

カラビ-ヤウ多様体の或る族 と 潜在的保型性 —佐藤-テイト予想の証明に向けて—

原 隆 (HARA Takashi)[†]

2009 年 9 月 4 日

概要

[HSBT] に従って, GSp_n ガロワ表現に対する潜在的モジュラー性定理とその証明に用いられるカラビ-ヤウ超曲面族を用いた (ℓ, ℓ') トリックについて概観する. また, その応用として楕円曲線の佐藤-テイト予想が弱い仮定の下で証明されることを解説する.

† † †

この文章は 2008 年 3 月に行われた『 $R = \mathbb{T}$ の最近の発展についての勉強会』での安田正大氏の講演 “Proof of Sato-Tate conjecture after Taylor et al.” に基づき, マイケル・ハリス (Michael HARRIS), ニック・シェパード-バロン (Nick SHEPHERD-BARRON) 及び リチャード・テイラー (Richard TAYLOR) による共著のブレ・プリント

“A family of Calabi-Yau varieties and potential automorphy” ([HSBT] と表す)

の解説を試みたものである.

1994 年, アンドリュー・ワイルズ (Andrew WILES) に依る フェルマー予想 (FERMAT's conjecture) の解決 が全世界に衝撃を与え, 数論の新時代の到来を高らかに告げたことは未だ記憶に新しいが, その興奮も醒め已らぬ中, 佐藤-テイト予想 (SATO-TATE conjecture) というこれまた非常に有名かつ困難極まりない予想が (弱い仮定の下で) 解決されたという衝撃的なアナウンスがテイラー達の研究チームに依ってもたらされたのはつい 3 年前 (2006 年) のことであつた^{*1}. フェルマー予想の解決のためにワイルズに依って齎された「 $R = \mathbb{T}$ 」なる手法が, ほんの十数年の後に 佐藤-テイト予想 や セール予想 (SERRE's conjecture) と言った大予想達を次から次にばっさばっさと薙ぎ倒してゆく様を遠目に眺めているだけでも, この「 $R = \mathbb{T}$ 」という手法が数論幾何学の世界に “革命” をもたらしたことはもはや疑いようが無い

[†] 東京大学大学院数理科学研究科 (Graduate School of Mathematical Sciences, the University of Tokyo)
日本学術振興会特別研究員 (DC2) E-mail: thara@ms.u-tokyo.ac.jp

^{*1} 本稿執筆当時.

と実感させられよう.

[HSBT] 及びテイラーの論文 [Taylor4] は, そんな数論幾何学の動乱期を象徴する事件の筆頭である「佐藤-テイト予想の (弱い仮定の下での) 証明」がなされた記念碑的な論文である*². この歴史的にも数学的にも非常に重要な論文の解説記事を, 漸く修士論文を書き上げたばかりでしかも「 $R = \mathbb{T}$ 」については全くの門外漢であるといつて良い様な若造に任せようという事自体あまりにも無謀極まりない“冒険”に違いないと思うのだが, 一方でそんな門外漢が苦勞して論文を読み, 自分なりに解説した上で著した解説記事の方が親しみやすいと思われる方々も少しはいらっしゃるかもしれないと前向きに捉え直すこととし, 気を引き締めて本報告書の執筆に臨むこととした.

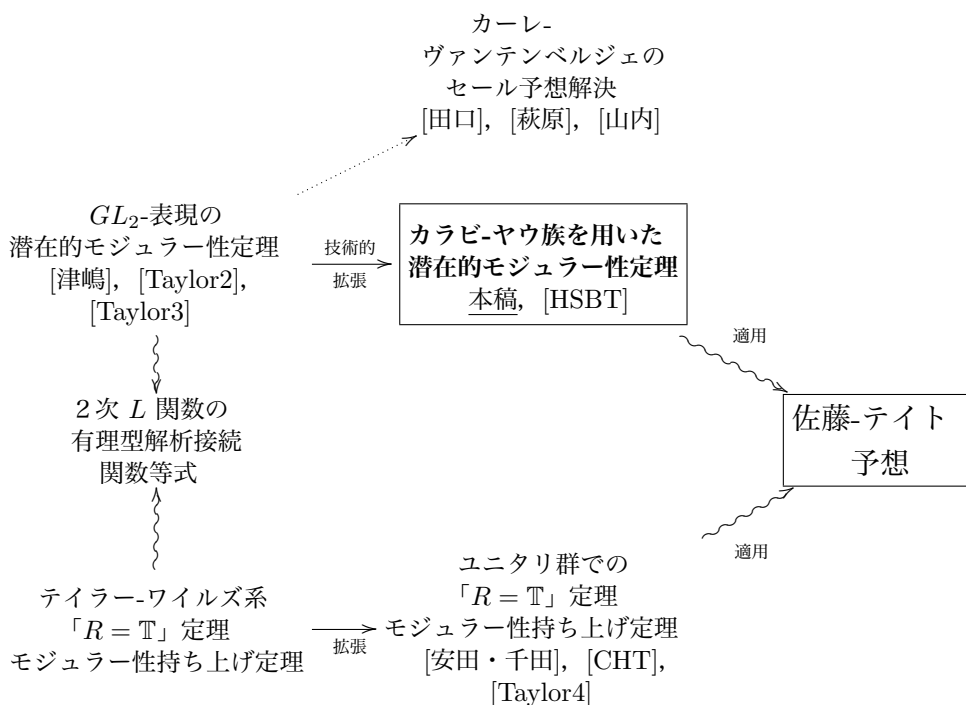
本論に入る前に一般的な注意をしておこう. [HSBT] の最終目標は, 先にも述べた通り佐藤-テイト予想の (弱い仮定の下での) “解決”である (定理 4.3) が, その証明の全てをカバーしているわけではない. 特に今回の勉強会のテーマでもある「 $R = \mathbb{T}$ 」の手法 及びその副産物として得られる モジュラー性持ち上げ定理 (*Modularity Lifting Theorem, MLT*) は, 当然のことながら佐藤-テイト予想の証明に於いてもその威力を如何なく発揮しているが, 「 $R = \mathbb{T}$ 」絡みの議論は ローラン・クロゼール (Laurent CLOZEL), ハリス 並びに テイラー に依って別の論文で展開されている ([CHT], [Taylor4] 参照). したがって, [HSBT] の解説を目的とする本稿の性格上佐藤-テイト予想の証明の (「 $R = \mathbb{T}$ 」の議論を含む) 全てを扱うことは出来ないので, 佐藤-テイト予想の証明についての完全網羅的な解説記事をご所望の方々の期待には残念ながら答えられないことを予めお断りしておく. 本稿では扱うことの出来ない「 $R = \mathbb{T}$ 」関連の議論については, 本報告集で安田正大氏と千田雅隆氏が非常に優れた解説記事 [安田・千田] を書いて下さっているので, 佐藤-テイト予想の証明を余すところなくじっくり味わいたい方は本稿と併せて是非ご覧頂きたい.

