数多様体（または複素多様体）を多く含む、K\"ahler-Einstein 多様体の幾何を現代的な代数幾何（双有理幾何学など）、特にそのモジュライ空間やそのコンパクト化、そして特異点論や Arakelov 幾何学などに繋げる研究が多い。K\"ahler-Einstein 計量やより一般の cscK 計量などは代数多様体の上の標準計量を与えるが、その存在は Yau-Tian-Donaldson 型の対応を介して、代数幾何学的ないし非アルキメデス幾何学的概念である K 安定性（ないしその亜種）と同値であるが、様々な研究によりその関連性はただの同値性より深遠なものであることがわかってきた。

初期の仕事は K 安定性を代数幾何学的に扱う土壌を創るものであった。そこでは特に極小モデル理論ベースの双有理幾何学と、幾何学的不変式論ベースの代数スタックの理論を効果的に用いた。

まず、K 安定性の定義は Donaldson-Futaki 不変量（多くの別名を持つ）が群作用を用いず交点数で記述できることを示し、それをを用いて極小モデル理論ベースの双有理幾何との深い関係性が見つかり、それを活用した判定理論の基礎を構築した。

特にまず K-(半)安定性は semi-log-canonical 特異点を持つことを示し[1]、負の Ricci 曲率を持つ場合である標準因子が ample な多様体（標準モデル、特に一般型）の場合には KSBA (Koll\"ar-Shepherd-Barron-Alexeev) 理論というモジュライ理論と整合性が取れることもわかった[2]。これらをもとに考えはじめて導入したのが「K-(poly)安定な多様体の（擬射影的）モジュライ」である K-moduli 予想（於城崎シンポジウム，2010）であり、滑らかな場合の過去の様々な微分幾何学的な仕事とも整合的である。

その後、K 安定性の判定理論やモジュライ理論は正 Ricci 曲率を持つ Fano 多様体の場合にとりわけ発展した。その基盤に貢献したのが[3,4,6]である。特に[6]では、Fano 多様体の K 安定性を完全に判定する δ 不変量（安定性閾値とも呼ばれる）を導入し、[3,4]では滑らかな K 安定 Fano 多様体のモジュライ空間のコンパクト化としての K-モジュライの構成を行った。その後、Alper, Blum その他大勢のスタック理論や双有理幾何学の専門家らによって純代数幾何学的アプローチが進展し、多くの論文が生まれたが、上記はその際の基盤的手法を与えている。

また、他に取り組んできたテーマは（広義）Calabi-Yau 多様体のモジュライや計量との関係性である。Fano 多様体の場合や標準モデル（一般型）の場合と大きく異なり、KE 計量や代数多様体の極限挙動は複雑かつ深遠で、例えばミラー対称性とも関わると期待されている。直径を固定した場合には崩壊現象が起きて特殊 Lagrangian ファイブレーションを誘導し、トロピカル多様体の亜種ができるというのが Kontsevich-Soibelman 予想であるが、[7,8]ではこれを K3 曲面、超ケーラー多様体（ただし弱い対数型 abundance 予想を仮定）やアーベル多様体の場合に解決すると同時に、モジュライ空間全体のコンパクト化の枠組みに拡張した。とりわけ、微分幾何学的な所いを持つ Gromov-Hausdorff 型のコンパクト化が、純粋に Lie 理論で記述される局所対称空間の（随伴型）佐武コンパクト化およびトロピカル幾何学に近い Morgan-Shalen 型コンパクト化と一致することを見出し、部分的に証明した。type II 退化の幾何学への応用をもたらした後続研究[9]もある。後藤慶太氏との共同研究[10]では、非アルキメデス Calabi-Yau 計量や非アルキメデス SYZ ファイブレーションが複素側の極限として記述できる現象を、Abelian 多様体の商の場合に証明した。

数論的な方向において、K 安定性の理論の Arakelov 幾何学化も行った[5]。古典的には Chow 安定性に関わる埋め込まれた（または埋め込みを意識した）射影多様体の高さが J.-B. Bost, S.-W. Zhang によって導入・研究されていたが、私が導入した K-modular 高さ（あるいは数論的満洲汎函数）は、その線束のテンソル積に関する極限に対応する。複素幾何学で古典的な満洲汎函数に

