Surveys in Geometry

無限群と幾何学 (95年11月)

「双曲群の手引き」

藤原耕二

2007.5.31

目 次

1 双曲的な空間 **4**
1.1 双曲平面 4
1.2 双曲性 5
1.3 擬測地線 7
1.4 擬等長写像 13
1.5 擬凸部分空間 15
1.6 双曲空間の境界 15

2 双曲群 **21**
2.1 群の双曲性 21
2.2 擬凸部分群 25
2.3 双曲群の初等性 26
2.4 Combination Theorem 27

3 初等的でない双曲群は階数 2 の自由群を含む **28**
3.1 双曲的な元 28
3.2 自由群の存在 30

4 双曲群は線型の等周不等式をみたす **33**
4.1 群の表示と等周不等式 33
4.2 双曲群は有限表示である 34
4.3 双曲性と線型等周不等式は同値 34

5 その他 **37**
5.1 まとめ 37
5.2 有限位数の元 38
5.3 位数無限の元 39
5.4 $\mathbb{Z}^2$ に同型な部分群の非存在 40

まえがき

20 世紀はじめ、Dehn は幾何学的アイディアを使って、曲面群の「語の問題」(word problem) を解決した。これが、今でいう「幾何学的群論」(Geometric group theory) の始まりかもしれない。Dehn の重要な貢献は、無限群における研究指針を示したことにもある。

その後の離散群の研究においては、幾何学的考察より組み合わせ的な議論が優勢であった。幾何的手法に再び大きな光を当てたのは Rips であり、それは、Gromov の双曲群の理論として結実した　[Gr]. それから約 10 年、幾何学的群論は双曲群を中心に発展したが、今後は新しい展開も期待される。双曲群の理論は幾何学的群論における最初の一歩といえる。

このノートでは、一章で空間の双曲性、二章で群の双曲性を定義する。そのあと、双曲群について最初の二つの重要な定理、すなわち、三章で初等的でない双曲群が階数 2 の自由群を含むこと、四章で双曲群が線型の等周不等式をみたすことをしめす。他を参照しないで読めるように心掛けたが、双曲群にパラボリックな元が存在しないこと (定理 2.1) の証明を省いたのは、心残りである。

追記

このノートは 1995 年 11 月に東工大に於いて行なわれた Surveys in Geometry 「無限群と幾何学」における講演「双曲群の手引」の予稿である。

その後, 名古屋大学多元数理研究科における集中講義 (2002 年 1 月)「幾何学的群論の入門」で双曲群についても話すにあたり, 少し手を加えた (主に定理 4.2 の証明)。

北大数学教室での集中講義 (2002 年 10 月) で話した後, 手を加えた （ 例 1.2, 定理 1.1 の証明, 2.4, 5 章など)。

東大数理での集中講義 (2006 年 11 月) もこのノートに基づいて一部行った。

東北大情報科学研究科で 2007 年前期に講義中で、現在、このノートも修正中である。補足の多くは、これによる。

京大での集中講義 (2007 年 6 月) の後にも手直しの予定。

藤原耕二
東北大学　大学院情報科学研究科.
fujiwara@math.is.tohoku.ac.jp

レポート問題 2007.6.10（京大の集中講義の単位希望者は、下から 2 問選んで 6 月中に事務に提出せよ）

1. 双曲平面で半径 r の円の円周の長さは $2\pi \sinh r$, 面積は $2\pi(\cosh r - 1)$ であることを示せ。ただし、双曲平面での測地距離の定義はこのノートで述べたものを使ってもいいし、本 [深谷] で同値性が示されている別の定義（モデル）を使って計算してもよい。

２．次の二つの双曲平面の等長変換が、双曲的か判定せよ。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}, a \neq 1$$

ただし、f が双曲的とは、ある点 x とある定数 $C > 0$ が存在して、次が成立することである。

$$d(x, f^n(x)) \geq Cn, n > 0$$

興味があれば、一般の元 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ の双曲性も判定せよ。

3. δ-双曲空間 X の無限測地線 $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to X$ について、ある定数 C が存在し次が成立するとする。

$$\alpha \subset N_C(\beta), \beta \subset N_C(\alpha)$$

このとき、実は上の包含関係で $C = 2\delta$ としてもよいことを示せ。ただし、α は測地線の像のことである。

4. 双曲群 G に $\mathbb{Z}^2$ に同型な部分群が存在しないことを示せ。ただし、簡単のため、G に位数有限の元は単位元以外ないと仮定する。

ヒント：このノートで書かれているように、次が正しい。それを使ってよい。「双曲群の位数無限の元 g は、Cayley グラフの双曲的な等長変換であり、ある無限擬測地線 γ を不変にする：$g(\gamma) = \gamma$」

問い 3 を参考にせよ。

さらに、必要なら、擬測地線 γ が測地線であると仮定して議論してもよい（この仮定は常に正しいわけではない）。

５．　G を双曲群とする。$a \in G$ を位数無限な元とする。もし、ある元 $b \in G$ と、$k > 0, l$ について

$$ba^k b^{-1} = a^l$$

ならば、$l = \pm k$ であることを示せ。ただし、Cayley グラフに無限測地線 α があって $a\alpha = \alpha$ となる場合だけを論じてもよい。このような α を a の軸と呼ぶ。

ヒント：元 a^l, $ba^k b^{-1}$ の軸を探して Cayley グラフに書き入れてみよ。問い 3 も参考にせよ。

1　双曲的な空間

1.1　双曲平面

上半平面

$$\{(x,y)|y>0\}$$

の (微分可能な) 曲線 $\gamma(t)=(x(t),y(t)), a\leq t\leq b$ の長さ $|\gamma|$ を次で定義する

$$|\gamma|=\int_a^b \frac{\sqrt{x'^2+y'^2}}{y}dt$$

上半平面の二点間の距離,d, を、二点を結ぶ最短線の長さと定義すると (完備な) 距離空間になる。これを双曲平面 (hyperbolic plane) と呼び、$\mathbb{H}^2$ と書く。二点間の距離を実現する最短線を測地線と呼ぶ。

以下、双曲平面についてこのノートに関連する事項を書く (例えば [深谷] を参照せよ)。

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ の元 $g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は次のように一次分数変換で双曲平面に等長変換として作用する。

$$x+iy\mapsto \frac{a(x+iy)+b}{c(x+iy)+d}$$

ただし、上半平面の点 (x,y) と複素数 $x+iy$ を同一視した。実は、次が成り立つ。ただし、左辺は双曲平面の向きを保つ等長変換の全体がなす群である。

$$\mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}^2)=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\pm\mathrm{I}=\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$$

双曲平面で半径 r の円の円周の長さは $2\pi\sinh r$, 面積は $2\pi(\cosh r-1)$ である。これらは、ユークリッド平面での半径 r の円より、どちらも大きくなっている。

Δ を三辺が測地線からなる測地三角形とする。3 つの内角を a,b,c とすれば、ガウス・ボンネの定理より、

$$\pi-a-b-c=-\int K dv.$$

ここで、K は断面曲率で, dv は面積要素である。ただし、双曲平面の点 (x,y) における面積要素は、ユークリッド平面における面積要素の $\frac{1}{y^2}$ 倍である。長さが、$\frac{1}{y}$ であるからである。双曲平面では $K=-1$ なので、右辺は Δ の面積に等しい。従って Δ の面積 は π 未満. よって Δ の内接円の半径 r について $r<1$ (ユークリッド平面なら $r<1$ は明らかだが、 双曲平面では同一半径の円の面積は, ユークリッド平面でより大きくなるのでよい)。これより、Δ の任意の一辺は、他の二辺の和集合の 2-近傍に含まれる。

双曲平面についてもう一つ公式を書いておく。γ を無限測地線とし、p を測地線への射影とする。すなわち、双曲平面の点 A にたいして、$p(A)\in\gamma$ は

$d(A, p(A)) = d(A, \gamma)$ となるただ一つの点である。定数 $L > 0$ にたいして、γ からの距離が L の点の集合は二つの曲線だが、そのうちの一つを N_L としよう。N_L 上の有限区間 α の端点を A, B とすると、α の長さ $|\alpha|$ について次が成立する。

$$|\alpha| = d(p(A), p(B)) \cosh L$$

双曲平面に関する重要な事実として、それが曲面の普遍被覆になっていることがある。Σ_g を種数が $g > 1$ の向き付けられた閉曲面とする。このとき、各 Σ_g にあるリーマン計量が存在し、そのリーマン普遍被覆空間は双曲平面に等長になる。言い換えると、$\Gamma_g = \pi_1(\Sigma_g)$ にたいして、離散部分群

$$\Gamma < \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$$

で、$\Gamma_g \simeq \Gamma$ となるものがあり、$\mathbb{H}^2/\Gamma$ と Σ_g が同相になる。

1.2 双曲性

定義 1.1 (X, d) を完備距離空間とする。連結な区間 $I \subset \mathbb{R}$ から X への連続写像 $f : I \to X$ を道 (path) とよぶ。このノートでは、とくに断らない限り、道は道に沿った長さ (弧長) でパラメタライズされているとする。f がすべての $t, s \in I$ について

$$|t - s| = d(f(t), f(s))$$

をみたすとき、f またはその像を測地線 (geodesic) という。すべての $x, y \in X$ に対し、x と y を結ぶ測地線が存在する時、X を測地空間 (geodesic space) という。

補足 1.1 道の定義で写像 f の連続性を仮定しない流儀もある。理由は、後で擬測地線を定義するとき、写像の連続性を仮定できないからである。そのような場合でも測地線の定義は上のままである。

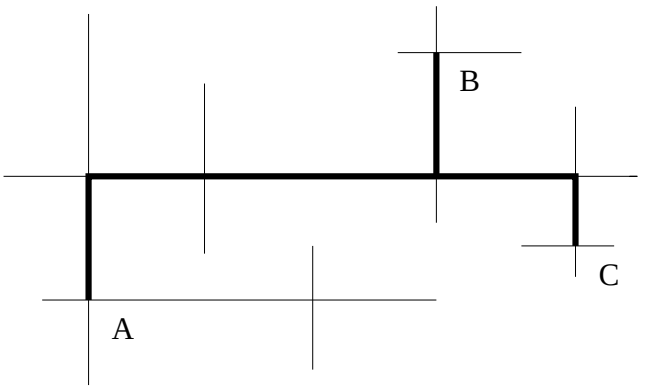
以下 (X, d) は測地空間とする。

定義 1.2 $\triangle$ を X の測地三角形とする。すなわち、$\triangle$ の三辺 α、β、γ が測地線とする。ある $\delta \geq 0$ が存在して

$$\alpha \subset N_\delta(\beta \cup \gamma), \beta \subset N_\delta(\gamma \cup \alpha), \gamma \subset N_\delta(\alpha \cup \beta)$$

をみたすとき $\triangle$ を $\delta -$ **thin** *(δ-細い)* という。(文献によっては *δ-thin* ともいう)。ただし、N_δ は $\delta-$ 近傍を表す。

定義 1.3 ある $\delta \geq 0$ が存在して、X のすべての測地三角形が δ - thin なとき、X を $\delta-$ 双曲的 *(δ -hyperbolic)* という。ある $\delta \geq 0$ に対し δ-双曲的なとき、*(Gromov* の意味で*)* 双曲的 *(Gromov-hyperbolic)* という。



ツリー (単連結なグラフのこと) は、各辺の長さを 1 とすることで測地空間になるが、これは ($0-$) 双曲的である

図 1: ツリーの測地三角形

例 **1.1** 連結なグラフで各辺の長さを *1* とすると、グラフに測地距離が定まる。すなわち、二点間の距離を、二点を結ぶ最短の道の長さと定義する。単連結で連結なグラフをツリー *(tree)* とよぶ。ツリーは、($0-$) 双曲的である (図 1)。

補足 **1.2** 実は、0-双曲的な測地空間は $\mathbb{R}$-ツリーとよばれる、単体的なツリーを一般化した空間である。

例 **1.2** 双曲平面 $\mathbb{H}^2$ の任意の測地三角形が 2-細いことは既に述べた *(1.1* 章*).* 従って、$\mathbb{H}^2$ は 2-双曲的である。

双曲平面の高次元版として、各次元 $n > 1$ に n 次元の双曲空間 $\mathbb{H}^n$ が存在する。これらも 2-双曲的である。これは、$\mathbb{H}^n$ の任意の *3* 点に対して、それを含む部分空間で双曲平面に等長なものが存在することから分かる。

より一般に、M を完備で単連結な n-次元多様体で、ある定数 $c < 0$ が存在して、M の断面曲率 K がいたるところ $K \leq c$ を満たすなら、M は双曲的である。さらに、$\mathrm{CAT}(c)$ 空間 *([BriHae]* を参照せよ) と呼ばれる、負曲率多様体を測地空間に一般化したような空間も双曲的である (図 2) *.*

非正断面曲率を持つリーマン多様体の重要な例として局所対称空間がある。*[BriHae]* を参照せよ。X が完備なリーマン多様体で各点 $x \in X$ に対して次を満たす等長変換 f_x が存在するとき、X を対称空間 *(symmetric space)* という。

$$f_x(x) = x,\ Df_x|_{T_xX} = -1.$$

明らかな例として、ユークリッド空間、双曲空間、球面は対称空間である。

普遍被覆空間が対称空間である場合、局所対称空間と呼ぶ。

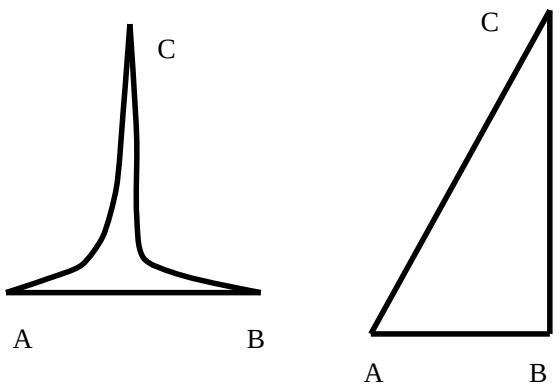


図 2: $\mathbb{H}^n$ と $\mathbb{R}^n$ の測地三角形。 $n \geq 2$.