本稿で取り扱うのは, 佐藤-テイト予想の証明に於けるもう一つの主要な定理である 潜在的モジュラー性定理 (*Potential Modularity Theorem, PMT*) 及びその証明のために用いられる (ℓ, ℓ') トリックの議論 である. (ℓ, ℓ') トリックとは, 非常に大雑把な言い方をすれば

モジュラー性が既知である (非常に限られた) 法 ℓ' 表現からモジュラー性持ち上げ定理に依って得られる ℓ' 進ガロワ表現のモジュラー性を, 他のガロワ表現に“感染”させることで, 最終的に考えている ℓ 進表現の (潜在的) モジュラー性を示そう

という類の議論であり, ワイルズがフェルマー予想の証明 (谷山-志村予想の部分的解決) の際に用いた $(3, 5)$ トリック の変奏である (山下剛氏の稿 [山下 1] 参照. なお, § 1.1 の後半部も参照されたい). テイラーは先ず論文 [Taylor2], [Taylor3] に於いて, GL_2 表現の場合にこの

*² [HSBT] は, 数学誌の最高峰たる アナルズ・オブ・マスマティックス (*Annals of Mathematics*) への掲載が決定しているようであるが, 本稿執筆段階では未だプレ・プリント.

図1 佐藤-テイト予想の解決に至るまでの「 $R = \mathbb{T}$ 」関連の研究の位置づけ

種の議論を展開することで潜在的モジュラー性定理を証明し、その直接の応用として次数2の L 関数の有理型解析接続性などを示した。佐藤-テイト予想の証明に於いても或る種の L 関数に対する解析接続性や零点の分布を調べることが必要となってくるため (詳細は §0.3 参照), 2次 L 関数の解析的性質を調べる際に強力な武器となった潜在的モジュラー性定理が今回もその威力を如何なく発揮してくれるに違いない, と期待してしまうのは無理からぬ話である。しかしながら 佐藤-テイト予想で登場する L 関数はより高次のものであるため, [Taylor2], [Taylor3] で得られた潜在的モジュラー性定理を より高次の表現に拡張する必要があった。

[HSBT] は, 上記のような要請に答える形で GSp_n 表現という高次のガロワ表現に対する潜在的モジュラー性定理を証明したプレ・プリントであり, その系として佐藤-テイト予想を (弱い仮定のもとに) 導いている。[Taylor2], [Taylor3] で扱われた GL_2 表現の場合の潜在的モジュラー性定理及びその証明法については, 津嶋貴弘氏が本報告集に於いて丁寧に解説して下さっている [津嶋] ので, 適宜参照していただきたい。なお, 本稿でも GL_2 表現の場合との論法の違いについては簡単に触れるつもりである (§2.1 参照)。

ここ10数年の「 $R = \mathbb{T}$ 」に纏わる研究の発展は非常に目覚ましいものがある。そんな最先

端の数論幾何学の奔流の中で [HSBT] というプレ・プリントがどのような立場に位置づけられるべきかを明確にするために、図 1 に「 $R = \mathbb{T}$ 」という手法の発展の流れ及び本報告集の記事との関係を図示した。この図からもお分かりいただけると思うが、本稿は技術的な側面 (即ち (ℓ, ℓ') トリックの改良の歴史) から見れば、津嶋氏の稿 [津嶋] の直接的な続編として考えていただいて差し支えないであろう。一方で佐藤-テイト予想の解決を一つの〈歴史的出来事〉として捉えるならば、本稿で語られる内容は安田氏・千田氏の稿 [安田・千田] で語られる内容と互いに補完し合って一つの壮大な物語を紡ぎ出しているとも言える。

それでは以下、本稿の内容について簡単に説明しておこう。§0 ではイントロダクションとして、佐藤-テイト予想のステイトメント及びテイト、セールの依るオブザベーションについて纏めた。§1 から §4 が [HSBT] の解説に当たる部分である。執筆に当たっては、読者の便宜を考慮し各節のタイトル及び定理番号等はなるべく原論文と揃えるように努めた。原論文 [HSBT] はテイラー教授のホームページ^{*3} から入手出来るので、原論文と照らし合わせながら読んでいただくと感覚が掴みやすいのではないかと期待している。詳しい内容は本文に譲るが、各節の内容は概ね以下の通りである。§1 ではカラビ-ヤウ多様体 (CALABI-YAU varieties) のある特別な族に関する代数幾何学を展開する。特に特異点でのモノドロミーの様子を詳しく観察する。§2 では所謂 (ℓ, ℓ') トリック (ℓ, ℓ') -trick を実行するために用いられるモレ-バイイーの定理 (MORET-BAILLY's theorem) (を拡張したもの) を導入し、これを如何にして (ℓ, ℓ') トリックに応用するかを概観する。[HSBT] のハイライトたる §3 では、§1 で考察したカラビ-ヤウ超曲面族の局所系 $\{V[N]_t\}_t$ に於けるレベル構造を指定した“モジュライ空間”に、§2 で導入したモレ-バイイーの定理の変形版を適用することに依って (ℓ, ℓ') トリックを実行し、潜在的モジュラー性定理を証明する。§4 では、潜在的モジュラー性定理を楕円曲線の対称積 L 関数に適用することに依って、その有理型解析接続性及び零点の分布を考察する。この結果とテイト-セールのオブザベーションを組み合わせることで佐藤-テイト予想は自然に導かれる。付録として、カラビ-ヤウ族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ から得られるモチーフ V_t に付随する L 関数の解析接続性と関数等式に関する結果及び、[HSBT] の初期の稿に掲載されていた潜在的モジュラー性定理の証明について簡単に纏めた。

個人的な意見ではあるが、潜在的モジュラー性定理 (及び (ℓ, ℓ') トリック) 自体は大雑把なイメージだけならば誰でも容易に掴むことの出来る、非常に“楽しい”議論である。しかしその一方で、精密に証明しようとするとは複雑な条件や技術的な困難が幾層にも折り重なり、幾分難解になってしまうという側面も併せ持つ (それでも [HSBT] の最新版では大分簡略化された)。この解説記事ではそういった技術的に難しい点についてもある程度コメントすることが求められているようにも思われるが、そうは言っても細々とした技術的注意を全てカバーしようとなると、著者の限られた能力の範疇では本稿を単なる原論文の和訳 (或いはそれにも満た

^{*3} <http://www.math.harvard.edu/~rtaylor/>

ないもの)へと貶めてしまう危険性が非常に高いと判断した。そこで、本稿では各節の前半でその節で議論されている内容をあまり数学的厳密性に拘らずに“直観的”かつ“大雑把”に纏め、後半で定理の正確なステイトメントや技術的注意点、証明の概略についてコメントするという形式を採ることとした。したがって議論の概観のみに興味のある方は、各節の最初の方の小節を拾い読みしていただくだけでもおよその雰囲気くらいは感じ取っていただけるようになっている(筈である)。また、主要テーマたる潜在的モジュラー性定理及び (ℓ, ℓ') トリックには直接関係しないが興味深いと思われる事柄(或いは単に著者が個人的に面白いと思った話題)を「雑談」として纏めることとした。書き直しを進めていくうちに「雑談」の部分が大幅に膨れ上がってしまったので、潜在的モジュラー性定理及びその証明に一刻も早く辿り着きたい方は「雑談」は読み飛ばしていただいて全く差し支えない(寧ろその方が良いかもしれない)。

