

教授 小澤 登高（作用素環と解析学的群論）

私は作用素環と離散群の関わりを研究している。(離散)群とは、任意の対象の対称性を記述するための数学言語である。例えば、ある結晶が与えられたとき、その結晶構造を変えない変換(回転操作、鏡映操作、反転操作など)全体を考えたものが群である。人間には線形的な構造の方が理解しやすいので、群の各要素を適当な(線形)空間上の作用素とみなして取り扱うことにする。さらに、そうした作用素全体が生成する代数系を考え、適当な位相で完備化すれば作用素環と呼ばれる対象ができる。(考える位相の違いにより、 C^* 環と von Neumann 環の二種類が存在する。)位相の存在により、群論のような代数的な問題に対しても解析的なテクニックを使えるところが作用素環論の特徴である。作用素環の研究はそもそも、John von Neumann が量子力学の数学的取り扱いを目指して始めたものであったが、現在では数理物理だけでなく、群論やエルゴード理論などに幅広い応用がある。私の研究は双方向的で、これらの分野への作用素環論の応用とその逆を同時に扱っている。伝統的な作用素環論の他にも、作用素論、Banach 環論、Banach 空間論、群表現の摂動理論、離散距離幾何学等の研究を行っている。

近年は「解析学的群論」の標語のもと、(関数)解析的手法を使って群の代数的・幾何学的な構造を調べることに注力している。Breuillard らとの共同研究 [2] では、群 C^* 環の構造を調べることでより 40 年来懸案の問題を解決し、その応用として群のコンパクト位相空間への極小作用が自由になるための(必要)十分条件を見つけることが出来た。また、多項式的増大度を持つ群は実質的に冪零であるという著名な Gromov の定理に関数解析に基づく極めて簡明な別証明を付けた [3]。これを発展させた Erschler との共同研究 [4] では、群が無限巡回群へ全射準同型を持つ有限指数部分群を持つための扱いやすい十分条件を群上のランダムウォークの言葉で表すことに成功している。また離散群論における非可換実代数幾何学的な研究を推進し、Kazhdan の性質 (T) の純代数的な特徴づけを得た [1]。Kaluba らとの共同研究ではその特徴づけを確認するためのアルゴリズムを電子計算機で実装することにより、自由群の自己同型群 $\text{Aut}(F_5)$ が Kazhdan の性質 (T) を持つことを数学的厳密さをもって示した [5]。 $\text{Aut}(F_d)$ が Kazhdan の性質 (T) を持つか否かは長年懸案の問題であった。この解決により、実験数学及び工業数学において使われている積置換アルゴリズムが高性能であることが理論的に保証された。積置換アルゴリズムは有限群においてランダムサンプリングを行うアルゴリズムであるが、ランダムサンプリングのために何回シャッフルするのがもっとも効率的なのかについての理論的な考察を行った。部分的な結果として Ramanujan ランダムウォークがカットオフ現象を示すことの関数解析的な証明を得た [8]。

- [0] N. P. Brown and N. Ozawa; C^* -algebras and finite-dimensional approximations. Graduate Studies in Math., 88. American Mathematical Society, 2008, 509 pp.
- [1] N. Ozawa; Noncommutative real algebraic geometry of Kazhdan’s property (T). J. Inst. Math. Jussieu, 15 (2016), 85–90.
- [2] E. Breuillard, M. Kalantar, M. Kennedy, and N. Ozawa; C^* -simplicity and the unique trace property for discrete groups. Publ. Math. I.H.É.S., 126 (2017), 35–71.
- [3] N. Ozawa; A functional analysis proof of Gromov’s polynomial growth theorem. Ann. Sci. Éc. Norm. Super. (4), 51 (2018), 549–556.
- [4] M. Kaluba, P. Nowak, and N. Ozawa; $\text{Aut}(F_5)$ has property (T). Math. Ann., 375 (2019), 1169–1191.
- [5] J. Bannon, A. Marrakchi, N. Ozawa; Full factors and co-amenable inclusions. Comm. Math. Phys., 378 (2020), 1107–1121.
- [6] N. Ozawa; An entropic proof of cutoff on Ramanujan graphs. Electron. Commun. Probab., Volume 25 (2020), paper no. 77. 8 pp.
- [7] N. Ozawa and Y. Suzuki; On characterizations of amenable C^* -dynamical systems and new examples. Selecta Math. (N.S.), 27 (2021), Article number: 92. 29pp.
- [8] N. Ozawa; A substitute for Kazhdan’s property (T) for universal non-lattices. Analysis & PDE, to appear.