対称空間 X がコンパクトでなく、リーマン多様体として、$Y \times \mathbb{R}$ に等長的でないとき、*non-compact* 型と呼ぶ。上の例で *2* 次元以上の双曲空間は *non-compact* 型である。

X が対称空間のとき、任意の二点 $x, y \in X$ にたいして、ある等長変換 f が存在して $f(x) = y$ となる。実際、x, y を結ぶ測地線の中点を m とすると、$f_m(x) = y$ である。このように、等長変換群が推移的に作用する空間を均質空間 *(homogeneous space)* と呼ぶ。X の等長変換群の単位元の連結成分を $\mathrm{Isom}_0(X)$ と書く。これは半単純なリー群になることが知られている。

Cartan らの仕事にはじまり、対称空間は分類されている。*non-compact* 型の対称空間の断面曲率は非正である。

non-compact 型の対称空間 X について、次が成り立つような最大の $k \geq 1$ をランクと呼ぶ。

X の任意の無限測地線 γ にたいして、X の測地的な部分集合で k-次元ユークリッド空間に等長であり、測地線 γ を含むものが存在する。

ランクが *1* の場合、断面曲率は一様に負であり、したがって δ-双曲的である。たとえば、双曲空間のランクは *1* である。

例 **1.3** 次元が *2* 以上の Euclid 空間は双曲的でない (図 2)。たとえば、これはどのような $\delta > 0$ に対しても、十分大きな直角二等辺三角形を考えれば、δ-細くないことから明らかである。次元が *1* の場合は、例 *1.1* より双曲的。

1.3 擬測地線

次は明らかである (双曲性の定義で, 二角形も三角形の特別な場合と考える).

命題 **1.1** X を $\delta-$ 双曲空間とする。測地線 α、β が同じ始点と同じ終点を持

てば次が成り立つ。

$$\alpha \subset N_\delta(\beta), \beta \subset N_\delta(\alpha).$$

補足 **1.3** この命題は 2δ 近傍を考えれば二つの測地線が無限測地線でもなりたつ。その場合は、二つの測地線の端点が等しいという仮定を、空間の理想境界での端点が等しいと解釈する。理想境界については後で扱う *(1.6* 章*).* 実際、次の事実が成り立つ :「α, β を無限測地線とする。ある C が存在して

$$\beta \subset N_C(\alpha)$$

なら実は

$$\beta \subset N_{2\delta}(\alpha)$$

となる」

記法 **1.1** X の *2* 点 A、B に対し、A から B への任意の測地線を $[A, B]$ とかく。

命題 **1.2** X を　$\delta-$ 双曲空間とする。A、B、C を X の点とする。この時、測地線 $[B, C]$、$[A, C]$、$[A, B]$ 上にそれぞれ点 A'、B'、C' が存在し次を満たす。

$$d(A', B'), d(B', C'), d(C', A') \leq 4\delta.$$

証明　$A' \in [B, C]$、$B' \in [A, C]$、$C' \in [A, B]$ を次を満たす 3 点とする。このような点の存在は三角不等式からよい。

$$d(B, C') = d(B, A'),\ d(A, C') = d(A, B'),\ d(C, A') = d(C, B').$$

これが求める A'、B'、C' であることを示す。$[B, C]$、$[A, C]$、$[A, B]$ は δ -thin な三角形を作るから $[A, C]$ 又は $[B, C]$ 上の点 P で $d(C', P) \leq \delta$ となるものがある。$P \in [A, C]$ と仮定しても一般性を失わない。このとき、$d(P, B') \leq \delta$ である。なぜなら、もしちがうと $d(A, C') < d(A, B')$ となるからである。よって $d(B', C') \leq 2\delta$. 又、一般性を失うことなく $Q \in [A, B]$ が存在して $d(A', Q) \leq \delta$、$d(Q, C') \leq \delta$ としてよい。よって $d(A', C') \leq 2\delta$.　よって $d(A', B') \leq 4\delta$. 図 3。 ∎

補題 **1.1** γ を δ- 双曲空間 X の測地線とする。$l \geq 6\delta$ とする。$P, Q \in X \backslash N_l(\gamma)$ に対し $P', Q' \in \gamma$ を

$$\begin{aligned} d(P, P') &= d(P, \gamma) \\ d(Q, Q') &= d(Q, \gamma) \end{aligned}$$

をみたす点とする。もし、$d(P, Q) < l - 4\delta$ なら $d(P', Q') \leq 8\delta$。

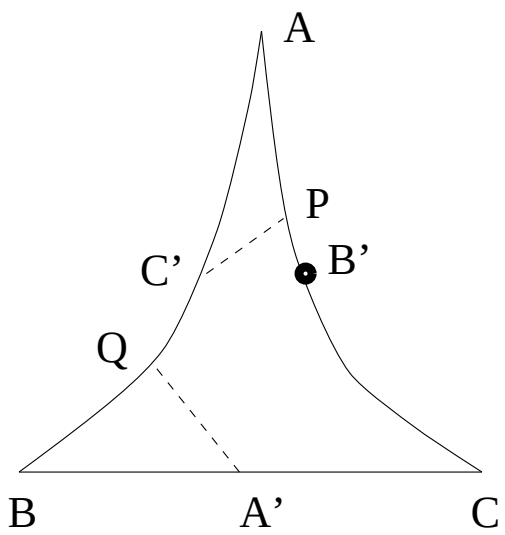


図 3: $d(A', Q), d(Q, C'), d(C', P), d(P, B') \leq \delta$

証明　まず $\delta > 0$ と仮定して議論する。$S \in [Q, Q']$ を $d(S, Q') = 2\delta$ となる点とする。三角形 (Q, P', Q') は δ -thin だから、$T \in [Q, P'] \cup [P', Q']$ が存在して $d(S, T) \leq \delta$ をみたす。このとき実は $T \in [Q, P']$ である。なぜなら、矛盾を導くために $T \in [P', Q']$ としてみる。このとき $[P', Q'] \subset \gamma$ と仮定してよい。すると、

$$d(Q, \gamma) \leq d(Q, T) \leq d(Q, S) + d(S, T) < d(Q, S) + d(S, Q') = d(Q, Q').$$

これは Q' のとり方に矛盾。よって $T \in [Q, P']$。さて、三角形 PQP' は δ -thin だから、$U \in [P', P] \cup [P, Q]$ が存在して $d(T, U) \leq \delta$ である。このとき実は $U \in [P, P']$ である。なぜなら、もし $U \in [P, Q]$ なら、

$$\begin{aligned} d(Q', Q) &\leq d(Q', S) + d(S, T) + d(T, U) + d(U, Q) \\ &\leq 2\delta + \delta + \delta + d(P, Q) \\ &< l. \end{aligned}$$

これは矛盾、よって $U \in [P, P']$。更に、$d(P', U) \leq d(Q', U)$ である。なぜなら、もし $d(P', U) > d(U, Q')$ なら $d(P, P') > d(P, Q')$ となり P' のとり方に矛盾するから。よって

$$\begin{aligned} d(P', Q') &\leq d(P', U) + d(Q', U) \\ &\leq 2d(U, Q') \\ &\leq 8\delta. \end{aligned}$$

図 4 を見よ。

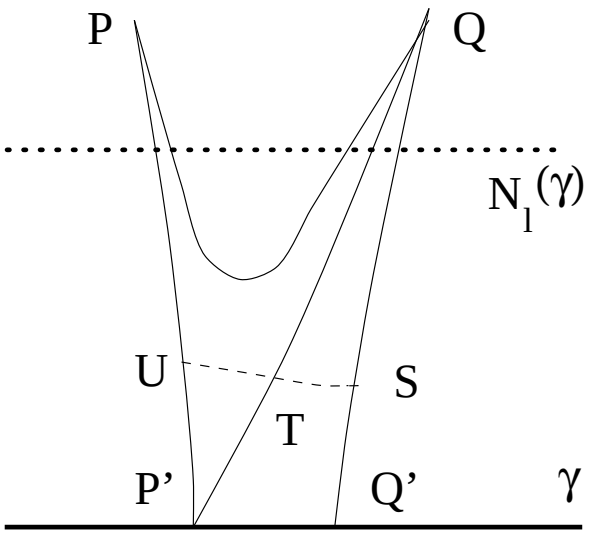


図 4: $d(U,T), d(T,S) \leq \delta, d(S,Q') = 2\delta$. 測地線 γ への射影は、距離を著しく縮める。

最後に、$\delta = 0$ の場合であるが、$\lim_i \delta_i = 0$ となる正の数列 $\{\delta_i\}_i$ をとって、上の議論を適用すればよい。 ∎

補足 **1.4** 補足 *1.2* により、$\delta = 0$ の場合はより直接的な議論が可能である。

定義 **1.4** α を道とする。ある定数 $K \geq 1$、$\varepsilon \geq 0$ が存在して

$$|t-s| \leq Kd(\alpha(t), \alpha(s)) + \varepsilon$$

がすべての t、s について成りたつとき、α を $(K,\varepsilon)-$ 擬測地線 *((K,ε)-quasi-geodesic)* という。(α は弧長でパラメタライスされているので、$d(\alpha(t), \alpha(s)) \leq |t-s|$ である)。

補足 **1.5** 連続とは限らない写像 α について、次が成立するとき擬測地線と呼ぶ定義もある。

$$|t-s|/K - \epsilon \leq d(\alpha(t), \alpha(s)) \leq K|t-s| + \epsilon.$$

命題 **1.3** X を $\delta-$ 双曲空間とし、α を $(K,\varepsilon)-$ 擬測地線とする。δ、K、ε だけによる定数 $C(\delta, K, \varepsilon) \geq 0$ が存在して次が成り立つ (実際 $C = 6(10K\delta + 30K^2\delta + \varepsilon)$ とすればよい)。α と同じ始点、同じ終点をもつ測地線 γ について次が成立する。

$$\alpha \subset N_C(\gamma), \gamma \subset N_C(\alpha).$$

ただしここでは α の始点と終点は X の点と仮定する。

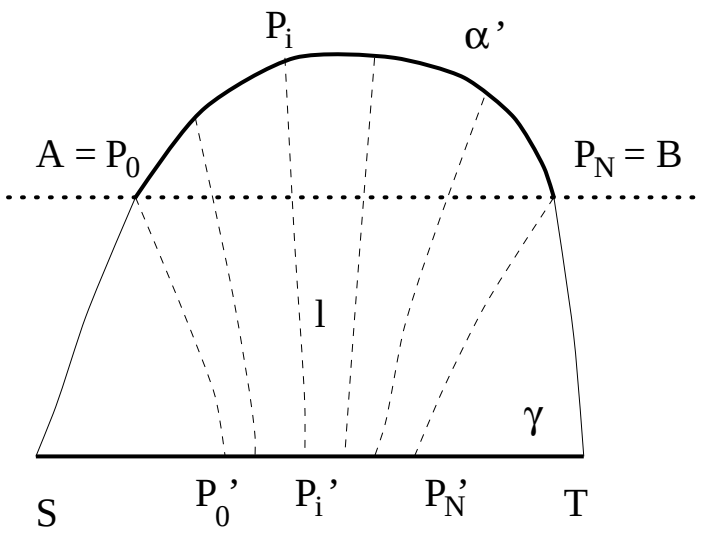


図 5: 測地線 γ の近傍から出た擬測地線 α' は、ほどなく戻ってくる

証明　$\delta > 0$ と仮定してよい。α の始点を $S \in X$、終点を $T \in X$ とし、$\gamma = [S,T]$ とする。$l = 30K\delta$ とし $N_l(\gamma)$ を考える。$\alpha \cap (X \setminus N_l(\gamma))$ の任意の連結成分を α' と書く。もし、こんな α' がなければ、$l = 30K\delta$ とし証明が終わっていることに注意。α' の始点を A、終点を B とする。さて、α' を点

$$A = P_0 = \alpha(t_0), P_1 = \alpha(t_1), \cdots, P_i = \alpha(t_i), \cdots, P_N = \alpha(t_N) = B$$

で次を満たすように分割する。図 5 。

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_N$$
$$\frac{l}{2} - 2\delta \leq |t_i - t_{i-1}| < l - 4\delta.$$

ここで $l = 30K\delta \geq 30\delta$ に注意。$P_i' \in \gamma$ を P_i と γ の距離を実現する点とする。$d(P_i, P_{i-1}) \leq |t_i - t_{i-1}| < l - 4\delta$ だから、補題 1.1 より $d(P_i', P_{i-1}') \leq 8\delta$. よって

$$\begin{aligned} d(P_0, P_N) &\leq d(P_0, P_0') + \sum_{i=1}^{N} d(P_i', P_{i-1}') + d(P_N', P_N) \\ &\leq 2l + 8N\delta. \end{aligned}$$

また、α' は $(K, \varepsilon)-$ 擬測地線だから

$$|t_N - t_0| \leq K d(P_0, P_N) + \varepsilon.$$

又、

$$\left(\frac{l}{2} - 2\delta\right) N \leq |t_N - t_0|$$

より

$$\left(\frac{l}{2}-2\delta\right)N \leq K(2l+8N\delta)+\varepsilon.$$

従って

$$N\left(\frac{l}{2}-2\delta-8K\delta\right) \leq 2Kl+\varepsilon.$$

一方、$l=30K\delta$ だから

$$\frac{l}{2}-2\delta-8K\delta \geq 5K\delta > 0.$$

よって

$$N \leq \frac{60K^2\delta+\varepsilon}{5K\delta}.$$

以上より

$$\begin{aligned} |\alpha'| &\leq (l-4\delta)N \\ &\leq lN \\ &\leq 6(60K^2\delta+\varepsilon). \end{aligned}$$