幸いにして、2007年の年始に東京工業大学に於いて開催された『佐藤-テイト予想研究集会』の講演内容を纏めたものとして、雑誌「数学のたのしみ」シリーズから『佐藤-テイト予想の解決と展望』が出版された^{*4} ([たのしみ]^{*5} 参照)。その中で、潜在的モジュラー性に関しても吉田輝義氏が非常に卓越した解説記事を執筆されている。本稿では[たのしみ]のように直観的イメージを大事にしつつ、[たのしみ]よりも細かい部分(証明の細部など)に関してもなるべく丁寧に記述するように試みた。初学者は細かい点に気を取られることなく数論幾何学最先端の研究の雰囲気を存分に味わうことが出来、一方でこの分野に関心のある方(或いは専門家の方)は証明の際の技術的なテクニックなど細かい点までじっくり堪能出来る、そんな「痒いところに手が届く」解説記事を理想として書いたつもりである。そうは言っても著者の理解もまだまだ未熟故、本稿がその目論見をどの程度実現出来ているか甚だ心許ないが、その点についてはこの記事を読んだ皆様の反応を待つ以外にあるまい。

当初この報告書の執筆依頼を受けた際は、[HSBT]のあまりに緻密かつ複雑な論理展開に正直なところ何度も根を上げそうになった。しかしながら、それでいて (ℓ, ℓ') トリックの何とも言えぬ奥深い味わいに不思議と惹き付けられ続けていたのもまた疑いようの無い事実である。難解な言葉達で常に読者を幻惑しつつ、その不思議な魅力で惹き付けて已まぬその世界観はまるでルイス・キャロルの『不思議の国のアリス』[Carol]のようですらある。さながら『佐藤-テイト予想』という〈白ウサギ〉を追いかけ行ったら、『潜在的モジュラー性定理』という〈不思議の国〉の魅力に迷い込んでしまった、と言ったところであろうか。

本稿の唯一にして最大の目的はこの (ℓ, ℓ') トリックの織り成す〈不思議の国〉の魅力を一人でも多くの方と共有することであり、著者としてはその目的のみを原動力として執筆作業を乗り越えたと言っても過言ではない。本稿を通じて少しでも多くの方が潜在的モジュラー性と

^{*4} 日本数学会 2009 年度年会で、伊藤哲史氏に依り佐藤-テイト予想の解決に関する非常に卓越した企画特別講演がなされたことも付記しておこう。

^{*5} 良質な数学的話題を長年に渡って提供し続けて下さった「数学のたのしみ」シリーズが、本号を持ってその歴史に一旦幕を下ろされたことは一読者として非常に残念である。長い間ありがとうございました。

(ℓ, ℓ') トリックが紡ぎ出す〈不思議の国〉の魔力に惹き寄せられ、ほんのわずかの間だけでも共に“迷い込んで”みていただけたならば、この拙い記事もその役目を全うしたこととなろう(本当に路頭に迷われてしまっても困るが).

大分前口上が長くなってしまった. さあ, そろそろ潜在的モジュラー性の〈不思議の国〉へ旅立とう.

目次

0	イントロダクション —— 佐藤-テイト予想について	7
0.1	佐藤-テイトの $\sin^2 \theta$ 予想	7
0.2	楕円曲線の L 関数 と テイト-セールのオブザベーション	9
0.3	証明の方針	17
1	超曲面の或る族 —— <i>A family of hypersurfaces</i>	18
1.1	カラビ-ヤウ族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ と (ℓ, ℓ') トリック	19
1.2	カラビ-ヤウ族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ のモノドロミー解析	23
1.3	ガロワ表現 $V_{\ell, t}$ の諸性質	29
2	代数的整数論を少々 —— <i>Some algebraic number theory</i>	31
2.1	モレ-バイイーの定理 と 潜在的モジュラー性	31
2.2	モレ-バイイーの定理の変形版 と モジュライ空間の幾何学的連結性	39
3	潜在的モジュラー性 —— <i>Potential modularity</i>	42
3.1	RAESDC 表現と付随するガロワ整合系	43
3.2	GS_{p_n} 表現の潜在的モジュラー性定理	46
3.3	対称積表現の潜在的モジュラー性	54
4	種々の応用 —— <i>Applications</i>	59
4.1	総実代数体上のアーベル多様体の対称積 L 関数	59
4.2	佐藤-テイト予想の証明	60
	結びにかえて	68
	参考文献	70
	付録 A V_t の L 関数の関数等式について	73
	付録 B 潜在的モジュラー性定理の証明 (初期型)	75

0 イン트로ダクション —— 佐藤-テイト予想について

佐藤-テイト予想とは、非常に大雑把な言い方をすれば L 関数の零点の虚部の分布 について述べた極めて神秘的な予想である。この予想は、テイト及びセールのオブザベーションに依って無限個の高次 L 関数の解析接続性及び零点の配置の問題 に帰着されてしまう。本節では、[HSBT] の難解な (それでいて魅力的な) 世界に “迷い込む” 前のウォーミング・アップとして、〈佐藤-テイト予想の誕生と変遷の物語〉を紐解いていくこととしよう。

佐藤-テイト予想を巡る物語はいくら掘り下げても飽くことがないが、本稿の目標はあくまで「佐藤-テイト予想の証明の方針を概観すること」であるので、断腸の思いではあるがこの節は簡潔に纏めざるを得ない。佐藤-テイト予想の歴史的背景などより深いことを知りたい方は、例えば [たのしみ] の黒川信重先生の記事などをご覧になって下さい。

0.1 佐藤-テイトの $\sin^2 \theta$ 予想

それでは早速楕円曲線の 佐藤-テイト予想 (SATO-TATE conjecture) を定式化しよう。細かい条件設定の仕方には色々なヴァリエーションがあり得るが、ここでは本勉強会に於ける安田正大氏の講演でなされた定式化に従うこととする。

F を代数体とし、 E/F を F 上定義された楕円曲線とする。 F の有限素点 v に対して、その剰余体 $\kappa(v)$ の位数を q_v とする。さらに良い還元を持つ有限素点 v に対し、楕円曲線 E の v での還元を E_v と書く。

さて、良い還元を持つ有限素点 v に対し、 E_v の $\kappa(v)$ -有理点の集合 $E_v(\kappa(v))$ の位数と $1 + q_v$ との “誤差項” $a_v = 1 + q_v - \sharp(E_v(\kappa(v)))$ は不等式 $|a_v| < 2\sqrt{q_v}$ を満たす (ハッセ (HASSE) の定理)。したがって誤差項 a_v は或る実数 θ_v を用いて

$$a_v = 2\sqrt{q_v} \cos \theta_v$$

と書き表される。楕円曲線 E の L 関数 $L(s, E) = \prod_v L_v(s, E)$ は、良い還元を持つ素点 v での局所因子が誤差項 a_v を用いて

$$\begin{aligned} L_v(s, E) &= (1 - a_v q_v^{-s} + q_v^{1-2s})^{-1} \\ &= \{(1 - e^{\sqrt{-1}\theta_v} q_v^{1/2-s})(1 - e^{-\sqrt{-1}\theta_v} q_v^{1/2-s})\}^{-1} \end{aligned}$$

