

教授 緒方芳子 (数理物理学)

量子統計力学における基本的な数理モデルとして、量子スピン系が古くから研究されてきました。量子スピン系における時間発展は(ある種の局所性をもつ)ハミルトニアンと呼ばれる線型演算子によって与えられます。物質を絶対零度にまで冷やした時に実現する状態を基底状態といいます。基底状態はハミルトニアンの最低固有値を持つ固有状態に対応する、エネルギー最小の状態です。この最低固有値と残りのスペクトルの間にギャップがあるハミルトニアンは、ある意味で安定なものとして見る事ができて、近年、雑音に対して強い量子計算機との関連もあり、注目を集めています。

最近私はこういった、基底状態にスペクトルギャップを持つモデルの分類問題に興味を持って研究しています。この分類問題は次のようなものです。二つのモデルは、スペクトルギャップを閉じることなく滑らかな路で移り合うとき、同値であると考えます。自明なハミルトニアンを含まない同値類は、トポロジカル相と呼ばれます。この分類問題にさらに対称性を課することもできます。この場合は、ハミルトニアンとして、与えられた対称性を満たすものを考えます。二つの対称性を満たすモデルは、スペクトルギャップを閉じることなく、かつ対称性を破ることなく滑らかな路で移り合うとき、同値であると考えます。対称性を課さなければならぬに繋がりを二つのハミルトニアンも、対称性を課すと繋がらなくなってしまうことがあります。このような分類における同値類のうち、対称性を課さなければ自明になってしまうハミルトニアンたちの同値類を対称性で守られた相とよびます。

空間1,2次元の量子スピン系においては対称性で守られた相はコホモロジー値をとる不変量が存在すると物理学者によって予想されてきましたが、これを数学的に厳密に示しました。さらにフェルミオン系と呼ばれる(量子スピン系と並んで重要な)物理モデルのクラスにおいても、同様の問題を解決しました。

トポロジカル相については、エニオンと呼ばれる準粒子を approximate Haag duality という条件を満たすモデルにおいて一般に導出しました。物理学者の予想通り、このエニオンはトポロジカル相の分類の不変量になっています。エニオンの導出は場の理論で知られている DHR 理論の枠組みに倣った解析ですが、量子スピン系と場の理論では数学的に色々な違いがあります。例えば、local algebra というものがどちらの枠組みでも考えられますが、場の理論では常に III 型のフォンノイマン環になりますが、量子スピン系ではそうとは限らないことを具体的なモデルで示しました。

1. Y. Ogata, A $\mathbb{Z}_2$ -Index of Symmetry Protected Topological Phases with Time Reversal Symmetry for Quantum Spin Chains. Comm. Math. Phys. 374(2) 705 - 734 (2020).
2. Y. Ogata A classification of pure states on quantum spin chains satisfying the split property with on-site finite group symmetries. Trans-

actions of the American Mathematical Society, Series B 8(2) 39 - 65 (2021)

3. C. Bourne, Y. Ogata, The classification of symmetry protected topological phases of one-dimensional fermion systems ” , Forum of Mathematics, Sigma 9, (2021).
4. Y. Ogata, Y. Tachikawa, H. Tasaki, General Lieb-Schultz-Mattis Type Theorems for Quantum Spin Chains, Communications in Mathematical Physics 385, 79–99 (2021).
5. Y. Ogata, An $H^3(G, \mathbb{T})$ -valued index of symmetry-protected topological phases with on-site finite group symmetry for two-dimensional quantum spin systems , Forum of Mathematics, Pi 9, (2021).
6. Y. Ogata, A $\mathbb{Z}_2$ -index of symmetry protected topological phases with reflection symmetry for quantum spin chains, Communications in Mathematical Physics 385, 1245–1272 (2021).
7. Y. Ogata, A derivation of braided C^* -tensor categories from gapped ground states satisfying the approximate Haag duality, Journal of Mathematical Physics 63(1) 011902-011902 (2022).
8. P. Naaijken, Y. Ogata The Split and Approximate Split Property in 2D Systems: Stability and Absence of Superselection Sectors Communications in Mathematical Physics 392(3) 921-950 (2022).
9. Y. Ogata An Invariant of Symmetry Protected Topological Phases with On-Site Finite Group Symmetry for Two-Dimensional Fermion Systems, Communications in Mathematical Physics 395(1) 405-457 (2022).
10. Y. Ogata Type of Local von Neumann Algebras in Abelian Quantum Double Models, Annales Henri Poincaré 25 2353–2387 (2024).