よって $C_1 = l + \frac{6(60K^2\delta+\varepsilon)}{2} = 30K\delta + 3(30K^2\delta+\varepsilon)$ とすれば、$\alpha \subset N_{C_1}(\gamma)$。実は $\gamma \subset N_{2C_1}(\alpha)$ である。これを背理法で示すためにある $x \in \gamma$ に対し、$x \notin N_{2C_1}(\alpha)$ としてみる。すなわち $\alpha \cap N_{2C_1}(x) = \phi$. ところで、$\gamma$ は測地線だから S と T は $N_{C_1}(\gamma) \setminus N_{2C_1}(x)$ の異なる連結成分に含まれる。これは $\alpha \subset N_{C_1}(\gamma) \setminus N_{2C_1}(x)$ に矛盾。よって $\gamma \subset N_{2C_1}(\alpha)$. 以上より $C = 2C_1$ とすればよい。 ∎

補足 **1.6** この証明では、擬測地線が連続であることを使っている。擬測地線の定義で連続性を仮定しない場合があることはすでに述べた (補足 *1.5)*. その場合でも、この命題の主張は正しい。証明は、連続とは限らない擬測地線が、*(*弧長でパラメタライズされた) 連続な擬測地線で近似できることを使えばよい。実際、次が成立する。

「K, ϵ にたいして、ある K', ϵ', D が存在して次が成立 : 任意の連続とは限らない (K, ϵ)-擬測地線に対して、弧長でパラメタライズされた連続な (K', ϵ')-擬測地線が存在して、それらは互いに D-近傍に含まれる」

注意 **1.1** 命題 *1.3* は $\mathbb{R}^2$ で成り立たない。例えば $(0,0)$ と (N,N) を結ぶ道 α を $(0,N)$ を経由する最短線 (*2* つの直線の和) とすると、α は $(2,0)-$ 擬測地線であるが、$(0,0)$ と (N,N) を結ぶ測地線 γ について $d(\alpha,\gamma) = \frac{N}{\sqrt{2}}$ である。

命題 *1.3* で述べられている現象は *quasi-geodesic* の *stability* と呼ばれることがある。また、リーマン幾何で、「モースの補題」とも呼ばれる。この現象は*,* 双曲空間において、「局所的に *quasi-geodesic* な道が、全体として *quasi-geodesic* になっている」という重要な帰結を持ち*,* これは、「双曲群」(2 章) が「オートマチック群」*([BriHae])* であることの理由の一つである。実際*,*

次が正しい (これは、ユークリッド平面では成立しない) .
X を δ-*hyperbolic* とする。任意の定数 $K \geq 1, \varepsilon \geq 0$ に対して, ある定数 $l(\delta, K, \varepsilon) > 0, K'(\delta, K, \varepsilon) \geq 1, \varepsilon'(\delta, K, \varepsilon) \geq 0$ が存在して次を満たす*:* 道 γ について、その任意の連結部分で, 長さが少なくとも l あるものが、(K, ε)-*quasi-geodesic* なら、γ は (K', ε')-*quasi-geodesic.*

系 **1.1** X を δ-*hyperbolic* とする。任意の定数 $K \geq 1, \epsilon \geq 0$ に対して, ある定数 $D(K, \epsilon, \delta)$ が存在して次を満たす : X の三角形 Δ の各辺が (K, ϵ) -*quasi-geodesic* なら Δ は D-*thin.*

(証明) Δ の頂点を A, B, C とする。前の命題より、Δ の各辺は対応する測地線 $[A, B], [B, C], [C, A]$ と, お互いに $C(K, \epsilon, \delta)$-近傍にある。一方, 測地三角形 $([A, B], [B, C], [C, A])$ は δ-thin より、Δ は $(\delta + 2C)$-thin である. ∎

1.4 擬等長写像

定義 **1.5** (X, d)、(X', d') を距離空間とする。写像

$$f : X \to X'$$
$$f' : X' \to X$$

とある定数 K、ε、$D \geq 0$ が存在して、次をみたすとき、f と f' は擬等長写像 *(quasi-isometry)*、X と X' は擬等長的 *(quasi-isometric)* という。記号を簡単にするために、距離 $d(x, y)$ を $|x - y|$ などと書く.

すべての $x, y \in X$ と $x', y' \in X'$ に対して

$$|x - y| \leq K|f(x) - f(y)| + \varepsilon$$
$$|f' \circ f(x) - x| \leq D$$
$$|x' - y'| \leq K|f'(x') - f'(y')| + \varepsilon$$
$$|f \circ f'(x') - x'| \leq D$$

注意 **1.2** 上で、f と f' は連続とは仮定しない。f, f' は厳密には逆写像をもたないが、およそ、互いに逆写像の関係である。

例 **1.4** $\mathbb{R}^2$ の中の整数の組よりなる格子点集合を $\mathbb{Z}^2$ とかき、$\mathbb{Z}^2$ に $\mathbb{R}^2$ から誘導される距離を考えると、$\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{Z}^2$ は擬等長的である。

定理 **1.1** (X, d) と (X', d') を、擬等長的な測地空間とする。X' が双曲的なら X も双曲的である。

証明　定義 1.5 の記号をそのまま使う。$\gamma(t)$ を X の道とする。(無限でも有限でもよい)。一般に f は連続でないから, $f(\gamma)$ は道ではない (またパラメータ t も弧長にはならない)。よって、離散化し, $f(\gamma)$ を近似する道 $\gamma' : \mathbb{R} \to X'$ を次のように定義. まず、$n \in \mathbb{Z}, \gamma'(n) = f(\gamma(n))$ とし、それらの点を一定速度の測地線で結ぶ.

$$\gamma' = \cup_{n\in\mathbb{Z}}[f(\gamma(n)), f(\gamma(n+1))].$$

このとき、

$$f(\gamma) \subset N_{K+\epsilon}(\gamma'), \gamma' \subset N_{K+\epsilon}(f(\gamma)).$$

$K' = K(K+\epsilon), \epsilon' = 2K+3\epsilon$ とする. このとき、γ' は (K', ϵ')-quasi-geodesic である。実際, 任意の $t, s \in \mathbb{Z}$ について、

$$|t-s| = |\gamma(t) - \gamma(s)| \leq K|f(\gamma(t)) - f(\gamma(s))| + \epsilon = K|\gamma'(t) - \gamma'(s)| + \epsilon.$$

γ' の 弧長パラメータ τ を, パラメータ t の関数 $\tau(t)$ と考えると, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$|\gamma'(n) - \gamma'(n+1)| \leq K + \epsilon$$

より, 任意の $t, s \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$|\tau(t) - \tau(s)| \leq (K+\epsilon)|t-s|.$$

ここで, $\tau(t) = \tau, \tau(s) = \sigma$ と置き, 得られている不等式に代入すると、任意の $\tau = t(n), \sigma = t(m), (n, m \in \mathbb{Z})$ について、

$$|\tau - \sigma|/(K+\epsilon) \leq |t-s| \leq K|\gamma'(\tau) - \gamma'(\sigma)| + \epsilon.$$

よって、

$$|\tau - \sigma| \leq K(K+\epsilon)|\gamma'(\tau) - \gamma'(\sigma)| + \epsilon.$$

道 γ' の定義の仕方より、一般の τ, σ については次が成立.

$$|\tau - \sigma| \leq K(K+\epsilon)|\gamma'(\tau) - \gamma'(\sigma)| + \epsilon + 2(K+\epsilon).$$

上の議論で、γ に端点があるとき、γ と γ' の端点を共通にとることができることに注意.

さて、これを使って定理の証明をする。X' の双曲定数を $\delta' \geq 0$ とする。ある $\delta \geq 0$ が存在して X のすべての測地三角形が δ-thin であることを示せばよい。まず、上の結果より、X の任意の測地三角形 $\Delta = (\alpha, \beta, \gamma)$ に対して, 対応する X' の三角形 $\Delta' = (\alpha', \beta', \gamma')$ は (K', ϵ')-quasi-geodesic 三角形である。ところが X' は δ'-hyperbolic なので、系 1.1 より Δ' は $C = D(K', \epsilon', \delta')$-thin である。よって、その $(K+\epsilon)$-近傍にある「三角形」$f(\Delta)$ は $(C+2(K+\epsilon))$-thin である。従って,「三角形」$f'f(\Delta)$ は $(K(C+2(K+\epsilon))+\epsilon)$-thin. よって、その D-近傍にある三角形 $\Delta = (\alpha, \beta, \gamma)$ は $\delta = (K(C+2(K+\epsilon))+\epsilon+2D)$-thin である. ∎

補足 **1.7** この定理の証明において、擬測地線の定義で連続性を仮定しなければ (補足 *1.5),* 議論が著しく容易になる。測地線の擬等長写像による像が、(連続ではない) 擬測地線になるからである。

1.5 擬凸部分空間

定義 **1.6** (X,d) を測地空間とする。X の部分集合 S に対して、$C \geq 0$ が存在して、任意の $x,y \in S$ と x と y を結ぶすべての測地線 γ に対して

$$\gamma \subset N_C(S)$$

が成り立つとき、S は擬凸 *(quasi-convex)* であるという。

例 **1.5** リーマン多様体の全測地的な部分多様体は擬凸である。

例 **1.6** $\mathbb{R}^2$ 中、$xy=0$ で定義される図形は擬凸でない。

測地空間 (X,d) の弧状連結な部分集合 S には自然に (擬) 測地距離 d' が定義される。

定理 **1.2** 測地空間 (X,d) の弧状連結な部分集合 S 上の (擬) 測地距離を d' とする。もし (X,d) が双曲的で S が擬凸なら、(S,d') も双曲的である。

証明　定義に従って確かめればよい。(S,d') の (擬) 測地三角形 $\triangle$ に対し、S の擬凸定数の範囲で近似するような (X,d) の測地三角形 $\triangle'$ をとると、$\triangle'$ は thin だから、$\triangle$ も thin だと結論できる。詳細略。 ∎

注意 **1.3** 群と部分群への応用が重要。

1.6 双曲空間の境界

この章の目的は双曲空間 X の境界 ∂X を定義し、そこに位相を入れることである。方法は [Gr] による。詳細は [Sh] による。

(X,d) を距離空間とし、$x_0 \in X$ を基点とする。$x,y \in X$ に対して

$$(x \cdot y)_{x_0} = \frac{1}{2}\{d(x,x_0)+d(y,x_0)-d(x,y)\}$$

と定義し、x と y の **Gromov** 積 (Gromov product) とよぶ。図 6 。

定義 **1.7** 点列 $\{a_i\} \subset X$ が

$$\lim_{i,j\to\infty}(a_i \cdot a_j) = \infty$$

をみたすとき、無限遠に収束するという。

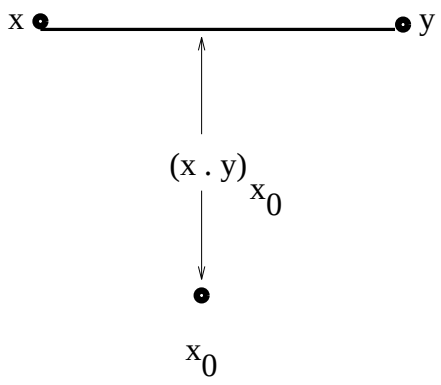


図 6: 双曲空間での Gromov 積の意味

注意 1.4 $|(x\cdot y)_{x_0}-(x\cdot y)_{x_1}|\leq d(x_0,x_1)$ だから、この定義は基点のとり方によらない。

注意 1.5 $(x\cdot y)_{x_0}\leq \min\{d(x,x_0),d(y,x_0)\}$ だから $\{a_i\}$ が無限遠に収束すれば $\lim_{i\to\infty} d(x_0,a_i)=\infty$

定義 1.8 $S_\infty(X)=\{$ 無限遠に収束する点列 $\{a_i\}\}$ とし、そこに関係 R を次のように定める。

$$\{a_i\}R\{b_i\}\Longleftrightarrow \lim_{i\to\infty}(a_i\cdot b_i)=\infty$$

注意 1.6 関係 R は基点によらない。

注意 1.7 $\{a_i\}R\{a_i\}$ は明らか。

注意 1.8 $\{a_i\}R\{b_i\}\Longrightarrow\{b_i\}R\{a_i\}$

注意 1.9 R は必ずしも推移的でない。例えば $X=\Gamma(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z};x^{\pm1},y^{\pm1})$ とする。$x_0=1$ とし、$a_n=x^n,b_n=y^n,c_n=x^ny^n$ とすれば、$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}\in S_\infty(X).\ (a_n\cdot b_n)=n,(b_n,c_n)=n,(a_n,b_n)=0.$ よって $\{a_n\}R\{b_n\}$ かつ $\{c_n\}R\{b_n\}$ だが $\{a_n\}R\{b_n\}$ ではない。