で与えられたことを思い出しておこう*6。

佐藤-テイト予想とは、この実数 $\{\theta_v\}_v$ が如何に分布するかについての予想であり、端的に言えば “誤差項” a_v が如何に分布しているかを予言するものである。

*6 θ_v の範囲を区間 $[0, \pi]$ などに指定して θ_v の不定性をなくしてしまうこともよく行われるが、取り敢えずそのような制限は設けないこととする。

予想 0.1 (楕円曲線の佐藤-テイト予想). E/F を代数体 F 上の虚数乗法を持たない楕円曲線とする. また, a, b を $0 < b - a < 2\pi$ なる実数とする. さらに, F の良い還元を持つ有限素点 v に対し, 上記のようにして実数 θ_v を構成しておく. このとき, 以下が成立する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{v: \text{良い有限素点} \mid q_v \leq n, \theta_v \in [a, b]\} + \#\{v: \text{良い有限素点} \mid q_v \leq n, -\theta_v \in [a, b]\}}{\#\{v: \text{良い有限素点} \mid q_v \leq n\}} = \int_a^b \frac{2}{\pi} \sin^2 \theta d\theta \quad (0.1)$$

(但し θ_v は modulo $2\pi\mathbb{Z}$ で考える).

◇

注意 1. E が虚数乗法を持つ場合は, θ_v の分布はこのようにはならない^{*7}.

◆

雑談 2. 元々佐藤幹夫は, 保型形式の q 展開に於けるフーリエ係数を極形式表示した際の偏角 θ_n について研究してゆく中で, その分布が $\sin^2 \theta$ 関数に従うことを膨大な計算結果に基づいて数値的に予想したのであった (例えば ラマヌジャン数 (RAMANUJAN number) $\tau(p)$ の偏角の分布についても同様の予想がある. この予想は未だに未解決).

一方でテイトは, 重さ 2 の保型形式の場合には対応する楕円曲線を考えることで幾何学的な考察が可能となることに着目した (例えば E が $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線の場合には, 谷山-志村予想の解決に因って E はモジュラーであるから, 誤差項 a_p は対応する保型形式 f_E の q 展開 $f_E = \sum_{n=1}^{\infty} c_n q_N^n$ のフーリエ係数 c_p と対応する). この様な視点からテイトは, 楕円曲線の場合には ハッセ-ヴェイユ ゼータ関数 という幾何学的なゼータ関数の解析的性質を調べることに依って佐藤幹夫の予想した $\sin^2$ 型の分布に “理論的な” 根拠を与えることが出来ることを見出し, 佐藤幹夫の予想を解決するための指針を示したのである (詳細は §0.2.1 参照).

以上のような背景から, 楕円曲線に関する予想の場合に限って「佐藤-テイト予想」と呼び, 保型形式のフーリエ級数に関する予想は単に「佐藤予想」と呼ぶことが慣例となっているようである ([たのしみ] の黒川先生の記事も参照のこと). なお, 分布の形が特徴的であるため「佐藤の $\sin^2 \theta$ 予想」「佐藤-テイトの $\sin^2 \theta$ 予想」等と呼ばれることもある^{*8}.

◆

[HSBT] では,

(仮定 1) F は総実代数体である.

(仮定 2) E の j -不変量が整数でない.

^{*7} この場合は虚数乗法論に依り分布が決定されている.

^{*8} 伊藤哲史氏の講演活動等に依り, 巷であまりにも有名となってしまった話題なので著者としても一言コメントせざるを得ないが, $\sin^2 \theta$ 関数と銅鐸及び三上山等の形が奇妙なほど似通っていること (加藤和也氏の指摘だそうです) から, 「弥生人と佐藤-テイト予想の関係」等についても興味深い考察 (想像?) がなされていたりもしている. ただ, この話題に深入りすると人類の根源まで遡る壮大な物語を辿らねばならない危険性が非常に高いので, 本稿では残念ながらこれ以上深入りしないことにする.

カラビ-ヤウ多様体の或る族 と 潜在的保型性 —佐藤-テイト予想の証明に向けて— 9

という仮定の下で佐藤-テイト予想が示されている. このうち, (仮定 2) は完全に技術的な仮定であり, 近い将来のうちに除かれるのではないかと期待されている (後に詳しく述べよう). したがってテイラー達の不斷の努力の結果, 現時点で既にかかなり一般的な状況下で佐藤-テイト予想は解決された, と言って差し支えなからう.

0.2 楕円曲線の L 関数 と テイト-セールのオブザベーション

佐藤幹夫は膨大な量の計算データから θ_v の分布が $\frac{2}{\pi} \sin^2 \theta d\theta$ に従うことを数値的に予想した. この予想に対する“理論的な根拠”を考え出したのが ジョン・テイト (John TATE) である (さらに精密化したのがセール). § 0.2 では彼等が行ったオブザベーションを振り返ってみることにしよう.

0.2.1 ハッセ-ヴェイユ ゼータ関数 と テイトのオブザベーション

ジョン・テイトは, 彼自身が提出した ハッセ-ヴェイユ ゼータ関数 (HASSE-WEIL *zeta function*) の極の位数と代数的サイクルに関する所謂 テイト予想 (TATE *conjecture*) に基づいて, 佐藤幹夫が既に数値的に提出していた $\sin^2 \theta$ 予想に対する“理論的な”根拠を与えた. 以下, その オブザベーション を [Tate1] に従って概観しよう.

X を代数体 F 上の d 次元非特異射影代数多様体とし, v を良い還元を持つ素点とする (即ち, v での還元 X_v が再び代数多様体であるとする). v の剰余体 $\kappa(v)$ の位数を q_v とおく. X_v の 合同ゼータ関数 (*congruent zeta function*) を

$$Z(X_v, T) = \exp \left(\sum_{m \geq 1} \frac{\#X_v(\mathbb{F}_{q_v^m})}{m} T^m \right)$$

で定義し, X の (分岐局所因子を除いた) ハッセ-ヴェイユ ゼータ関数を

$$\zeta_X(s) = \prod_v Z(X_v, T)|_{T=q_v^{-s}}$$

と定義する ($X_v(\mathbb{F}_{q_v^m})$ は代数多様体 X_v の $\mathbb{F}_{q_v^m}$ -有理点全体のなす集合).