おける定数分の曖昧さを、非アルキメデス計量の寄与を考慮することで解消し、定量的な意味を与えている。

特に、これは Abelian 多様体の場合の Faltings 高さの拡張であり、また一般型や Fano 多様体の場合には、より古典的な（反）標準因子の自己交点数に対応する。同時に、計量付きモデルごとに定義される値を最小化する標準的モデルの枠組みも与える（数論的 Yau–Tian–Donaldson 予想）。Fano 多様体の場合にはその後 Andreasson-Berman が Ding 汎函数型の亜種を導入して発展がある。

K 安定性理論においては (G_m) -同変な isotrivial 変形族（テスト配位）が鍵を担っていたが、その高階数版の設定に合うように、Stability theory over toroidal or Novikov type base and Canonical modifications (arXiv:2406.02489) においては、Alper–Halpern-Leistner–Heinloth による θ -階層と半安定還元理論を高階数のものに別アプローチで拡張した。これは純粋に代数的スタックの一般論である。これによって、例えば klt 特異点についての Donaldson–Sun 理論や Kähler–Ricci ソリトンについての Chen–Sun–Wang 理論の代数幾何学的取り扱いが期待されるが、実際に Compact moduli of Calabi–Yau cones and Sasaki–Einstein spaces (arXiv:2405.07939) ではコンパクト佐々木–Einstein 多様体や Calabi–Yau 錐のモジュライのコンパクト化を構成した。さらに、Algebraic geometry of bubbling Kähler metrics (arXiv:2406.14518) では klt 型の退化について Kähler–Einstein 計量の bubbling を代数的に構成するアルゴリズム（の候補）を与え、いくつかの具体例で実際の bubbling になっていることを確認した。

並河良典氏との共同研究 Canonical torus action on symplectic singularities (arXiv:2503.15791) では、シンプレクティック特異点が常に錐型構造を持つという Kaledin の古い予想を、微分幾何（Donaldson–Sun 理論）と上記の K 安定性に近い枠組み、さらに並河氏の普遍 Poisson 変形を併用する新しいアプローチで条件付きに証明した。しかも、標準的で幾何学的意味を持つトーラス作用を与えるという意味で、当初の予想より本質的に強い結論となっている。

1. Y. Odaka, The GIT stability of polarized varieties via discrepancy, *Annals of Mathematics* 177 (2013), no. 2, 645–661.
2. Y. Odaka, The Calabi Conjecture and K-stability, *International Mathematics Research Notices IMRN* 2012 (2012), no. 10, 2272–2288.
3. Y. Odaka, C. Spotti, and S. Sun, Compact moduli spaces of del Pezzo surfaces and Kähler–Einstein metrics, *Journal of Differential Geometry* 102 (2016), no. 1, 127–172.
4. Y. Odaka, Compact moduli space of Kähler–Einstein Fano varieties, *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences* 51 (2015), no. 3, 549–565.
5. Y. Odaka, Canonical Kähler metrics and arithmetic: Generalizing Faltings heights, *Kyoto Journal of Mathematics* 58 (2018), no. 2, 243–288.
6. K. Fujita and Y. Odaka, On the K-stability of Fano varieties and anticanonical divisors, *Tohoku Mathematical Journal* (2) 70 (2018), no. 4, 511–521.
7. Y. Odaka, Tropical geometric compactification of moduli, II: Abelian variety case and holomorphic limits, *International Mathematics Research Notices IMRN* 2019 (2019), no. 21, 6614–6660.
8. Y. Odaka and Y. Oshima, Collapsing K3 surfaces, tropical geometry and moduli compactifications of Satake, Morgan–Shalen type, *MSJ Memoirs*, vol. 40, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2021, 165 pp.
9. Y. Odaka, PL density invariant for type II degenerating K3 surfaces, moduli compactification and hyperkähler metrics, *Nagoya Mathematical Journal* 247 (2022), 574–614.

10. K. Goto and Y. Odaka, Special Lagrangian fibrations, Berkovich retraction, and crystallographic groups, *International Mathematics Research Notices IMRN* 2024, no. 2, 1650–1684.