さて目標は X が双曲的なら関係 R は推移的であることを示すことである。

命題 1.4 X が $\delta-$ 双曲的なら、すべての $x,y,z\in X$ に対して

$$(x\cdot y)\geq \min\{(x\cdot z),(y\cdot z)\}-27\delta.$$

証明 X は $\delta-$ 双曲的とする。図 7。$x,y\in X$ にたいして δ - thin な三角形 x_0,x,y を考える。命題 1.2 より $A\in[x,y],B\in[x_0,y],C\in[x,y]$ が存在して

$$d(A,B),d(A,C),d(B,C)\leq 4\delta.$$

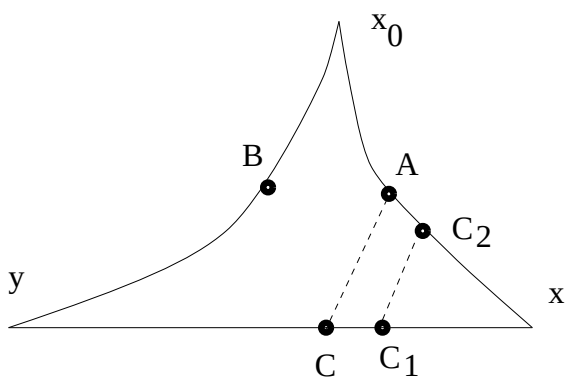


図 7: 命題 1.4 のための図

まず $d(x_0,[x,y]) \geq d(x_0,C) - 10\delta$ を示す。x_0 と $[x,y]$ の距離を実現する点を $C_1 \in [x,y]$ とする。すなわち

$$d(x_0,[x,y]) = d(x_0,C_1).$$

一般性を失うことなく、$C_1 \in [C,x]$ としてよい。三角形 xAC は δ - thin だから、$C_2 \in [A,x] \cup [A,C]$ が存在して、 $d(C_1,C_2) \leq \delta$ をみたす。このとき $d(C_2,A) \leq 5\delta$ が成り立つ。なぜなら、もし $C_2 \in [A,C]$ なら明らか。よって $C_2 \in [A,x]$ とする。$d(C_2,A) > 5\delta$ として矛盾を導く。 まず、次に注意。

$$d(x_0,C_1) \geq d(x_0,C_2) - \delta > d(x_0,A) + 4\delta.$$

ところが $d(x_0,C) \leq d(x_0,A) + 4\delta$ だから、

$$d(x_0,C_1) > d(x_0,C).$$

これは、矛盾。よって、$d(C_2,A) \leq 5\delta$ がわかった。従って $d(C,C_1) \leq 10\delta$. よって

$$d(x_0,[x,y]) \geq d(x_0,C) - 10\delta.$$

次も容易にわかる。

$$|(x \cdot y) - d(x_0,C)| \leq 8\delta.$$

上の 2 式から、

$$d(x_0,[x,y]) \geq (x \cdot y) - 18\delta.$$

さて $z \in X$ とする。三角形 xyz は δ- thin だから、

$$d(x_0,C) \geq \min\{d(x_0,[x,z]), d(x_0,[y,z])\} - \delta$$

である。よって、

$$\begin{aligned}(x\cdot y) &\geq d(x_0,C)-8\delta\\ &\geq \min\{d(x_0,[x,z]),d(x_0,[y,z])\}-9\delta\\ &\geq \min\{(x\cdot z),(y\cdot z)\}-27\delta\end{aligned}$$

∎

ここでは証明はしないが実は逆も正しい。すなわち、

命題 1.5 ある $\delta \geq 0$ が存在してすべての $x,y,z \in X$ に対して $(x\cdot y) \geq \min\{(x\cdot z),(y\cdot z)\}-\delta$ なら、X は双曲的。

命題 1.4 と 1.5 より

定理 1.3 X は双曲的 $\Longleftrightarrow$ ある $\delta \geq 0$ が存在して、すべての $x,y,z,\in X$ に対して $(x\cdot y) \geq \min\{(x\cdot z),(y\cdot z)\}-\delta$

命題 1.6 X が双曲的なら R は推移的である。

証明　命題 1.4 より $\delta \geq 0$ が存在して

$$(x\cdot y) \geq \min\{(x\cdot z),(y\cdot z)\}-\delta$$

である。$\{a_i\},\{b_i\},\{c_i\} \in S_\infty(X)$ に対して $\{a_i\}R\{b_i\}$ かつ $\{b_i\}R\{c_i\}$ なら

$$(a_i\cdot c_i) \geq \min\{(a_i\cdot b_i),(b_i\cdot c_i)\}-\delta$$

であるから、$\{a_i\}R\{c_i\}$ を得る。 ∎

定義 1.9 X を双曲空間とする。$S_\infty(X)$ の同値関係 R を使って X の (理想) 境界 *(ideal boundary)*, ∂X, を

$$\partial X = S_\infty(X)/R$$

と定義する。$\{a_i\} \in S_\infty(X)$ の属する同値類 $x \in \partial X$ に対し、

$$\lim_{i\to\infty} a_i = x$$

とかく。$\overline{X} = X \cup \partial X$ とかく。

注意 1.10 X の (無限) 測地線 α,β に次が成り立つとき、$\alpha \sim \beta$ と書き、二つの測地線は *asymptotic* であると言う。

$$\sup_{t\to\infty} d(\alpha(t),\beta(t)) < \infty$$

この関係が定める同値類を測地線の漸近類 *(asymptotic class)* と呼ぶ。

X の点 x を任意に固定する。x を基点とする無限測地線 α の定める *asymptotic class* を $[\alpha]$ と書く。それら全体のなす集合 $\{[\alpha]\}$ に適当な位相を入れることにより X の境界の同値な定義を得ることができる。これは基点 x に依存しない。実際、無限遠に収束する点列 $\{a_i\}$ は自然にある $[\alpha]$ を定める。ここで α は x を基点とするある測地線である。

例 **1.7** $\partial\mathbb{H}^n = S^{n-1}$ である。

Gromov 積を $\overline{X}$ に次のように拡張する。

定義 **1.10** $x, y \in \overline{X}$ に対し

$$(x \cdot y)_S = \inf\{\liminf_{i\to\infty}(x_i \cdot y_i)\}.$$

ただし、inf は $\lim_i x_i = x, \lim_i y_i = y$ をみたすすべての $\{x_i\}, \{y_i\}$ に関するもの。もし、$x \in X$ なら $\lim_i x_i = x$ は X の距離に関する収束。

命題 **1.7** *1.* $x, y \in X$ なら $(x \cdot y)_S = (x \cdot y)$

2. $x, y, z \in \overline{X}$ に対して $(x \cdot y)_S \geq \min\{(x \cdot z)_S, (z \cdot y)_S\} - 27\delta$

証明

1. $(\ \cdot\ ) : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ は X の距離について連続だから明らか。
2. 概略。まず次が示せる。$\{x_i\}, \{y_i\}, \{z_i\}$ が存在して

$$\lim_i (x_i \cdot y_i) = (x \cdot y)_S$$
$$\lim_i (x_i \cdot z_i) = (x \cdot z)_S$$
$$\lim_i (z_i \cdot y_i) = (z \cdot y)_S$$

ところが命題 1.4 より、すべての i について

$$(x_i \cdot y_i) \geq \min\{(x_i \cdot z_i), (y_i \cdot z_i)\} - 27\delta$$

だからよい。

∎

よって、以後 $(\ \cdot\ )_S$ を単に $(\ \cdot\ )$ とかく。

$$(\ \cdot\ ) : \overline{X} \times \overline{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$

さて $\overline{X}$ に位相を入れる。

定義 **1.11** $x \in X, r > 0$ に対して

$$B_r(x) = \{y \in X | d(x, y) < r\}$$

とする。$x \in \partial X, k > 0$ に対して

$$N_{x,k} = \{y \in \overline{X} | (x \cdot y) > k\}$$

とする。$\mathfrak{B} = \{B_r(x) | x \in X, r > 0\} \cup \{N_{x,k} | x \in \partial X, k > 0\}$ と定義。図 8 。

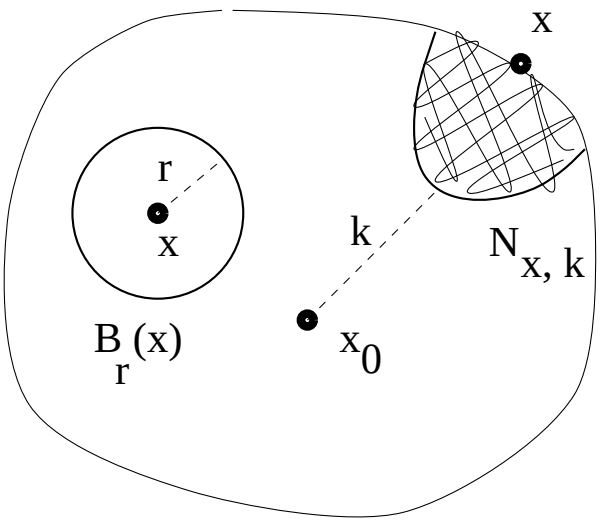


図 8: $\overline{X}$ の点 x の 近傍の定義

命題 1.8 $\mathfrak{B}$ は $\overline{X}$ に位相を定める。その位相は Gromov 積の基点のとり方によらない。

証明　定義に従って確かめればよい。略。 ∎

注意 1.11 $\mathfrak{B}$ の定める $\overline{X}$ 上の位相について

$$(\quad \cdot \quad) : \overline{X} \times \overline{X} \longrightarrow R$$

は連続とは限らない。

定理 1.4　*1.* X は $\overline{X}$ の *open dense* な部分集合である。
2. f を X の自己等長写像とする。
f は $\overline{X}$ の自己同相写像 $\overline{f}$ に一意に拡張する。
3. $\overline{X}$ はハウスドルフ

証明　すべて、$\overline{X}$ の位相の定義から従う。 ∎

注意 1.12 $\{a_i\} \in S_\infty(X)$ に対して、$x = [\{a_i\}] \in \partial X = S_\infty/R$ とすると (以前これを $\lim_i a_i = x$ とかいた) $\overline{X}$ の位相について $\{a_i\}$ は x に収束する。よってこれを再び $\lim_i a_i = x$ とかく。

2　双曲群

2.1　群の双曲性

定義 2.1 G を有限生成群とし、$S = \{s_1, \cdots, s_n\}$ を生成元の集合とする。S は対称、すなわち $\{{s_1}^{-1}, \cdots, {s_n}^{-1}\} = \{s_1, \cdots, s_n\}$ を仮定する。G の S に関する **Cayley** グラフ $\Gamma(G;S)$ とは、次のように構成される一次元単体複体のことである。まず頂点集合 V は G 自身である。次に、各元 $g \in G$ と各生成元 $s \in S$ に対し、頂点 g と頂点 gs を辺で結ぶ。S は対称だから、gs から g へも s^{-1} に対応する辺が存在するが、これらは同一視する。S は G を生成するから、Γ は連結である。

各元 $g \in G$ は Γ に次のように左から作用する。作用を明確にしたいときは、gx の代わりに $g \cdot x, g(x)$ などと書く.

$$\begin{aligned} x \in V &\longmapsto gx \in V \\ [x, xs] \in E &\longmapsto [gx, gxs] \in E \end{aligned}$$

この作用は明らかに V 上推移的である。

各辺に長さ *1* を与え Γ を測地空間とする。この距離 d_S は S に関する語距離 *(word-metric)* と呼ばれる。$g \in G$ に対して

$$|g|_S = d_S(1, g)$$

と表す。$|1|_S = 0$ である。G の Γ への作用は等長的である。すなわち

$$d_S(h_1, h_2) = d_S(gh_1, gh_2)$$

がすべての $g, h_1, h_2 \in G$ について成立。

G 上の距離 d_S は明らかに S によるが、混乱がなければ、d_S を単に d などと書く。

例 2.1 有限生成自由群の標準的な生成元に関する Cayley グラフは正規ツリーである。図 9。

例 2.2 $\mathbb{Z}^2$ の生成元 $\{x^{\pm 1}, y^{\pm 1}\}$ に関する Cayley グラフは、平面上の整数格子である。図１０。

次の命題は重要である。群 G が距離空間 X に作用しているとき、作用が非連続的 (properly discontinuous) とは 任意の点 $x \in X$ と任意の定数 $R > 0$ について次の集合が有限のことである。

$$\{g \in G | d(x, gx) < R\}$$

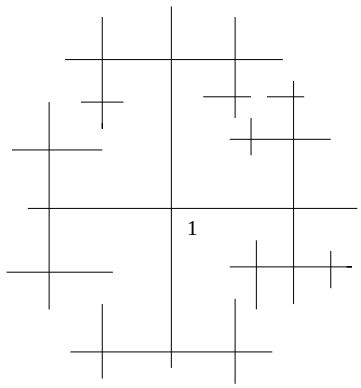


図 9: 2 階の自由群の Cayley グラフ

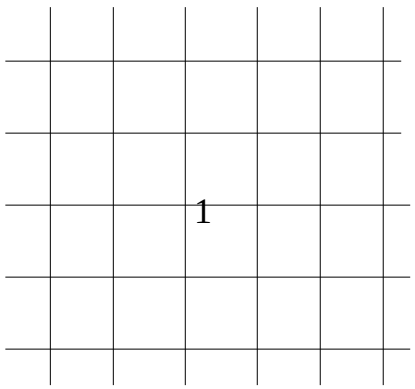


図 10: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ の Cayley グラフ

命題 **2.1** X を測地空間とする。群 G が X に等長的かつ非連続的に作用していて、X/G がコンパクトであるとする。

このとき、G は有限生成群で、その有限生成元集合 S について、X と $\Gamma(G;S)$ は擬等長的である。

特に、コンパクトなリーマン多様体 M に対し $\tilde{M}$ と $\pi_1(M)$ は擬等長的である。

証明　まず、基点 $x \in X$ をとり、オービット集合 $G(x)$ を考える。X/G がコンパクトであることから包含写像 $G(x) \hookrightarrow X$ が擬等長的であることがわかる。つぎに写像 $G \to G(x), g \mapsto gx$ が擬等長的であることを示す。詳細は略。 ∎

補足 **2.1** この命題は *Milnor* が *1968* 年に論文のなかで述べている。

命題 **2.2** G を有限生成群とする。S, S' を有限な生成元集合とする。このとき、$\Gamma(G;S)$ と $\Gamma(G;S')$ は擬等長的である。