このとき エタール・コホモロジー理論 (*étale cohomology theory*) に依り合同ゼータ関数は

$$Z(X_v, T) = \prod_{i=0}^{2d} P_i(X_v, T)^{(-1)^{i-1}}$$

と書き表される. 但し Frob_v を v に対する幾何学的フロベニウス元とすると $P_i(X_v, T)$ は

$$P_i(X_v, T) = \det(\text{id} - \text{Frob}_v T \mid H_{\text{ét}}^i(X_v \times_{\text{Spec } \kappa(v)} \overline{\text{Spec } \kappa(v)}, \mathbb{Q}_\ell))$$

で与えられる多項式 (ヴェイユ予想 (WEIL conjecture) の一部, レフシェッツ 不動点定理 (LEFSCHETZ fixed point theorem) の直接の帰結). したがって

$$\Phi_i(X, s) = \prod_v P_i(X_v, T)|_{T=q^{-s}}^{-1}$$

とおくことで ハッセ-ヴェイユ ゼータ関数を

$$\zeta_X(s) = \prod_{i=0}^{2d} \Phi_i(X, s)^{(-1)^i}$$

と分解することが出来る. テイト は $\Phi_i(X, s)$ の極の位数について次の予想を提出した.

予想 0.2 (テイト予想). $\bar{X} = X \times_{\text{Spec } F} \text{Spec } \bar{F}$ の余次元 i の代数的サイクルのなす自由アーベル群 $Z^i(\bar{X})$ を, コホモロジー同値関係に依って割った剰余群を $\mathfrak{A}^i(\bar{X})$ とする. また, F 上定義される代数的サイクルに依って生成される $\mathfrak{A}^i(\bar{X})$ の部分アーベル群を $\mathfrak{A}^i(X)$ とおく. このとき, $\mathfrak{A}^i(X)$ の階数は $\Phi_{2i}(X, s)$ の $s = 1 + i$ に於ける極の位数と等しい. $\diamond$

以上の考察を踏まえて, 楕円曲線 E/F の m 階直積 E^m に付随する ハッセ-ヴェイユ ゼータ関数の Φ_i 因子を考えよう. 楕円曲線 E に於いては,

$$\begin{aligned} P_0(E_v, T) &= 1 - T \\ P_1(E_v, T) &= (1 - q_v^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{-1}\theta_v} T)(1 - q_v^{\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{-1}\theta_v} T) \quad (0 \leq \theta_v \leq \pi) \\ P_2(E_v, T) &= 1 - q_v T \end{aligned}$$

と計算されることはよく知られているので, キュネットの公式 (KÜNNETH formula) を用いて $P_i(E_v^m, T)$ を計算し, 適当に整理することで各 Φ_i 因子は

$$\Phi_i(E^m, s) = \prod_{0 \leq \nu \leq [i/2]} \left(L_{i-2\nu} \left(s - \frac{i}{2} \right) \right)^{\binom{m}{\nu} \binom{m}{i-\nu}} \quad (0 \leq i \leq 2m) \quad (0.2)$$

と計算出来る. 但し $[x]$ は $x \in \mathbb{R}$ を超えない最大の整数, $\binom{k}{\ell}$ は二項係数 ($\ell < 0$ または $\ell > k$ の時は 0 とする) を表し, $L_\mu(s)$ は

$$L_\mu(s) = \begin{cases} \prod_v (1 - q_v^{-s})^{-1} & \mu = 0 \text{ のとき,} \\ \prod_v \{ (1 - e^{\sqrt{-1}\mu\theta_v} q_v^{-s}) (1 - e^{-\sqrt{-1}\mu\theta_v} q_v^{-s}) \}^{-1} & \mu \geq 1 \text{ のとき,} \end{cases}$$

で定まる “ L 関数” とする. さて, E が虚数乗法を持たないことから $\mathfrak{A}^i(E^m)$ の階数は

$$\text{rank}_{\mathbb{Z}} \mathfrak{A}^i(E^m) = \text{rank}_{\mathbb{Z}} \mathfrak{A}^i(\bar{E}^m) = \binom{m}{i}^2 - \binom{m}{i-1} \binom{m}{i+1}$$

カラビ-ヤウ多様体の或る族 と 潜在的保型性 —佐藤-テイト予想の証明に向けて— 11

と計算されるので、テイト予想 (予想 0.2) を仮定すると $\Phi_{2i}(E^m, s)$ の $s = 1 + i$ での極の位数は $\binom{m}{i}^2 - \binom{m}{i-1}\binom{m}{i+1}$ 。したがって、各 $L_\mu(s)$ の $s = 1$ での極の位数を c_μ とすると、(0.2) と併せて帰納的に

$$c_0 = 1, c_2 = -1, c_{2\mu} = 0 \quad \text{for } \mu \geq 2$$

が得られる。ここでテイトは「形式的に」 θ_v の密度関数 $f(\theta)$ 、即ち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{v: \text{良い有限素点} \mid q_v \leq n, \theta_v \in [a, b]\} + \#\{v: \text{良い有限素点} \mid q_v \leq n, -\theta_v \in [a, b]\}}{\#\{v: \text{良い有限素点} \mid q_v \leq n\}} = \int_a^b f(\theta) d\theta$$

を満たす $f(\theta)$ が $\{c_\mu\}_{\mu=0}^\infty$ 達を用いて

$$f(\theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu \cos \mu\theta$$

というフーリエ級数展開で与えられる筈であると考え^{*9}、さらに $f(\theta)$ が対称関係式 $f(\theta) = f(\pi - \theta)$ を満たす (即ち任意の μ に対して $c_{2\mu-1} = 0$) と 仮定する ことで、密度関数 $f(\theta)$ が

$$f(\theta) = \frac{1}{\pi}(1 - \cos 2\theta) = \frac{2}{\pi} \sin^2 \theta$$

と計算されることを指摘した。

$f(\theta) = f(\pi - \theta)$ と言う (勝手に付け加えた) 仮定について、テイトは「何ら正当性は無い (had no justification)」と述べている。しかし彼の叙述を逆手に取れば、この一見不可思議な仮定 $f(\theta) = f(\pi - \theta)$ に解析的な正当性を与えさえすれば、佐藤の $\sin^2 \theta$ 予想は解決されることになってしまうのである。 c_μ の定義を思い出すと、仮定 $f(\theta) = f(\pi - \theta)$ は全ての奇数 $2\mu - 1$ に対し、 $L_{2\mu-1}(s)$ が $s = 1$ で零点も極も持たないという L 関数の解析的性質 を表していることに他ならない。斯くして「($L_{2\mu-1}(s)$ のような) 無限個の L 関数達の解析的性質を調べることで、 $\sin^2 \theta$ 予想は解決出来る筈である」という佐藤-テイト予想へのアプローチが初めて提示されたのであるが、この哲学は [HSBT] に於ける佐藤-テイト予想の解決に至るまで脈々と受け継がれていくこととなる。

0.2.2 素数定理 と セールの条件

テイトの考察に依って佐藤-テイト予想を解決するためのアプローチが朧げながら見えてきたように感じられるが、彼のオブザベーションは代数的サイクルと L 関数の極の位数に関す

^{*9} これは発見的な (heuristic) 考察であり、この様にフーリエ級数表示出来ると言う解析的な裏付けは確かめていないとテイトは述べている。詳しくは [Tate1] 参照。

