

助教 辻村 昇太 (数論幾何)

私は双曲的曲線の数論幾何に関心を持っており、特に、遠アーベル幾何学、及び、その応用の研究を行っている。現在までの研究状況は以下の通りである。

絶対遠アーベル幾何学の文脈で、Belyi カスプ化と呼ばれる p 進局所体上の (特別な種類の) 双曲的曲線の閉点に付随する分解群を復元する技術が、望月新一氏によって構築されていた。[1] では、この Belyi カスプ化のある種の組み合わせ論版 (組み合わせ論的 Belyi カスプ化) を組み合わせ論的遠アーベル幾何学における三脚同期化の理論を用いて構築した。そして、古くから考察されている「射影直線引く 3 点の幾何的基本群への外 Galois 作用から誘導される、有理数体の絶対 Galois 群から Grothendieck-Teichmüller 群への単射は全単射か」という問題への応用: (a) Y. André 氏によって定式化されたこの問題の p 進局所版における対応する単射の自然な分裂の構成 ([1]), 及び, (b) 数論的な対象であるこの単射の像の共役類の、純群論的/組み合わせ論的復元 ([3], 星裕一郎氏, 望月新一氏との共同研究), を与えた。(a) の証明では組み合わせ論的遠アーベル幾何学以外の非自明な結果として、E. Lepage 氏による Mumford 曲線に対する非特異点解消を用いた。(a) の分裂が単射であれば、この問題の局所版は肯定的に成立することになる。この単射性を導くため、幾何的緩和基本群の剛性の理解をより深める必要を感じ、その方面の研究も行っている ([4])。また非特異点解消に関しては、望月新一氏との最近の共同研究 ([7]) において、Mumford 曲線に限らない一般の p 進局所体上の双曲的曲線に対しても成立することを証明した。この論文では、この非特異点解消の応用として、E. Lepage 氏とは異なる議論/整理の仕方で、長い間当該分野の未解決問題であった絶対版 p 進 Grothendieck 予想も肯定的に解決している。さらに、これまでの研究に現れていた様々な種類の p 進版 Grothendieck-Teichmüller 群が実は全て一致しているという事実も証明している。また、(b) は G. V. Belyi によって提示されていた有理数体の絶対 Galois 群の像の群論的記述という問題に対する遠アーベル幾何学の観点からの肯定的解決である。(もちろん、Grothendieck-Teichmüller 群への単射が全単射であれば、それははるかに強力な形での肯定的解決となる。)

p 進遠アーベル幾何学の別の発展の方向として、対象とする体を p 進局所体等の比較的小さい体とは限らないより一般の p 進体に拡張する研究を行っている。この方向では南出新氏との共同研究 ([2], [6] 等) で、群論的/数論的双方の観点から、(ある特定のクラスの) 混標数完備離散付値体の絶対 Galois 群の様々な遠アーベル幾何学的な性質を証明した。また、種数 0 の双曲的曲線であれば、剰余標数 p の一般の Hensel 離散付値体上で副 p 版 Grothendieck 予想、及び、(閉点に付随する分解群を保つという仮定の下で) その絶対版が成立することを証明している ([9])。将来的には、 p 進的な遠アーベル幾何学に関する多くの結果は、(標数が正であることを除き) 剰余体に制限のない設定で展開されるようになると期待している。

[5] では、数体の最大円分拡大 (の任意の有限生成拡大) の部分体上の曲線に対する、双有理版 (つまり、関数体版) の Grothendieck 予想型の結果を証明した。基本的に双有理版は双曲的曲線版に比べると証明は易しくなる。その一方で、円分指標の像が完全に消滅しているような体上の任意の双曲的曲線に付随する対象に対して、(強い意味での) Grothendieck 予想型の結果が初めて得られたという意味では興味深い進展だと考えている。双曲的曲線そのものに対しても同様のことが成立するかどうか引き続き研究を進めたい。

[8] では、J. Stix 氏によって証明されていた正標数有限生成超越拡大体上の有限体に降下しないような双曲的曲線に対する Grothendieck 予想の、円分剛性の観点からの別証明を行った。この問題の 1 つの技術的な障害は、基本群は変えないが曲線のモジュライは変わってしまう Frobenius 捻りという操作の存在である。この管理を円分物の同期化の観点から行うこ

とで別証明を与えた。またこの論文では、M. Saïdi 氏や玉川安騎男氏による有限体上の双曲的曲線に対する Grothendieck 予想に関する近年の進展を用いることで、J. Stix 氏の扱っている設定よりもより一般の設定で議論を展開している。さらに、F. Pop 氏の双有理版遠アーベル幾何学についての結果と組み合わせることで、その絶対版も与えている。その後、星裕一郎氏、澤田晃一郎氏との共同研究 ([10]) で、上述の結果の配置空間への一般化を与えた。高次元の正標数代数多様体に対する遠アーベル幾何学と従来より考えられている標数 0 での設定の大きく異なる点は、Frobenius 捻りの存在により、双曲的曲線の積として発生する高次元代数多様体に対する Grothendieck 予想型の結果が成立しないことである。この結果は高次元の正標数代数多様体に対する Grothendieck 予想型の結果としては初めてのものであり、意義深いと考えている。[8] に引き続いて、適切な円分同期化同型を構成することが証明の鍵の一つである。

- [1] S. Tsujimura, Combinatorial Belyi cuspidalization and arithmetic subquotients of the Grothendieck-Teichmüller group, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **56** (2020), pp. 779–829.
- [2] A. Minamide and S. Tsujimura, Internal indecomposability of profinite groups, *Adv. Math.* **409** (2022), Paper No. 108689.
- [3] Y. Hoshi, S. Mochizuki, and S. Tsujimura, *Combinatorial construction of the absolute Galois group of the field of rational numbers*, RIMS Preprint **1935** (December 2020).
- [4] S. Tsujimura, On the tempered fundamental groups of hyperbolic curves of genus 0 over $\overline{\mathbb{Q}}_p$, *J. Inst. Math. Jussieu* **22** (2023), pp. 2833–2856.
- [5] S. Tsujimura, Birational anabelian Grothendieck conjecture for curves over arbitrary cyclotomic extension fields of number fields, *Adv. Math.* **435** (2023), Paper No. 109380.
- [6] A. Minamide and S. Tsujimura, *Anabelian geometry for Henselian discrete valuation fields with quasi-finite residues*, RIMS Preprint **1973** (June 2023).
- [7] S. Mochizuki and S. Tsujimura, *Resolution of nonsingularities, point-theoreticity, and metric-admissibility for p -adic hyperbolic curves*, RIMS Preprint **1974** (June 2023).
- [8] S. Tsujimura, *Grothendieck conjecture for hyperbolic curves over finitely generated fields of positive characteristic via compatibility of cyclotomes*, RIMS Preprint **1975** (July 2023).
- [9] S. Tsujimura, *On pro- p anabelian geometry for hyperbolic curves of genus 0 over p -adic fields*, RIMS Preprint **1983** (April 2024).
- [10] Y. Hoshi, K. Sawada, and S. Tsujimura, *The anabelian geometry of configuration spaces of hyperbolic curves in positive characteristic*, RIMS Preprint **1984** (May 2024).