証明　明らかに包含写像 $G \hookrightarrow \Gamma(G;S)$ は擬等長的だから、恒等写像

$$\Gamma(G;S) \supset G \longrightarrow G \subset \Gamma(G;S')$$

が擬等長的である事を示せばよい。$S = \{s_1, \cdots, s_n\}, S' = \{s'_1, \cdots, s'_m\}$ とし、S に関する距離を d、S' に関する距離を d' とし、各 $g \in G$ について $|g| = d(1,g), |g|' = d'(1,g)$ とする。G の Γ への作用は等長的、推移的だから、ある K が存在して、すべての $g \in G$ について、$\frac{1}{K}|g|' \leq |g| \leq K|g|'$ を示せば十分 ($\varepsilon = D = 0$ ととればよい)。$K_1 = \max(|s'_1|, \cdots, |s'_m|)$ とすると、明らかにすべての $g \in G$ について $|g| \leq K_1|g|'$. 同様に $K_2 = \max(|s_1|', \cdots, |s_n|')$ とすると、$|g|' \leq K_2|g|$. よって $K = \max(K_1, K_2)$ とすればよい。 ∎

定義 **2.2** (G,S) を有限生成群とする。$\delta \geq 0$ について $\Gamma(G;S)$ が $\delta-$ 双曲的のとき (G,S) 又は単に G を $\delta-$ 双曲的という。ある $\delta \geq 0$ について G が $\delta-$ 双曲的なとき、G は双曲的 *(word-hyperbolic)* という。

命題 *2.2* と定理 *1.1* から、有限生成群 G の双曲性は生成元集合 S の取り方によらないことが分かる。

注意 **2.1** (G,S) が双曲的な時、その双曲定数 δ 自体はあまり意味をもたない。実際、ある定数 C が存在して次が成り立つ。G が双曲群なら、ある生成元集合 S が存在して (G,S) は $C-$ 双曲的である。

例 **2.3** 有限生成な自由群は双曲的である。理由は、標準的な生成元についての *Cayley* グラフがツリーだからである。特に $\mathbb{Z}$ は双曲的。

例 **2.4** 有限群は双曲的である。*Cayley* グラフが有界集合であるからである。

例 **2.5** 命題 *2.1* と例 *1.2* より M を閉負曲率リーマン多様体とすると、その基本群は双曲的である。とくに、閉リーマン多様体 M が双曲計量 (断面曲率がいたるところ -1 であるリーマン計量) を持つか、より一般に、ランク *1* の局所対称空間 *([BriHae])* であればよい。

例 **2.6** 上より、種数 *2* 以上の閉曲面 Σ の基本群は双曲的。なぜなら、Σ には曲率が -1 のリーマン計量が存在するからである。

例 **2.7** $\mathbb{Z}^2$ は双曲的でない。これは、$\mathbb{Z}^2$ がユークリッド平面に擬等長であること、ユークリッド平面が双曲的でないこと、双曲性が擬等長で不変な性質であることからしたがう。

一般に G が $\mathbb{Z}^2$ を部分群として含むと G は双曲的でない (定理 *5.5* を見よ)。この事実は明らかでない事に注意。$\mathbb{Z}^2$ 自身は双曲群ではないが、$\mathbb{Z}^2$ を部分群として含むことは、双曲性にただちには矛盾しない。もし、$\mathbb{Z}^2$ が擬凸な部分群であれば、G が双曲的でないことは明らか。一般に双曲群の可換な部分群 H は, 有限群であるか、$\mathbb{Z}$ を有限指数の部分群として含む. 特に,H 位数有限の元がなければ, 単位群または $\mathbb{Z}$ に同型であることが知られている.

例えば、M をコンパクトでないが体積有限な完備な負の定曲率 3 次元多様体とする。このとき、M は有限個のカスプを持つことが知られている。カスプをすべて取り除くと、コンパクトな部分が残り、よって $\pi_1(M)$ が有限生成であることがわかる。それぞれのカスプは位相的に (トーラス) $\times [0, \infty)$ であるが、トーラスの基本群 $\mathbb{Z}^2$ が $\pi_1(M)$ の部分群となることが知られている。よって、$\pi_1(M)$ は双曲的でない。

例 **2.8** $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ は双曲的である。これは、$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ が 有限生成の自由群を有限指数の部分群で含むという事実とこれから述べる命題 *2.3* から従う. 例 *2.16* も見よ。

双曲平面 $\mathbb{H}^2$ の向きを保つ等長変換群は $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\pm 1$ に同型である (*[深谷]*). 従って、$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ は双曲平面に等長的、かつ非連続的に作用する。しかし、商空間はコンパクトでないので、これから命題 *2.1* をつかって、$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ が双曲群であることは帰結できない。

定義 **2.3** 有限生成群 (G_1, S_1) と (G_2, S_2) について $\Gamma(G_1; S_1)$ と $\Gamma(G_2; S_2)$ が擬等長的なとき、(G_1, S_1) と (G_2, S_2) は擬等長的という。このとき、生成元集合 S_1、S_2 のとり方は重要でないから、単に G_1 と G_2 は擬等長的ともいう。

命題 **2.3** G_1 と G_2 を有限生成群とする。もし、G_1 が G_2 の有限指数の部分群なら G_1 と G_2 は擬等長的である。

証明　群 G_2 の Cayley グラフを Γ_2 とする。群 G_2, よって G_1 は Γ_2 に 等長的かつ非連続的に作用している. ところが、Γ_2/G_1 は有限グラフであるから、命題 2.1 より、G_1 は Cayley グラフ Γ_2, よって 群 G_2 に擬等長的である。 ∎

例 **2.9** G を有限生成群、A を有限群とする。G と $G \times A$ は擬等長的である。

例 **2.10** $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ の指数 2 の部分群であるから $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ は擬等長的である。二つの $\mathbb{Z}$ の生成元を a, b とすれば、 部分群 $\mathbb{Z}$ は ab で生成される。

次は明らかである。

命題 **2.4** G_1 と G_2 を擬等長的な有限生成群とする。G_1 が双曲群なら G_2 も双曲的。

例 **2.11** $\mathbb{Z}$ が双曲的だから $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ も双曲的。

例 **2.12** 一般に双曲群の有限指数の有限生成な部分群は双曲的である。又、双曲群を有限指数の部分群として含む群は双曲的である。

例 **2.13** 上より、G を双曲群、A を有限群とすれば $G \times A$ も双曲群。

2.2 擬凸部分群

定義 **2.4** (G, S) を有限生成群とし、H を G の部分群とする。$\Gamma(G; S)$ の部分集合 H が擬凸のとき H を擬凸な部分群 *(quasi-convex subgroup)* という。

命題 **2.5** G を双曲群とし、H をその擬凸な部分群とする。このとき、H は有限生成で、双曲的である。

注意 **2.2** 双曲群の有限表示な部分群で双曲的でないものの存在が知られている *[Br]*。

証明　S を G の生成元集合とする。$h \in H$ とし、$\gamma = s_1 \cdots s_n, s_i \in S$ を 1 と h を結ぶ $\Gamma(G; S)$ の測地線とする。(つまり γ は頂点 $1, s_1, s_1 s_2, \cdots, s_1 \cdots s_n$ を結ぶ測地線のこと) H は仮定より擬凸であるが、その擬凸定数を C としよう。すると $\gamma \subset N_C(H)$. よってすべての $i \quad (1 \leq i \leq n-1)$ に対して $|g_i| \leq C$ なる $g_i \in G$ が存在して $h_i = s_1 \cdots s_i g_i \in H$ となる。$g_0 = g_n = 1$ とすると、$h = \prod_{i=0}^{n-1} (g_i^{-1} s_{i+1} g_{i+1})$ とかける。$a_i = g_i^{-1} s_{i+1} g_{i+1}$ とおくと、すべての i について $|a_i| \leq 2C + 1$ であり $a_i \in H$ である。よって $T = \{g \in G || g| \leq 2C + 1, g \in H\}$ とすれば、T は H を生成する。T は有限集合だから H は有限生成であることがわかった。図１１。

つぎに、H が双曲的であることを示す。$h \in H$ とすると、T の構成方法より

$$d_T(1, h) \leq d_S(1, h). \tag{1}$$

ただし d_S は $\Gamma(G; S)$ での距離、d_T は $\Gamma(H; T)$ での距離である。任意の $t \in T$ について $d_S(1, t) \leq 2C + 1$ であるから、任意の $g \in G$ について

$$d_S(1, g) \leq (2C + 1) d_{S \cup T}(1, g) \tag{2}$$

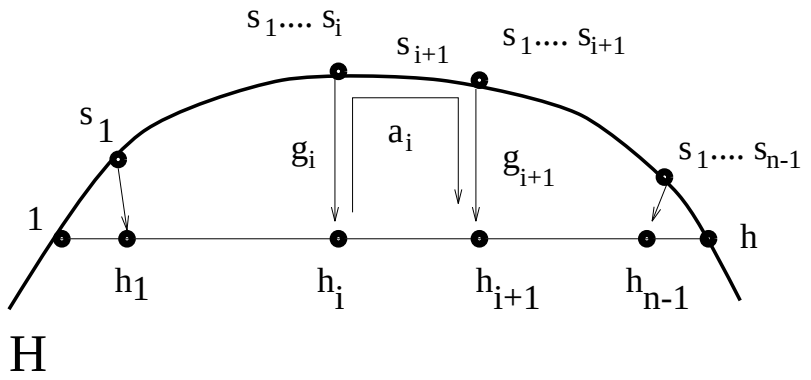


図 11: 双曲群の擬凸部分群は、双曲群である

である。ただし $d_{S\cup T}$ は $\Gamma(G;S\cup T)$ の距離。同じ理由で、任意の $h\in H$ について

$$d_S(1,h)\leq(2C+1)d_T(1,h). \tag{3}$$

明らかに $d_{S\cup T}(1,g)\leq d_S(1,g)$ だから、(1)、(2)、(3) より、任意の $h\in H$ について

$$\frac{1}{2C+1}d_{S\cup T}(1,h)\leq d_T(1,h)\leq(2C+1)d_{S\cup T}(1,h). \tag{4}$$

$\Gamma(H;T)\subset\Gamma(G;S\cup T)$ であるが、(4) は $\Gamma(H;T)$ の測地線が $\Gamma(G;S\cup T)$ の $(2C+1,0)-$ 擬測地線であることを示している。$\triangle$ を $\Gamma(H;T)$ の測地三角形とする。$\Gamma(G;S\cup T)$ は双曲的だから、ある $\delta\geq 0$ について、$\triangle$ は $\Gamma(G;S\cup T)$ の中で δ-thin。よって (4) より $\triangle$ は $\Gamma(H;T)$ の中で $(2C+1)\delta$-thin。 ∎

次の事実も知られている。証明は略す。

命題 2.6 G を双曲群とし、A と B を擬凸部分群とする。このとき、$A\cap B$ も G の擬凸部分群である。

注意 2.3 この事実は G の双曲性を仮定しないと成立しない。また、双曲空間の擬凸部分空間の交わりが擬凸というのも正しくない。

次の事実は重要である。命題 3.1 も見よ。

定理 2.1 G を双曲群とする。$g\in G$ を位数無限の元とすると、g の生成する部分群 $\langle g\rangle$ は $\mathbb{Z}$ に同型だが、この $\mathbb{Z}$ は G の擬凸な部分群である。

2.3 双曲群の初等性

定義 2.5 $\mathbb{Z}$ を有限指数の部分群として含む群、又は有限群は双曲的であるが、そのような双曲群は初等的 *(elementary)* とよばれる。

次の定理は重要である。証明はここではしない。定理 3.1 も見よ。

定理 2.2 G を初等的でない双曲群とする。このとき G は階数 2 の自由群 F_2 を擬凸な部分群として含む。

注意 2.4 双曲群が階数 2 の自由群を部分群として含めば初等的でないことは明らか。

例 2.14 階数 2 以上の自由群は初等的でない双曲群である。

例 2.15 閉負曲率多様体の基本群は初等的でない双曲群である。

例 2.16 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_4 *_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_6$、$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ は初等的でない双曲群である。一般に A、B を有限群とし、C を A と B に共通な部分群で $C \neq A, C \neq B$ とする。このときこの融合積 $A *_C B$ は双曲群だが、これは、$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ を除いて初等的でない。

2.4 Combination Theorem

群において、二つの群を「はり合わせる」操作は重要である。二つの群 A, B をその共通な部分群 C で, はり合わせてできる群 $G = A *_C B$ を「融合積」(amalgamation) と呼ぶ. A, B が双曲群で C が有限のとき、 G も双曲群であることは既に述べた. 「幾何学的な考察」から、部分群 C が quasi-convex なら、同様な現象が成り立ちそうであるが、やや注意が必要である。クラインの壷の基本群

$$G = \langle a, b | a^2 = b^2 \rangle$$

は融合積と考えられる. $A = \langle a \rangle = \mathbb{Z}, B = \langle b \rangle = \mathbb{Z}$, $C = \langle c \rangle = \mathbb{Z}$ で、はりあわせは, $a^2 = c = b^2$. さて、A, B はともに hyperbolic で, C はどちらでも quasi-convex な部分群であるが、$G = A *_C B$ は hyperbolic ではない。実際, $a^2, ab \in G$ で生成される 部分群 $H < G$ は $\mathbb{Z}^2$ に同型 (クラインの壷の二重カバーであるトーラスの基本群) であり、指数は 2 である。よって G は hyperbolic でない。

補足 2.2 (Amalgamation, HNN-extension) 融合積の定義を述べる。群 A, B, C と単射準同型 $i_A : C \to A, i_B : C \to B$ が与えられたとする。このとき、自由積 $A * B$ の中で、集合 $\{i_A(c) i_B(c)^{-1} | c \in C\}$ で生成される正規部分群を N とする。融合積 $A *_C B$ とは $(A * B)/N$ で定義される群のことである。次のような表示を持つと考えてもよい：

$$A *_C B = \langle A, B | i_A(c) = i_B(c) (c \in C) \rangle$$

群と部分群の組 $C < A$ と単射準同型 $f : C \to A$ が与えられたとき、文字 t で生成される無限巡回群 $\langle t \rangle$ と A の自由積 $A * \langle t \rangle$ の中で、集合 $\{tct^{-1} f(c)^{-1} | c \in$

$C\}$ で生成される正規部分群を N とする。*HNN* 拡大 $A*_C$ は $(A*\langle t\rangle)/N$ で定義される群のことである。

群 G の部分群 C で $\mathbb{Z}$ に同型なものが maximal とは、$C<D<G$ かつ $D=\mathbb{Z}$ なら $C=D$ となること。上の例で, $C<A, C<B$ はともに maximal でない。実は、G が hyperbolic なら、任意の $\mathbb{Z}=C<G$ を含む maximal な $\mathbb{Z}=D<G$ の存在が知られている. これは一般には正しくない。例えば, 加群 $\mathbb{Q}$ では不成立. 次が正しい.