るこれまた非常に深い予想 (予想 0.2) の帰結を利用してしまっている等, そのままでは取り扱いが難しい点が散見された. ジャン-ピエール・セール (Jean-Pierre SERRE) は, 「無限個の L 関数の解析的性質を調べる」というテイトのアイデアの精神を受け継ぎつつ, 「楕円曲線の対称積 L 関数 $L(s, E, \text{Symm}^m)$ 」という別の“扱いやすい” L 関数を用いて佐藤-テイト予想が成立するための十分条件を厳密に定式化した (セールの条件, 命題 0.4). 彼の与えた条件は, ジャック・サロモン・アダマール (Jacques Salomon HADAMARD) 及び シャルル-ジャン・ド・ラ・ヴァレ-プーサン (Charles-Jean DE LA VALLÉE-POUSSIN) に依る素数定理の証明を直接拡張したものであり, 議論の流れも非常に見通しの良いものであった. ここでは先ずアダマール, ド・ラ・ヴァレ-プーサン等に依る素数定理の証明方法を振り返った後, セールに依る佐藤-テイト予想へのアプローチを追従してみよう.

さて, 彼の有名な素数定理 (prime number theorem)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \#\{p: \text{素数} \mid p \leq x\} \sim \frac{x}{\log x}$$

はリーマンゼータ関数 (RIEMANN zeta function) $\zeta(s)$ の解析的性質, 即ち

(#) $\zeta(s)$ は $\text{Re}(s) \geq 1$ の範囲で一位の極 $s = 1$ を除いて正則に解析接続され, この範囲で零点を持たない^{*10}

から導かれるのであった.

素数定理の証明 (概略). リーマンゼータ関数 $\zeta(s) = \prod_{p: \text{素数}} (1 - p^{-s})^{-1}$ の対数微分 (logarithmic differential)

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \log \zeta(s) &= \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{p: \text{素数}} \frac{p^{-s} \log p}{1 - p^{-s}} \\ &= - \sum_{p: \text{素数}} p^{-s} \log p \sum_{k=0}^{\infty} (p^{-s})^k \\ &\quad \left(\text{ここで, } \frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + \dots \quad \text{for } |x| < 1 \text{ を用いた.} \right) \\ &= - \sum_{p, k \geq 1} \frac{\log p}{p^{ks}} \end{aligned}$$

の主要部 ($k = 1$ の部分) に現れるディリクレ級数 (DIRICHLET series)

$$G(s) = \sum_p \frac{\log p}{p^s}$$

^{*10} 勿論実際には複素平面全体に有理型に解析接続される.

を考える. 初等的な解析に依り, 残りの部分 $\sum_{p,k \geq 2} \frac{\log p}{p^{ks}}$ は $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$ の範囲で絶対収束し, 特に $\operatorname{Re}(s) \geq 1$ で正則関数 $\phi(s)$ を定める. つまり

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -G(s) - \phi(s) \quad (0.3)$$

と書ける. しかも $\zeta(s)$ の解析的性質 (‡) に因って, その対数微分 $\zeta'(s)/\zeta(s)$ も $\operatorname{Re}(s) \geq 1$ の範囲で $s = 1$ を除いて正則かつ零点を持たないことが分かる. さらに $\zeta'(s)/\zeta(s)$ は $s = 1$ で一位の極を持ち, その留数は -1 ($s = 1$ での $\zeta(s)$ の位数) である. したがって (0.3) と併せて, $G(s)$ は $s = 1$ で一位の極を持ち, その留数が 1 となることが分かる.

ここで, 所謂 タウバー型定理 (TAUBERIAN theorem) と呼ばれる解析学の定理を導入しよう. タウバー型定理とは, 大雑把に言えば「ディリクレ級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ の $s = 1$ での解析的性質から分子の和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の漸近的な値を評価する」という類の定理である. 今回は ノーバート・ウィーナー (Norbert WIENER), 池原 止戈夫 等に依って示された以下の定理を用いる.

定理 0.3 (ウィーナー-池原のタウバー型定理). $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ を複素係数のディリクレ級数とする. $F(s)$ は $\operatorname{Re}(s) \geq 1$ の範囲で $s = 1$ を除き正則に解析接続され, $s = 1$ では高々一位の極を持つとする. さらに, 正の実数を係数とするディリクレ級数 $F^+(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^+}{n^s}$ で以下の性質を満たすものが存在するとしよう:

- i) $|a_n| \leq a_n^+$.
- ii) $F^+(s)$ は $\operatorname{Re}(s) > 1$ で (絶対) 収束.
- iii) $F^+(s)$ は $\operatorname{Re}(s) \geq 1$ の範囲で $s = 1$ を除き正則に解析接続され, $s = 1$ では頂度一位の極を持つ. さらに, $s = 1$ での留数は正.

このとき

$$\sum_{m \leq n} a_m = (\operatorname{Res}_{s=1} F(s)) n + o(n) \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つ. 但し, $\operatorname{Res}_{s=1} F(s)$ は $F(s)$ の $s = 1$ での留数を表す ($F(s)$ が $s = 1$ で正則の場合は $\operatorname{Res}_{s=1} F(s) = 0$ とする). ◇

定理 0.3 を $F = F^+ = G$ に適用しよう. すると, $\operatorname{Res}_{s=1} G(s) = 1$ と併せて

$$\sum_{p \leq n: \text{素数}} \log p = n + o(n) \quad (n \rightarrow \infty)$$

が得られるので, アーベルの総和トリック (ABEL's summation trick, 雑談 3 参照) に依り

$$\sum_{p \leq n: \text{素数}} 1 = \#\{p: \text{素数} \mid p \leq n\} = \frac{n}{\log n} + o\left(\frac{n}{\log n}\right) \quad (n \rightarrow \infty)$$

が導かれる. □

さて、テイトが考察した楕円曲線の直積 E^m に対する ハッセ-ヴェイユ ゼータ関数の Φ_i -因子 $\Phi_i(E^m, s)$ の代わりにセールが用いたのは、楕円曲線の 対称積 L 関数 $L(s, E, \text{Symm}^{m-1})$ ($m \geq 2$) と呼ばれる m 次の L 関数達であった. $L(s, E, \text{Symm}^{m-1})$ という L 関数は、良い還元を持つ有限素点に於いてその局所因子が

$$L_v(s, E, \text{Symm}^{m-1}) = \prod_{k=0}^{m-1} (1 - e^{\sqrt{-1}k\theta_v} e^{\sqrt{-1}(m-1-k)\theta_v} q_v^{\frac{m-1}{2}-s})^{-1}$$

で与えられ、 $\text{Re}(s) > \frac{m+1}{2}$ で絶対収束し、この範囲で正則となる ($m=2$ の場合は通常の L 関数 $L(s, E)$ と一致する). セールは全ての対称積 L 関数 $L(s, E, \text{Symm}^{m-1})$ ($m \geq 2$) がリーマン ゼータ関数の性質 (♯) と同様の「良い解析的性質」を満たすならば、佐藤-テイト予想が導かれるということを示したのであった. 厳密には以下の通りである.

