教授 大木谷 耕司（流体力学、特に乱流理論の研究）

乱流や渦運動などの流体運動を支配する、ナビエ-ストークス方程式、および類似の方程式の性質を、数理解析、数理的なモデル化、およびその数値実験によって研究している。

- 正則性の判定基準
  多次元 Burgers 方程式は、ポテンシャル流の仮定の下で Cole-Hopf 変換によって線形化でき、可積分となる。同様の変換を、ベクトルポテンシャルで書かれた Navier-Stokes 方程式に適用することで、外力を伴った熱方程式に変換できる。非線形性は外力にのみ現れるため、この' 外力項' がよい性質を持つと仮定すれば、Feynman-Kac 公式によって積分方程式に書き換えることができる。こうして、Navier-Stokes 方程式の解の正則性の 1 つの判定基準 (Serrin 条件と同等のもの) が得られる。この定式化に基づき、' 外力項' の振る舞いを数値計算によって調べ、解の near-singularity との関連を議論した [1,2]。

- 後方自己相似性への応用
  最近は、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の自己相似解に興味を持って研究を進めている。一連の研究で、スケール不変性が臨界となる 2 種類の場合を区別することが重要であることが分かって来た [3,4,5]。第 1 の種類は、通常の決定論的 Navier-Stokes 方程式に関連し、３次元流ではベクトルポテンシャルを従属変数に取るときに現れる。このとき、動的スケール変換の下で、Navier-Stokes 方程式に付加される項はドリフト項のみで ' 最も少なく' なり、その線形化は Ornstein-Uhlenbeck 演算子となる。他方、第 2 種は、統計的な意味での Navier-Stokes 方程式に関連する。渦度勾配で Navier-Stokes 方程式を記述するとき、動的スケール変換の下で、それに付加項は保存型をなすという意味で ' 最も多く' なり、その線形化は Fokker-Planck 演算子である [6]。
  ベクトルポテンシャルによる基礎方程式を、確率過程 (ブラウン運動) を用いて積分方程式に形式的に書き直した上で、確率測度の変換により、ドリフト項を消去することを考えた。その結果、もし解の爆発があるならば、よく似た積分方程式の解が、まったく異なる振る舞いをしなければならない事が分かる [3,4,5]。

- 前方自己相似解の研究 *(*３次元流のプロファイルの決定問題*)*
  動的な前方スケール変換を、Navier-Stokes 方程式に施して得られる方程式の解が定常解を持てば、それは自己相似解を与える。そのプロファイルが、減衰終期の解の挙動を決める。２次元流では、第 1 種臨界性は、流れ関数を用いる時に現れ、第 2 種臨界性は、スカラー渦度に現れる。この場合、大域正則解の存在は知られていて、長時間極限で解は Burgers 渦と呼ばれる自己相似解で表せる。
  ３次元流でも、前方自己相似解の存在は、いくつかの関数クラスで存在が知られていて、長時間極限におけるプロファイルを、半群を用いて評価できることが知られている。この極限では、非線形項は粘性散逸項に比べ小さいため、摂

動論的な取り扱いが利用できる。渦度勾配を従属変数に採用する時、最低次の近似で、自己相似解は (非圧縮性を除いて) Gauss 関数そのもの、と簡単になる。即ち、求めるプロファイルは、Gauss 関数の near-identity である。当面の目標は、渦度勾配を変数にとり、自己相似の関数形を逐次近似により具体的に決定することである [7]。また、1 次元 Burgers 方程式に関して、よく知られている源泉型ではない自己相似解について吟味し、それが合流型超幾何関数の 1 種で表せることを注意した [8]。また、亜粘性 Burgers 方程式について同様な解析を行い、自己相似プロファイルを決定する near-identity を決める方程式を導出し、その漸近解析を行った [10]。

- **全空間における乱流**
  従来、境界を持たない流れに対する Navier-Stokes 方程式の数値解析的研究では、数値計算精度の有利さからほとんどが周期境界条件下で行われてきた。一方、積分核が陽に書けるなどの理由で、理論上は全空間で非周期流を取り扱うことも多い。その際、圧力項に伴う非局所性は強くはないと考え、両者の解の性質に大差は無かろうと仮定するのが慣例である。しかし、そのような比較を実際に行った数値計算の報告は見当たらない。そこで、非周期境界の場合の乱流を直接数値計算によって調べ、その相似則などを周期流の場合と比較することが興味ある問題となる。

- ***Navier-Stokes* と *Burgers* 方程式の補間**
  多次元 Burgers 方程式は、ポテンシャル流の仮定の下で熱方程式に帰着できるという意味で可積分である (いわゆる Cole-Hopf 線型化)。他方、Navier-Stokes 方程式は可積分ではないと考えられている。例えば、2 次元流の場合、Navier-Stokes 方程式の移流項の速度勾配を 90 度回転させることで、Burgers 方程式と等価な系が得られる。そこで、回転角を連続的に変化させることによって、一般化された非圧縮性流体力学が得られる。こうして、可積分系とそうではない系の性質を連続パラメターによって接続し、比較することができる。3 次元流についても、同様な一般化が可能である。

- **乱流統計理論の基礎づけ**
  乱流の統計力学が存在するならば、Hopf-Foias による汎関数定式化で記述できると考えられる [6,9]。しかしながら、そのような一般的な定式化は、慣例的な乱流理論とはかけ離れている。そこで、例えば、乱流の重要な性質の 1 つである、非粘性極限におけるエネルギー消散異常に注目し、一般的な定式化でどのように表現されるかを調べることは興味深い問題である。


1. K. Ohkitani, “Analogue of the Cole-Hopf transform for the incompressible Navier-Stokes equations and its application,” Journal of Turbulence, **18** (2017), 465–479.

2. R. Vanon and K.Ohkitani, “Applications of a Cole-Hopf transform to the 3D NavierStokes equations,” J. Turbulence **19**(2018) 1–12.

3. K. Ohkitani, “Near-invariance under dynamic scaling for the Navier-Stokes equations in critical spaces: a probabilistic approach to regularity problems,” J. Phys. A: Math. Theor., **50** (2017) 045501.
4. K. Ohkitani, “Cole-Hopf–Feynman-Kac formula and quasi-invariance for Navier-Stokes equations,” J. Phys. A: Math. Theor., **50** (2017) 405501.
5. K. Ohkitani, “Quasi-invariance for the Navier-Stokes equations,” in *Partial Differential Equations and Fluid Mechanics,* LMS Lecture Notes Series 452, Cambridge University Press. ed. C. Fefferman, J.C. Robinson, and J.L. Rodrigo (2018).
6. K. Ohkitani, “Study of the Hopf functional equation for turbulence: Duhamel principle and dynamical scaling,” Phys. Rev. E **101** (2020) 013104.
7. K. Ohkitani and R. Vanon, “Self-similar source-type solutions to the three-dimensional NavierStokes equations,” Proc. R. Soc. A. **478**(2022) 20210527.
8. K. Ohkitani, “Self-similarity in turbulence and its applications,” Phil. Trans. R. Soc. A **380**(2022) 20210048.
9. K. Ohkitani, “Remarks on the principles of statistical fluid mechanics,” Phil. Trans. R. Soc. A **380**(2022) 20210077.
10. K. Ohkitani, “Self-similar solutions to the hypoviscous Burgers and SQG equations at criticality,” J. Phys. A: Math. Theor. **56** (2023) 275204.