定理 2.3 *G, H を torsion-free, hyperbolic 群とする。$C=\mathbb{Z}$ を G, H の共通の部分群とし、G, H の両方で maximal とする。ことのき $G*_C H$ は hyperbolic.*

この定理は証明なしで [Gr] に述べられている. 証明は、Bestvina-Feighn [BF] によって、より一般の形で与えられた. 一つ定義を与える. 部分群 $H<G$ が mal-normal とは、任意の $g\in G-H$ に対して $gHg^{-1}\cap H=1$. 群 G が torsoin-free, hyperbolic なとき、その maximal な無限巡回群 C は mal-normal であることが分かる.

定理 2.4 (combination theorem) *G, H を hyperbolic 群とする。C を G, H の共通の部分群とし、G, H の両方で mal-normal とする。ことのき $G*_C H$ は hyperbolic.*

証明は容易でない。論文 [BF] を見よ. HNN-拡大にも同様の結果があり、それから特に, 円周上の種数 2 以上の閉曲面束 M が pseudo-Anosov map によるはりつけで与えられる時, その基本群が hyperbolic であることが従う. もちろん、それ以前に Thurston は 3 次元多様体 M には双曲構造が入ることを示しているので、それより基本群は hyperbolic である。

3 初等的でない双曲群は階数 2 の自由群を含む

3.1 双曲的な元

G を双曲群とし, Γ をその Cayley グラフとする。G の境界 (boundary) ∂G を $\partial G=\partial\Gamma$ で定義する。この章では、Γ のことを G、$\overline{\Gamma}$ のことを $\overline{G}$ とかくこともある。$1\neq g\in G$ とし、$\gamma_g=[1,g]$ とする。g は Γ に等長的に作用し、γ_g を g から g^2 への測地線 $g\cdot\gamma_g$ に移す。写像 $\alpha_g:\mathbb{R}\longrightarrow\Gamma$ を

$$\alpha_g=\bigcup_{-\infty<n<\infty} g^n\cdot\gamma_g$$

で定義する。図１２。

定義 3.1 *α_g が擬測地線のとき、g を双曲的 (hyperbolic) という。*

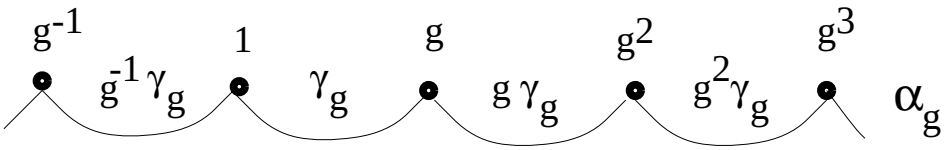


図 12: 双曲的な元 g は、擬測地線 α_g を定める

次の命題は重要である。証明は例えば Prop3.2[Sh] を見よ (または、このノートの定理 5.3)。

命題 **3.1** G を双曲群とする。位数無限な元は双曲的である。

補足 **3.1** 双曲群において、双曲的な元の定義を次で与えても同値である。次が成り立つとき $g \in G$ を双曲的とよぶ：ある定数 $C > 0$ が存在して、すべての $n > 0$ について

$$d_S(1, g^n) \geq Cn$$

このような定数 C の存在は、生成元集合 S のとりかたによらないことは容易に分かる。

この定義は、測地空間 X の等長変換 g について意味をなす。すなわち、ある点 $x \in X$ について

$$d(x, g^n(x)) \geq Cn$$

とすればよい。

補足 **3.2** 実は次が知られている。$\Gamma(G, S)$ が δ-双曲的とする。このとき、ある自然数 $N(|S|, \delta) > 0$ が存在して次が成り立つ：位数無限の任意の元 $g \in G$ にたいして、Γ のある測地線 c_g が存在して、

$$g^N(c_g) = c_g$$

一般に、$N = 1$ とは取れない。

ある定数 $L(g)$ が存在して、c_g と α_g は互いに L-近傍に含まれる。

系 **3.1** g を双曲群 G の位数無限な元とする。

1. $\langle g \rangle \simeq \mathbb{Z}$ は G の擬凸部分群である。
2. $\{g^n\}_{n\geq 0}, \{g^{-n}\}_{n\geq 0} \in S_\infty(\Gamma)$ であり、$\lim_n g^n, \lim_n g^{-n} \in \partial G$ について

$$\lim_{n\to\infty} g^n \neq \lim_{n\to\infty} g^{-n}.$$

証明

1. 命題 3.1 より α_g は擬測地線であり、Γ は双曲的だからよい。

2. $S_\infty(\Gamma)$ の定義に従えばよい。

∎

定義 3.2

$$\begin{aligned} g^{+\infty} &= \lim_{n\to\infty} g^n \in \partial G \\ g^{-\infty} &= \lim_{n\to\infty} g^{-n} \in \partial G \end{aligned}$$

と書く。

命題 3.2 $g \in G$ を双曲群 G の双曲的な元とする (つまり、位数無限の元)。N_+ を $g^{+\infty}$ の $\overline{G}$ におけるある近傍、N_- を $g^{-\infty}$ の $\overline{G}$ におけるある近傍とする。このとき、ある $I > 0$ が存在して、すべての $i \geq I$ に対して

$$\begin{aligned} g^i(G \setminus N_-) &\subset N+ \\ g^{-i}(G \setminus N_+) &\subset N_-. \end{aligned}$$

証明　概略だけ述べる。同じことだから、十分大きな i に対して $g^i(G \setminus N_-) \subset N_+$ だけ示す。命題 3.1 より $\{g^n\}_{-\infty<n<\infty}$ は擬測地線 α を定める。g は G (正確には $\Gamma(G)$ である) に等長的に作用し、α は $g-$ 不変である。まず十分大きな i に対して

$$g^i(\alpha \setminus N_-) \subset N_+ \tag{1}$$

は明らかである。一般の点 $x \in G$ については G から α への射影 (のようなもの) $P : G \longrightarrow \alpha$ を考える。P の定義は $x \in G$ に対し、x と α の距離を実現する点を対応させる。このような点は一つに定まらないが、このような点の集合の直径は、G の双曲定数 δ と α の擬測地定数 K, ε で定まるある定数より小さい。さて α と P の定義よりある $C_1(K, \varepsilon, \delta) \geq 0$ が存在して、すべての $x \in G$ とすべての $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$d(P(g^n \cdot x), g^n \cdot P(x)) \leq C_1$$

が成立。(1) より、十分大きな i に対して

$$g^i(G \setminus N_-) \subset N_+$$

が言える。図１３。

∎

3.2　自由群の存在

次の事実が知られている :「双曲群 G の任意の無限部分群は位数無限の元を含む」. 証明は容易でないのでここでは省略する (定理 5.4 参照)。

これを使って次を示す。

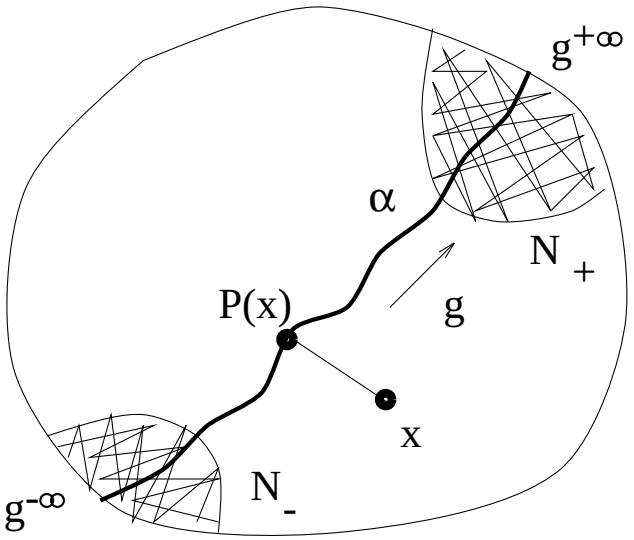


図 13: 双曲的な元 g は、軸 α_g を “ずらす” ように作用する

定理 3.1 G を双曲群とし、H をその任意の部分群とする。このとき H は初等的 (な双曲群) であるか、階数 2 の自由群を部分群として含む。

証明　H が初等的でないとする。このとき、上の事実から H は位数無限の元 g を含む. g は $g^{\pm\infty} \in \partial G$ を定め、$g^{+\infty} \neq g^{-\infty}$ である。

補題 3.1 双曲的な元 $h \in H$ が存在して

$$\{h^{+\infty}, h^{-\infty}\} \cap \{g^{+\infty}, g^{-\infty}\} = \phi$$

証明　まず、任意の $a \in H$ について aga^{-1} は双曲的で、$(aga^{-1})^{\pm\infty} = a^{-1} \cdot g^{\pm\infty}$ に注意。もし、すべての $a \in H$ について

$$\{(aga^{-1})^{+\infty}, (aga^{-1})^{-\infty}\} = \{g^{+\infty}, g^{-\infty}\}$$

なら、H は初等的と結論されるので (virtually $\mathbb{Z}$ になる) 矛盾。よってある $a \in H$ が存在して、$h = aga^{-1}$ に対して、$\{h^{+\infty}, h^{-\infty}\} \neq \{g^{+\infty}, g^{-\infty}\}$ が成立。$h^{+\infty} \neq g^{\pm\infty}$ としよう。この時自動的に $h^{-\infty} \neq g^{\pm\infty}$ でもあることがわかる。はじめに $h^{-\infty} \neq g^{\pm\infty}$ を仮定する場合も同様。よって $\{h^{\pm\infty}\} \cap \{g^{\pm\infty}\} = \phi$.

∎

定理の証明を続ける。$\overline{G}$ はハウスドルフだから、$g^{\pm\infty}$ の近傍 $N_\pm$ と $h^{\pm\infty}$ の近傍 $M_\pm$ が存在して、互いに交わらない。命題 3.2 より I が存在してすべての $i \geq I$ に対して

$$g^i(\overline{G} \setminus N_-) \subset N_+$$

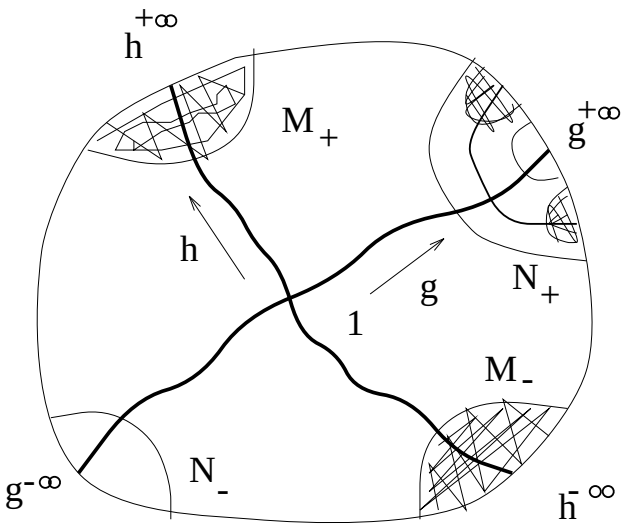


図 14: 双曲的な元 g と h による ピンポン

$$g^{-i}(\overline{G} \setminus N_+) \subset N_-$$
$$g^{i}(\overline{G} \setminus M_-) \subset M_+$$
$$g^{-i}(\overline{G} \setminus M_+) \subset M_-$$

が成立。図１４。

以下で、g^I と h^I が自由群を生成すること、すなわち

$$\langle g^I, h^I \rangle \simeq F_2$$

を示す。$l = g^I, m = h^I$ とかく。w を $l^{\pm 1}, m^{\pm 1}$ の有限個の列で空でなく、さらに $ll^{-1}, l^{-1}l, mm^{-1}, m^{-1}m$ となる部分を含まないとする。示すべきことは w が G の元として $w \neq 1$ であることである。まず 1 は $N_\pm, M_\pm$ に含まれないとしてよい。w を $1 \in \Gamma$ に作用させてみる。I と $N_\pm, M_\pm$ のついての条件より

$$w \cdot 1 \in N_\pm \cup M_\pm.$$

よって、特に $1 \neq w \cdot 1$. これは、G の元として $w \neq 1$ を示している。従って、$\langle l, m \rangle \simeq F_2$ がわかった。$< l, m > \subset H$ よりよい。 ∎

行列群の任意の有限生成な部分群は、virtually solvable である（すなわち、solvable な部分群を有限指数で含む）か、階数 2 の自由群を含むことが知られていて、これは、Tits alternative と呼ばれている。上の双曲群についての定理も Tits alternative と呼ばれることがある。一般に、双曲群は行列群の部分群に同型とは限らないことが知られている (M.Kapovich). 写像類群も類似の Tits alternative を満たすことが知られている. 写像類群が行列群の部分群かも知られていない。

