

教授 大槻 知忠 (位相幾何学)

結び目と3次元多様体の不変量について研究している。

1980年代以来, Chern-Simons 理論にもとづいて大量の不変量(量子不変量)が発見され, それらの不変量に関する新しい研究領域(量子トポロジー)がもたらされた。その後のこの分野の研究の主な動機は Chern-Simons 場の理論の相関関数をトポロジーの立場から理解することにあつたが, この分野に関してなされたさまざまな研究により, Chern-Simons 経路積分を自明接続において摂動展開して得られる不変量として, それらの大量の不変量は理解されてきた。この分野の今後のよりよい方向性を考える, という観点から, 筆者は未解決問題集 [9,10] を編集したが, 未解決問題の中でも「同変不変量」「体積予想」「数論との関連」などが今後の発展のために重要ではないかと筆者は考えている。

「体積予想」は, 双曲結び目の Kashaev 不変量(この不変量は1の N 乗根における結び目の色つき Jones 多項式に等しい)の極限に双曲体積が現れることを主張する予想である。筆者は Kashaev 不変量の漸近展開を比較的簡単ないくつかの双曲結び目について具体的に計算し, それらの場合について体積予想が成り立つことを証明した。また, その漸近挙動の第2項(準古典極限の項)は Reidemeister torsion であるとおもわれ, 筆者は多くの結び目でこれを確認した。さらに高次の項は未知のべき級数不変量になっているようである。また, 最近, 閉3次元双曲多様体の量子不変量に対しても体積予想が定式化され, 筆者はいくつかの3次元多様体に対してその体積予想が成り立つことを証明した。それらの不変量は, $SL(2, \mathbb{C})$ Chern-Simons 経路積分を, 双曲構造のホロノミー表現に対応する平坦接続において摂動展開して得られる不変量として, 理解される。最近, カスプ付き3次元双曲多様体, とくに, 双曲結び目の補空間に対して定義されている 3D index という不変量も, そのタイプの不変量であるとおもわれる。筆者は, 双曲結び目の補空間の n 重巡回被覆空間の 3D index の挙動について調べている。それらの不変量にもとづいて「3次元双曲多様体上の量子トポロジー」が構築されることを期待したい。

- [1] *On the asymptotic expansion of the Kashaev invariant of the 5_2 knot*, Quantum Topology **7** (2016) 669–735.
- [2] *On the asymptotic expansion of the quantum $SU(2)$ invariant at $q = \exp(4\pi\sqrt{-1}/N)$ for closed hyperbolic 3-manifolds obtained by integral surgery along the figure-eight knot*, Algebraic & Geometric Topology **18** (2018) 4187–4274.
- [3] (with T. Takata) *On the quantum $SU(2)$ invariant at $q = \exp(4\pi\sqrt{-1}/N)$ and the twisted Reidemeister torsion for some closed 3-manifolds*, Commun. Math. Phys. **370** (2019) 151–204.
- [4] *A refinement of the LMO invariant for 3-manifolds with the first Betti number 1*, Internat. J. Math. **35** (2024), no. 6, Paper No. 2450020.
- [5] *On the 3D-index of finite cyclic covers of hyperbolic knot complements*, preprint, 2023. <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/preprint/file/RIMS1971.pdf>
- [6] *Quantum invariants, — A study of knots, 3-manifolds, and their sets*, Series on Knots and Everything, **29**. World Scientific Publishing Co., Inc., 2002
- [7] 大槻知忠, 「結び目の不変量」, 共立出版, 2015年.

- [8] 大槻知忠、満洲俊樹、亀谷幸生、「幾何学と物理」、幾何学百科 IV、朝倉書店、2023年12月.
- [9] T. Ohtsuki (ed.), *Problems on invariants of knots and 3-manifolds*, Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto 2001), 377–572, Geom. Topol. Monogr. **4**, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2004.
- [10] T. Ohtsuki (ed.), *Problems on Low-dimensional Topology 2024*, RIMS Kokyuroku **2289** (2024).