命題 0.4 (セールの条件). E/F を代数体 F 上の虚数乗法を持たない楕円曲線とする. 条件

(*)_m E の m 次対称積 L 関数 $L(s, E, \text{Symm}^{m-1})$ が $\text{Re}(s) \geq \frac{m+1}{2}$ の範囲に正則に解析接続され、この範囲で零点を持たない

が全ての 2 以上の自然数 m に対して成立するならば、 E に対して佐藤-テイト予想 (予想 0.1) は成り立つ. ◇

計算の都合上、以下の m 次 L 関数

$$L_{m-1}(s, E) = \prod_{v: \text{良い有限素点}} \prod_{j=0}^{m-1} \frac{1}{1 - e^{\sqrt{-1}(m-1-2j)\theta_v} q_v^{-s}}$$

を導入しよう. このとき (悪い還元を持つ素点及び無限素点での局所因子の項を除いて) $L(s + \frac{m-1}{2}, E, \text{Symm}^{m-1}) = L_{m-1}(s, E)$ となることが容易に分かるので、条件 (*)_m が全ての $m \geq 2$ に対して成立することと条件

(*)'_m L 関数 $L_{m-1}(s, E)$ が $\text{Re}(s) \geq 1$ の範囲に正則に解析接続され、この範囲で零点を持たない

が全ての $m \geq 2$ に対して成立することは同値である.

命題 0.4 の証明. $[0, 2\pi]$ に含まれる閉区間 $[a, b]$ の特性関数 $\chi_{[a, b]}$ を用いることに依って、(0.1) の左辺に現れる分数の分子は

$$\sum_{q_v \leq n} (\chi_{[a, b]}(\theta_v) + \chi_{[a, b]}(-\theta_v))$$

カラビ-ヤウ多様体の或る族 と 潜在的保型性 —佐藤-テイト予想の証明に向けて— 15

と表せる^{*11}. ここで $\chi_{[a,b]}(x)$ を周期 2π の周期関数と見做して, その フーリエ級数展開 (FOURIER expansion) を

$$\chi_{[a,b]}(x) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} c_{\mu} e^{\sqrt{-1}\mu x}$$

とすると, フーリエ係数 c_{μ} は良く知られているように $\{e^{\sqrt{-1}\mu x}\}_{\mu \in \mathbb{Z}}$ の正規直交性を用いて

$$c_{\mu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-\sqrt{-1}\mu x} \chi_{[a,b]}(x) dx = \begin{cases} \frac{b-a}{2\pi} & \mu = 0 \text{ のとき,} \\ \frac{e^{-\sqrt{-1}\mu b} - e^{-\sqrt{-1}\mu a}}{-2\pi\sqrt{-1}\mu} & \text{それ以外,} \end{cases}$$

と計算されるのであった. 一方, 直接計算に依り

$$\begin{aligned} \chi_{[a,b]}(x) + \chi_{[a,b]}(-x) &= 2c_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} (c_{\mu} + c_{-\mu})(e^{\sqrt{-1}\mu x} + e^{-\sqrt{-1}\mu x}) \\ &= 2c_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} (c_{\mu} + c_{-\mu})(S_{\mu}(x) - S_{\mu-2}(x)) \end{aligned}$$

が得られる. 但し $S_{\mu}(x)$ は

$$S_{\mu}(x) = \begin{cases} 0 & \mu = -1 \text{ のとき,} \\ 1 & \mu = 0 \text{ のとき,} \\ e^{\sqrt{-1}\mu x} + e^{\sqrt{-1}(\mu-2)x} + \dots + e^{-\sqrt{-1}(\mu-2)x} + e^{-\sqrt{-1}\mu x} & \mu \geq 1 \text{ のとき,} \end{cases}$$

で定められる関数. 高校数学などで良く扱われる「足し算の順序をずらす」議論を用いると

$$\begin{aligned} &\sum_{q_v \leq n} (\chi_{[a,b]}(\theta_v) + \chi_{[a,b]}(-\theta_v)) \\ &= (2c_0 - (c_2 + c_{-2}))\#\{q_v \leq n\} + \sum_{\mu \geq 1} (c_{\mu} + c_{-\mu} - c_{\mu+2} - c_{-\mu-2}) \sum_{q_v \leq n} S_{\mu}(\theta_v) \end{aligned}$$

が従う. さて, 対称積 L 関数 $L_{\mu}(s, E)$ ($\mu \geq 1$) の対数微分

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \log L_{\mu}(s, E) &= \frac{L'_{\mu}(s, E)}{L_{\mu}(s, E)} = - \sum_{q_v} \sum_{j=0}^{\mu} \frac{e^{\sqrt{-1}(\mu-2j)\theta_v} q_v^{-s} \log q_v}{1 - e^{\sqrt{-1}(\mu-2j)\theta_v} q_v^{-s}} \\ &= - \sum_{q_v} \sum_{j=0}^{\mu} e^{\sqrt{-1}(\mu-2j)\theta_v} q_v^{-s} \log q_v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{-1}k(\mu-2j)\theta_v}}{q_v^{ks}} \\ &= - \sum_{q_v, k \geq 1} \frac{S_{\mu}^{(k)}(\theta_v) \log q_v}{q_v^{ks}} \end{aligned}$$

^{*11} 記号を乱用して, 添字の $q_v \leq n$ は「 v が良い還元を持つ素点であって なおかつ $q_v \leq n$ 」を表すものとする.

(但し $S_\mu^{(k)}(x) = e^{\sqrt{-1}k\mu x} + e^{\sqrt{-1}k(\mu-2)x} + \dots + e^{-\sqrt{-1}k(\mu-2)x} + e^{-\sqrt{-1}k\mu x}$) の主要部 ($k = 1$ の部分) に現れるディリクレ級数

$$H_\mu(s) = \sum_{q_v} \frac{S_\mu(\theta_v) \log q_v}{q_v^s} \quad (\mu \geq 1)$$

にウィーナー-池原のタウバー型定理 (定理 0.3) とアーベルの総和トリック (雑談 3) を適用して、素数定理と全く同様にして

$$\sum_{q_v \leq n} S_\mu(\theta_v) = o\left(\frac{n}{\log n}\right)$$

が示される (条件 $(*)'_m$ に因り 各 $m \geq 2$ に対して $L_{m-1}(s, E)$ が正則かつ零点を持たないので、特に $s = 1$ でも正則で、 $\text{Res}_{s=1} L_{m-1}(s, E) = 0$ となる ことを用いた). 斯くして

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{q_v \leq n} (\chi_{[a,b]}(\theta_v) + \chi_{[a,b]}(-\theta_v))}{\#\{q_v \leq n\}} \\ &= 2c_0 - (c_2 + c_{-2}) + \sum_{\mu=1}^{\infty} (c_\mu + c_{-\mu} - c_{\mu+2} - c_{-\mu-2}) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{o(n/\log n)}{n/\log n} \\ &= 2c_0 - (c_2 + c_{-2}) \\ &= \frac{2(b-a)}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{-2\sqrt{-1}b} - e^{-2\sqrt{-1}a}}{2\sqrt{-1}} + \frac{e^{2\sqrt{-1}b} - e^{2\sqrt{-1}a}}{-2\sqrt{-1}} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{b - \frac{1}{2} \sin 2b}{2} - \frac{a - \frac{1}{2} \sin 2a}{2} \right) \\ &= \int_a^b \frac{2}{\pi} \sin^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