4　双曲群は線型の等周不等式をみたす

4.1　群の表示と等周不等式

まず、群の表示について説明しよう。S を有限集合とし、$F(S)$ を S の生成する自由群とする。$F(S)$ の階数は S の位数である。ここで S の各元に $F(S)$ での逆元も付け加えて、それを改めて S と書こう。R を $F(S)$ の部分集合とし、$N(R)$ を R を含む $F(S)$ の正規部分群で最小のものとしよう。$F(S)/N(R)$ は群であるがこの群 G を $G = \langle S|R\rangle$ とかき、$\langle S|R\rangle$ を G の表示 (presentation) とよぶ。R が有限集合のとき、とくに有限表示 (finite presentation) という。群 G が有限表示を持つとき、有限表示群と呼ぶ。

例 **4.1**　*1.* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = \langle a^{\pm1}, b^{\pm1}|aba^{-1}b^{-1}\rangle$

2. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle a^{\pm1}|a^n\rangle$

3. $\pi_1(\Sigma_g) = \langle a_1^{\pm1},\cdots,a_g^{\pm1},b_1^{\pm1},\cdots,b_g^{\pm1}|\prod_{i=1}^g[a_i,b_i]\rangle$. ただし、$\Sigma_g$ は種数 g の向き付けられた閉曲面である。

$G = \langle S|R\rangle$ を有限表示としよう。$w \in F(S)$ とし、$s_is_i^{-1}$ 又は $s_i^{-1}s_i$ $(s_i \in S)$ なる部分を w は含まないとする。このとき w は既約 (reduced) という。このとき、w を表すために必要な S の元の数を $l(w)$ とかく。w が空のときは、$l(w) = 0$ とする。既約な $w \in F(S)$ が G で $w = 1$ としよう。定義から、$p_i \in F(X), r_i \in R, \varepsilon_i = \pm1$ が存在して

$$w = \prod_{i=1}^{N} p_i r_i^{\varepsilon_i} p_i^{-1}$$

とかける。この等式は $F(X)$ の中でのことに注意。このような w の書き表し方の中で最小の N を $A(w)$ とかく。w が 空のときは、(G で $w = 1$ であるが) $A(w) = 0$ と定義する。

定義 **4.1**　$n \in \mathbb{Z}_{\geq0}$ に対して

$$f(n) = \sup\{A(w)|l(w) \leq n, G \text{ で } w = 1\}$$

と定義する。$f(n) \in \mathbb{Z}_{\geq0}$ である。f を $\langle S|R\rangle$ の **Dehn** 関数とよぶ。例えば自由群については $f \equiv 0$ である。ある正数 C が存在してすべての n について

$$f(n) \leq Cn, Cn^2, \cdots$$

となるとき、表示 $\langle S|R\rangle$ は線型、二次、などの 等周不等式 *(isoperimetric inequality)* をみたすという。$\langle S|R\rangle$ と $\langle S'|R'\rangle$ の Dehn 関数をそれぞれ f, f' とする。群として $\langle S|R\rangle = \langle S'|R'\rangle$ なら、ある正の整数 K が存在してすべての n について

$$f'(n) \leq Kf(Kn)$$

となることがわかる。よって下の例のような表現は正当である。

例 **4.2**　*1.* 自由群は線型の等周不等式をみたす。
2. $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ は *2* 次の等周不等式をみたすが線型の等周不等式はみたさない。
（ 定理 *4.3* を見よ ）

4.2　双曲群は有限表示である

定理 4.1 双曲群は有限表示である。

証明　$\Gamma(G;S)$ を $\delta-$ 双曲的としよう。
$R=\{w\in F(S)|l(w)\le 4\delta+6$ かつ G の中で $w=1\}$ とする。R は有限集合である。以下で、$G=\langle S|R\rangle$ であることを示す。
$w\in F(S)$ が G の中で $w=1$ とする。$w\in N(R)$ を示せばよい。w は $\Gamma(G;S)$ の中の 1 を通る閉曲線とみなせる。w 上の G の元を 1 から順に $1=g_0,g_1,g_2,\cdots,g_n,g_{n+1}=1$ とする。測地線 $[1,g_i]$ 上の G の元を 1 から順に $1=g_{i0},g_{i1},\cdots,g_{im_i}=g_i$ とする。測地三角形 $[1,g_i]\cup[g_i,g_{i+1}]\cup[g_{i+1},1]$ は $\delta-$thin だから、任意の i と j に対して、ある j' が存在して

$$d(g_{ij},g_{i+1\,j'})\le\delta+1.$$

$$r_{ij}=[g_{ij},g_{i\,j+1}]\cup[g_{i\,j+1},g_{i+1\,(j+1)'}]\cup[g_{i+1\,(j+1)'},g_{i+1\,j'}]\cup[g_{i+1\,j'},g_{ij}]$$

とすると、明らかに $r_{ij}\in R$ であり r_{ij} の構成法より

$$w\in N(r_{ij}|1\le i\le n,1\le j\le m_i).$$

よって $G=\langle S|R\rangle$ がいえた。従って G は有限表示である。図１５。 ∎

4.3　双曲性と線型等周不等式は同値

定理 4.1 より双曲群は有限表示だから Dehn 関数が定義される。この章の目的は次の定理を示すことである。

定理 4.2 双曲群は線型等周不等式をみたす。

実は定理 4.2 の逆も成り立つ。証明は例えば Th2.5 [Sh] を見よ。

定理 4.3 有限表示された群 $G=\langle S|R\rangle$ が線型の等周不等式をみたせば G は双曲的。

定理 4.2 と 4.3 より次がわかる。

定理 4.4 有限表示される群について双曲性と線型の等周不等式をみたすことは同値である。

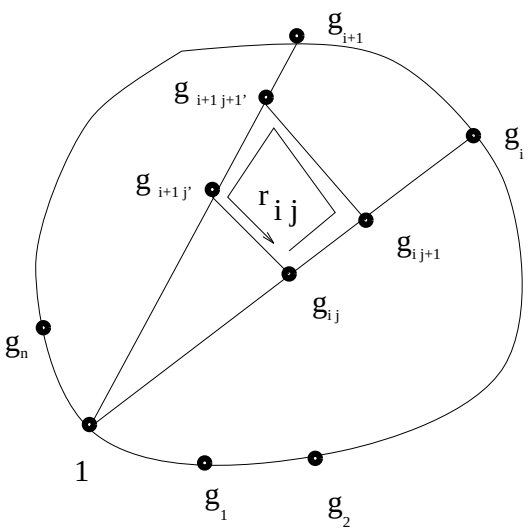


図 15: 双曲群は、有限表示である

証明 (定理 4.2) まず、δ は正の整数としてよい。$D = 600\delta$ とおく。

$$A_0 = \max\{A(w) | w \text{ は } F(S) \text{ の既約な元で } G \text{ のなかで } w = 1, l(w) \leq 4D\}$$

とする。このような w は有限個だから $|A_0| < \infty$ である。$N(w) = \lfloor \frac{2l(w)}{D} \rfloor + 1$ とし、N に関する帰納法で

$$A(w) \leq 3N(w)A_0 \tag{1}$$

を示す。これは線型の等周不等式を導く:

$$A(w) \leq 6A_0 l(w)/D + 3A_0 \leq (6/D + 3)A_0 l(w).$$

まず、$N \leq 8$ の時は A_0 の定義よりよい ($N(w) \leq 8$ なら $l(w) < 4D$. よって $A(w) \leq A_0$. 一方, $N(w) \geq 1$ より、よい). さて $N(w) \leq n$ をみたす全ての w について (1) が成立するとしよう。ただし、$n \geq 3$ としてよい。$w \in F(S)$ が $N(w) = n + 1$ で、G の中で $w = 1$ とする。w は Γ の中の 1 を通る閉曲線とみなせる。それも w とかく。w 上の G の元 g で $d(1, g)$ が最大のものを g_0 としよう。w 上の点で、g_0 から w に沿って測った距離が D の 2 点を g_1 と g_2 とする。$n \geq 8$ より $l(w) \geq 4D$ に注意。このとき次が成り立つ.

$$d(g_1, g_2) \leq D + 16\delta. \tag{2}$$

ひとまず、これを仮定して証明を続けよう. 閉曲線 w の g_1 から g_2 への部分

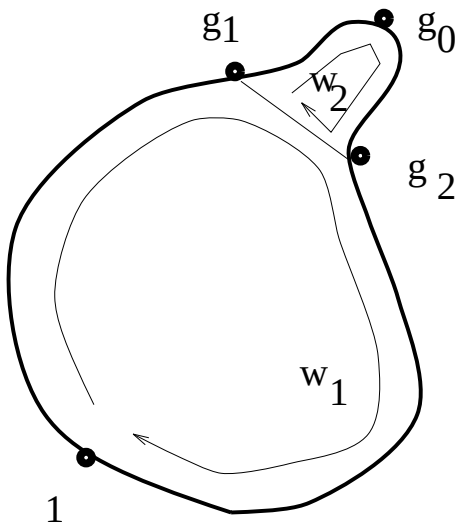


図 16: $w = w_1 + w_2$ と分解して、帰納法を使う

を $w(g_1, g_2)$ とかく。w において $w(g_1, g_2)$ を測地線 $[g_1, g_2]$ で置き換えて得られる閉曲線を w_1 とし, $w_2 = w(g_1, g_2) \cup [g_2, g_1]$ とする (図 16). このとき, $l(w_1) \leq l(w) - D + 100\delta$ より $N(w_1) \leq N(w) - 1$ である。従って帰納法の仮定より w_1 について (1) が成立. すなわち $A(w_1) \leq 3N(w_1)A_0$. 一方、$l(w_2) \leq 3D + 100\delta \leq 4D$ だから $A(w_2) \leq A_0$. 従って

$$A(w) \leq A(w_1)+A(w_2) \leq 3N(w_1)A_0+A_0 \leq 3(N(w)-1)A_0+A_0 \leq 3N(w)A_0.$$

よって w に関しても (1) が成立。これで定理の証明が終る.

証明をとばした (2) を証明する。双曲群についての証明の前に, 自由群, すなわち Cayley グラフがツリーのの場合に証明する。この場合, $d(g_1, g_2) \leq D$ が成立することが、次のように分かる. まず、測地線 $[1, g_0], [g_1, g_2]$ の共通部分は、一点 g_0 でなく線分である。なぜなら, もし、一点なら、ツリーの性質から $d(1, g_0) < d(1, g_1)$ となり、g_0 の取り方に矛盾. $[1, g_0] \cap [g_0, g_1] = [g_0, x_1]$ とする。同様の理由により、次も成立. $d(g_0, x_1) \geq d(g_1, x_1)$. さらに、$d(g_0, x_1)+d(g_1, x_1) = D$. 同じく, $x_2 \in [1, g_0]$ があって、$d(g_0, x_2) \geq d(g_2, x_2)$. さらに、$d(g_0, x_2) + d(g_2, x_2) = D$. ここで、$d(g_0, x_1) \leq d(g_0, x_2)$ としても一般性を失わない. このとき、

$$\begin{aligned} d(g_1, g_2) &= d(g_1, x_1) + d(x_1, x_2) + d(g_2, x_2) \\ &= d(g_1, x_1) + d(g_0, x_2) - d(g_0, x_1) + d(g_2, x_2) \\ &= D - d(g_0, x_1) + d(g_1, x_1) \leq D. \end{aligned}$$

一般の双曲群の場合は、測地三角形が一様に thin であることを使えばよい. 測地三角形 $(1, g_0, g_1), (1, g_0, g_1)$ に命題 1.2 を適用して、測地線 $[1, g_0]$ 上

に g_1, g_2 にそれぞれ対応する点 p_1, p_2 をとる。このとき、

$$\begin{aligned} |g_1 - p_1| + |g_0 - p_1| &\leq |g_1 - g_0| + 8\delta \leq D + 8\delta, \\ |g_1 - p_1| &\leq |g_0 - p_1| + 8\delta, \\ |g_2 - p_2| + |g_0 - p_2| &\leq |g_2 - g_0| + 8\delta \leq D + 8\delta, \\ |g_2 - p_2| &\leq |g_0 - p_2| + 8\delta. \end{aligned}$$

ここで $|g_0 - p_2| \leq |g_0 - p_1|$ と仮定しても一般性を失わない. このとき、前と同様に、

$$\begin{aligned} |g_1 - g_2| &\leq |g_1 - p_1| + |p_2 - p_1| + |g_2 - p_2| \\ &\leq |g_1 - p_1| + (|g_0 - p_2| - |g_0 - p_1|) + |g_2 - p_2| \\ &\leq D + 8\delta + |g_1 - p_1| - |g_0 - p_1| \leq D + 8\delta + 8\delta = D + 16\delta. \end{aligned}$$

∎

5 その他

5.1 まとめ

ここでは、双曲群についての基本的な事実をまとめる。

定理 5.1 G を双曲群とする。次は正しい.

1. G は有限表示.
2. G の語の問題, 共役問題 *(conjugacy problem)* は解ける.
3. $H < G$ を部分群とする. このとき、H は 有限群であるか、$\mathbb{Z}$ に *quasi-isometric* であるか、階数 2 の自由群 を部分群として含む. 特に H が可換なら、有限群であるか、$\mathbb{Z}$ に *quasi-isometric*. *(*群 H が $\mathbb{Z}$ に *quasi-isometric* であることは、$\mathbb{Z}$ を指数有限な部分群として含むことと同値. このような群 H を *"virtually"* $\mathbb{Z}$ と呼ぶ. 特に, H に位数有限の元がなければ, $\mathbb{Z}$ に同型) .
4. $H < G$ を部分群とする. このとき、H は $\mathbb{Z}$ に *quasi-isometric* か、階数 2 の自由群 を部分群として含む.
5. G は線形の等周不等式を満たす.
6. 位数有限の元を含まない双曲群について、同型問題 *(isompephism problem)* は解ける.

(1),(3),(4),(5) は示した. (2) の語の問題は、1 次等周不等式 $A(w) \leq Cl(w)$ と関係がある。実際, さらに等周定数 C をあらかじめ評価できるのでよい。群 G の Cayley graph が δ-hyperbolic で、語の問題が解ければ, 共役問題は易しい. 実際, ある計算できる定数 $C(n, m, \delta)$ が存在して, $|a| \leq n, |b| \leq m$

を満たす $a, b \in G$ が共役なら、実は, $|c| \leq C$ を満たすある $c \in G$ が存在して、$cac^{-1} = b$ となる。(6) は難しく, Gromov の論文 [Gr] では解決されていない。後に Sela [Se] が $\mathbb{R}$-tree を使って解決した. 位数有限 (特に 2) の元を含む場合は技術的に, 特別の扱いが必要なようである.

5.2 有限位数の元

点 $x \in X$ を中心とする半径 r の距離球を $B(x, r)$ と表す. 任意の有界な集合 $S \subset X$ に対して、ある x が存在して, $S \subset B(x, r)$ となる r の下限を S の「半径」の呼ぶ。また、その r について、$X \subset B(x, r)$ となる x を S の「中心」とよぶ。中心は 1 つとは限らない。

次の命題は **Cartan** の補題と呼ばれる。空間の負曲率性に由来する幾何学的性質である。

命題 **5.1** X を δ-*hyperbolic* 空間とする。任意の有界な集合 S とその任意の 2 つの中心 a, b について $|a - b| \leq 6\delta$.

(証明)2 点 x, y 間の距離を $|x-y|$ と書く. $\delta > 0$ として、$|a-b| < 6\delta$ を示す。$|a-b| \geq 6\delta$ として矛盾を導く。a, b の「中点」を c とする。すなわち、次を満たす $c \in [a, b]$ をとる。$|a-c|+|c-b| = |a-b|$ であり、$|a-c|, |b-c| = |a-b|/2$. このとき、$|a - c|, |b - c| \geq 3\delta$.

$x \in S$ を任意の点とする。このとき、$x \in B(a, r) \cap B(b, r)$ である。測地三角形 (a, b, x) において、測地辺 $[a, x]$ または $[b, x]$ に点 c' が存在して $|c-c'| \leq \delta$. 以下、$c' \in [a, x]$ として議論を進める。このとき、$|a-x| = |a-c'|+|c'-x|$. 従って、$|c'-x| = |a-x|-|a-c'| \leq |a-x|-|a-c|+|c-c'| \leq |a-x|-3\delta+\delta = |a-x|-2\delta$. これを使って、$|c - x| \leq |c - c'| + |c' - x| \leq \delta + |c' - x| \leq \delta + |a - x| - 2\delta \leq |a - x| - \delta \leq r - \delta$. これより $S \subset B(c, r - \delta)$. これは半径 r の定義に矛盾。$\delta = 0$ の場合は、$\delta > 0$ とし、$\delta \to 0$ と極限をとる議論をすればよい。∎

定理 **5.2** G を双曲群とする。このとき、G に有限位数の元は共役を除いて有限個しかない。

(証明) G は δ-hyperbolic とする。集合 A を $A = \{a \in G || a| \leq 6\delta + 1\}$ と定義. $g \in G$ を任意の位数有限の元とする。以下で g が A のある元に共役であることを示す. A は有限集合だから, これが定理を示す. $S = \{g^n | n \in \mathbb{N}\}$ は Cayley graph Γ 内の有界集合. よって、中心 $c \in \Gamma$ が存在する. このとき、$\gamma \in G$ が存在して, $|c - \gamma| \leq 1/2$. 一方, $g^{-1}S = S$ より $g^{-1}c$ も S の中心である。ところが、上の命題より $|g^{-1}c - c| \leq 6\delta$. 従って, $|\gamma - g^{-1}\gamma| \leq 6\delta + 1$. これより, ある $a \in A$ が存在して $\gamma a = g^{-1}\gamma$. 従って, $g = \gamma a^{-1}\gamma^{-1}$. $a^{-1} \in A$ よりよい。∎

この定理で述べた性質は、群について確かめるべき基本的な性質の一つである。定理で, 共役をとらないと主張は正しくない. 例えば,$F_2 * \mathbb{Z}_2$ を考える.

$a \in \mathbb{Z}_2$ を生成元とすれば、任意の $g \in F_2$ に対して, gag^{-1} は位数 2 の元だが、異なる g に対して, これらは全て異なる.

5.3 位数無限の元

次の事実は重要である。

(事実) δ-hyperbolic な空間 X に点列 $x_i \in X$ が与えられたとする。任意の $i \geq 2$ について次が成立したとする。

$$|x_i - x_{i-1}| - (x_{i-1}.x_{i+1})_{x_i} - (x_{i-2}.x_i)_{x_{i-1}} \geq 100\delta.$$

このとき、任意の $N \geq 2$ について次が成立。

$$|x_N - x_1| \quad \geq \sum_{i=2}^{N} (|x_i - x_{i-1}| - (x_{i-1}.x_{i+1})_{x_i} - (x_{i-2}.x_i)_{x_{i-1}} - 20\delta).$$

例えば、ある定数 $L, l > 0$ が存在して $L - 2l \geq 100\delta$ とする。点列 x_i が、任意の i について $|x_i - x_{i-1}| \geq L, (x_{i-1}.x_{i+1})_{x_i} \leq l$ を満たせば, $|x_N - x_1| \quad \geq (N-1)(L - 2l - 20\delta)$. よって、点列は L, l だけによる一様な擬測地線を定めている。

上に述べた事実の証明は延期する。証明の途中で、$[x_1, x_N] \subset N_{10\delta}(\cup_{i=1}^{N-1}[x_i, x_{i+1}])$ を示す. そのために任意の点 $x \in X$ をとり、δ-thin 三角形 (x_i, x_{i+1}, x) の配置を考えて議論する (議論はあまり易しくない。詳細略). 上の事実から容易に次が従う. (点列 $\{g^n\}$ を考えれば良い).

事実 **1**

δ-hyperbolic 群 G の任意の元 g について、次が成立すれば、g は hyperbolic な元である。(すなわち、$\{g^n\}_n$ は擬測地線を定める)。

$$(1.g^2)_g \leq |g|/2 - 100\delta.$$

これより、次が分る。点列 $\{g, gh, ghg, ghgh, \ldots\}$ を考えれば良い.

事実 **2**

$g, h \in G$ が hyperbolic でないとする。次が成立すれば、gh, hg は hyperbolic.

$$(g.h)_1 \leq \min(|g|, |h|)/2 - 20\delta.$$

事実 **3**

$K \geq 1, \epsilon \geq 0, \delta \geq 0$ を任意の定数とする。このとき、定数 $l > 0, K' \geq 1, \epsilon' \geq 0$ が存在して次を満たす.

X を δ-hyperbolic 空間とする。X の道 α が l-local (K, ϵ)-擬測地線なら、α は (K', ϵ')-擬測地線である。

ただし、α が l-local (K, ϵ)-擬測地線とは、$|\alpha'| \geq l$ である任意の連結な $\alpha' \subset \alpha$ が (K, ϵ)-擬測地線であることとする。

G を双曲群とする。任意の無限列 $\{g_n\}_n \subset G$ にたいして (ただし、元は相異なるとする) 、部分列 $\{g_n\}_n$ (と書くことにする) と点　$g_\infty \in \partial G$ が存在して、$\lim_n g_n = g_\infty$. これは、Cayley グラフ Γ が局所有限な離散集合からなるのでよい。つまり、任意の無限列 $\{g_n\}_n$ は境界 ∂G に集積点を少なくとも一つ持つことが分かった.

また、δ-双曲群 G について、$G \cup \bar{G}$ の任意の 2 点は、測地線で結ばれ, それらは互いに δ 以下の距離にある。

定理 5.3 *δ-hyperbolic 群 G において、任意の無限位数の元 $g \in G$ は hyperbolic.*

(証明) 位数無限の g が hyperbolic でないとして、矛盾を導く。任意の n に対して g^n は hyperbolic でない。G の Γ への作用は自由なので、$\{g^n\}_n$ は無限集合。よって、境界に集積点が存在する。場合を二つに分ける。

(1) 集積点が二つ以上の場合. $p \neq q$ を集積点とする。共に境界の点である。このとき、ある n_i, m_i が存在して、$g^{n_i} \to p, g^{m_i} \to q$ である。この点列にたいして、ある定数 C が存在して、任意の i, j に対して $(g^{n_i}.g^{m_j})_1 \leq C$. (C はおよそ、$(p.q)_1$ でよい)。このとき、十分大きな i, j について、$(g^{n_i}.g^{m_j})_1 \leq \min(|g^{n_i}|, |g^{m_j}|)/2 - 20\delta$. これと、$g^{n_i}, g^{m_j}$ がともに hyperbolic でないことを合わせれば (事実 1 の式から導かれる図を考えれば良い)、$g^{n_i+m_j}$ は hyperbolic.　矛盾。

(2) 集積点が 1 つの場合. $p \in \partial G$ を集積点とする。$g \cdot p = p$ である。$\gamma = [1, p]$ とする。$N = |B(1, 100\delta)|$ とする。このとき、$g^n \cdot \gamma = [g^{-n}, p]$ であるから, ある $k \in \gamma$ が存在して (実際、p に十分近く取れば良い. γ と $g^n \cdot \gamma$ は p の近くでは, 互いに δ 程度しか離れていない)、$1 \leq n \leq N$ である 任意の n にたいして、$d(\gamma, g^n \cdot k) \leq \delta$. 一方, G の Γ への作用は自由だから、任意の $h \in G$ にたいして、ある $1 \leq n \leq N$ が存在して、$d(h, g^n \cdot h) \geq 100\delta$ である。よって $h = k$ とし、対応する n にたいして、$(k.g^{2n} \cdot k)_{g^n \cdot k} \leq 10\delta$. これより、$(1.g^{2n})_{g^n} \leq 10\delta$. よって g^n は hyperbolic. 矛盾。∎

同じ議論によって次も示せる.

定理 5.4 *G を δ-双曲群とする。任意の無限部分群 H に対して, hyperbolic* (よって位数無限) な元 $h \in H$ が存在する。

5.4　$\mathbb{Z}^2$ に同型な部分群の非存在

定理 5.5 双曲群に $\mathbb{Z}^2$ に同型な部分群は存在しない。

(証明) $\mathbb{Z}^2 \simeq H = \langle a, b \rangle \subset G$ として矛盾を導く。任意の $1 \neq g \in H$ は hyperbolic である。a が境界に定める 2 点を $A = \{a^+, a^-\}$ とする。このとき、H が可換だから、$b \cdot A = A$. a^+, a^- を結ぶ測地線を γ とする。このとき、

任意の n について $b^n \cdot \gamma$ は γ　の　δ-近傍にある。したがって、ある定数 C が存在して任意の　n について、　ある i_n　が存在して、$|a^{i_n} b^n - 1| \leq C$ となる。よって、ある異なる n, m について、$a^{i_n} b^n = a^{i_m} b^m$. これは矛盾。∎

参考文献

[BB] M.Bestvina, N.Brady. Morse theory and finiteness properties of groups. Invent. Math. 129 (1997), no. 3, 445–470.

[BF] M.Bestvina, M.Feighn. A combination theorem for negatively curved groups. J. Differential Geom. 35 (1992), no. 1, 85–101.

[Bo] B.H. Bowditch, Notes on Gromov's hyperbolicity criterion for path-metric spaces, in "Group Theory from a Geometrical Viewpoint" edit by H. Ghys and others, World Scientific, 1991, 64-167.

[Br] Noel Brady, Branched coverings of cubical complexes and subgroups of hyperbolic groups. J. London Math. Soc. (2) 60 (1999), no. 2, 461–480.

[LS] R. Lyndon, P. Schupp, *Combinatorial Group Theory,* Springer, 1977.

[Gr] M. Gromov, Hyperbolic groups, in "Essays in Group Theory" edit. by S.M. Gersten, MSRI Publ. Vol 8, Springer, 1987, 75-263.

[BriHae] Bridson, Martin; Haefliger, Andre. Metric spaces of non-positive curvature. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 319. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[Co-P] M. Coornaert, A. Papadopoulos, *Symbolic Dynamics and Hyperbolic Groups,* Lect. Note in Math 1539, Springer, 1993.

[藤原] 藤原耕二、離散群の双曲幾何、「微分幾何学の最先端」１０章、培風館 、中島啓編、2005。

[深谷] 深谷賢治、双曲幾何、岩波講座　現代数学への入門、岩波書店、1996.

[Se] Z.Sela. The isomorphism problem for hyperbolic groups. I. Ann. of Math. (2) 141 (1995), no. 2, 217–283.

[Sh] H. Short and others, Notes on word hyperbolic groups, in "Group Theory from a Geometrical Viewpoint" edit by H. Ghys and others, World Scientific, 1991, 3-63.

索 引

δ-hyperbolic, 5
δ-thin, 5

amalgamation, 27
asymptotic, 18
Automatic group, 12

Cartan's lemma, 38
CAT(k) space, 6
Cayley graph, 21
combination theorem, 27
conjugacy problem, 37

Dehn function, 33
discontinuous action, 21

elementary, 26

finitely presented group, 33

Gauss-Bonnet theorem, 4
geodesic, 5
Gromov product, 15

HNN-extension, 28
hyperbolic element, 28
hyperbolic plane, 4

ideal boundary, 18
isomorphism problem, 37
isoperimetric inequality, 33

local quasi geodesic, 39

mal-normal, 28

path, 5

quasi convex subgroup, 25
quasi isometric; groups, 24
quasi-convex, 15
quasi-geodesic, 10
quasi-isometry, 13

reduced word, 33

symmetric space, 6

Tits alternative, 32
tree, 6

virtually, 32, 37

word metric, 21
word-hyperbolic group, 23