が得られる (一行目で素数定理 $\#\{q_v \leq n\} = n/\log n + o(n)$ を用いた). $\square$

証明を見れば、セールの条件 (命題 0.4) が完全に素数定理の証明の拡張となっていることは明らかであろう. この命題に依って、佐藤-テイト予想は条件 $(*)_m$ ($m \geq 2$) という L 関数の解析的性質を調べる問題 に完全に帰着されてしまったのである. 勿論既にテイトが示唆していた様に、佐藤-テイト予想の証明に当たっては無限個の L 関数についての解析的性質 $(*)_m$ ($m \geq 2$) を調べなければならないので、佐藤-テイト予想の証明には素数定理よりも遥かに困難で深遠な議論が必要とされることは想像に難くないだろう.

$\frac{2}{\pi} \sin^2 \theta d\theta$ という分布の形や、対称積 L 関数 $L_{m-1}(s, E)$ ($m \geq 2$) が登場する背景も、実は $SU(2)$ のハール測度 (HAAR measure) や既約表現という観点から極めて自然に理解出来るのであるが、これ以上野暮な説明を付け加えるは止めることにしよう. セールは [SerreA] で測度に関する一様分布性 (equidistribution) と L 関数の解析的性質との関係について感動

カラビ-ヤウ多様体の或る族 と 潜在的保型性 —佐藤-テイト予想の証明に向けて— 17

的なままでに簡潔かつ明快な説明を与えているので、興味のある方は [SerreA] の記述に直接触れ、その筆致を存分に味わっていただく方が遥かに有意義であると信ずるからである。

雑談 3. 折角なので素数定理の証明で用いた アーベルの総和トリック を復習しておこう。

命題 0.5 (アーベルの総和トリック). ある複素数 α に対し、複素数列 $\{b_n\}_{n=2}^{\infty}$ が

$$\sum_{n=2}^N b_n = \alpha N + o(N) \quad (N \rightarrow \infty) \quad (0.4)$$

を満たすとする。このとき

$$\sum_{n=2}^N \frac{b_n}{\log n} = \alpha \frac{N}{\log N} + o\left(\frac{N}{\log N}\right) \quad (N \rightarrow \infty)$$

が成立する。

◇

証明はいたって単純で、総和の取り方を巧妙にずらすだけである。

$S(N) = \sum_{n=2}^N b_n$, $\tilde{S}(N) = \sum_{n=2}^N b_n / \log n$ とおく。計算上の都合から $S(1) = 0$ とおくことにすると、簡単な計算に依り

$$\begin{aligned} \tilde{S}(N) &= \sum_{n=2}^N \frac{S(n) - S(n-1)}{\log n} = \sum_{n=2}^N \frac{S(n)}{\log n} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{S(n)}{\log(n+1)} \\ &= \frac{S(N)}{\log N} + \sum_{n=2}^{N-1} S(n) \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)} \right) \end{aligned}$$

が得られるので、後は最後の式の総和記号の部分が $o(N/\log N)$ ($N \rightarrow \infty$) となることを確かめればよいが、これは漸近評価 (0.4) を用いれば簡単に計算出来るのである。

詳細は [Lang] VIII 章 §3 の 命題 1 を参照。なお、この本には ウィーナー-池原のタウバー型定理 (定理 0.3) の証明及び密度定理への応用についても書かれているので、必要に応じて適宜参照されるのが宜しいかと思う。

◆

0.3 証明の方針

何はともあれ、§0.2 で見てきた議論から佐藤-テイト予想の証明は 条件 $(*)_m$ ($m \geq 2$) という無限個の L 関数 $L(s, E, \text{Symm}^{m-1})$ の解析的な性質に帰着されるが、これを直接調べるのは非常に難しい。ならば発想を転換して「 $L(s, E, \text{Symm}^{m-1})$ を 解析的性質を詳しく調べる事が出来る別の L 関数に取り替える ことで、この困難を解消出来ないか？」と考えてみよう。そのような都合の良い L 関数が本当にあるのか疑わしく思われるかもしれないが、実は保型 L 関数 がその有力な候補として挙げられるのである。

$\mathbb{A}_F$ を F のアデール環 (adèle ring) とする. このとき保型形式及び保型表現の理論から, $GL_m(\mathbb{A}_F)$ のカスピダル保型表現 Π に付随する保型 L 関数は m 次のオイラー積を持ち, $\operatorname{Re}(s) \geq 1$ の範囲に正則に解析接続され, しかもこの範囲で零点を持たないことが知られている. したがって各 $m \geq 2$ に対し

$$L(s + \frac{m-1}{2}, E, \operatorname{Symm}^{m-1}) = L(s, \Pi_m)$$

を満たすカスピダル保型表現 Π_m さえ構成出来てしまえば, セールの条件 (命題 0.4) に拠って佐藤-テイト予想の証明は完了してしまうのである. ところがこのような保型表現 Π_m を構成することは, 本質的に大域ラングランズ対応 (*Global Langlands Correspondence, GLC*) に於ける {ガロワ表現} $\rightarrow$ {保型表現} 方向の対応を構成していることに他ならず, 大域ラングランズ対応が確立していない現在では困難極まりない仕事となろうことは想像に難くない.

クローゼル, ハリス, シェパード-バロン, テイラー等に依る佐藤-テイト予想の証明も, $\operatorname{Gal}(\overline{F}/F)$ の (ℓ 進) ガロワ表現 $\operatorname{Symm}^{m-1} T_\ell E$ に対応する保型表現を直接構成する (即ち $\operatorname{Symm}^{m-1} T_\ell E$ のモジュラー性を直接示す) ことに依ってなされたわけではなく, F の適当な有限次拡大 F' への制限 $\operatorname{Symm}^{m-1} T_\ell E|_{\operatorname{Gal}(\overline{F}/F')}$ のモジュラー性を示す (即ち $\operatorname{Symm}^{m-1} T_\ell E$ の 潜在的 モジュラー性^{*12}を示す) ことに依ってなされている. $\operatorname{Symm}^{m-1} T_\ell E$ の潜在的モジュラー性を駆使して佐藤-テイト予想を解決するに至ったテイラー等の足跡を辿っていくことが, 本稿の残りの主要なテーマとなる.

1 超曲面の或る族 — A family of hypersurfaces

佐藤-テイト予想の歴史を振り返ったところで, いよいよ [HSBT] の内容を実際に見てゆくことにしよう.

第 1 節では, $\mathbb{Z}[\frac{1}{n+1}]$ 上の直積空間 $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^1$ に於いて方程式

$$Y: X_0^{n+1} + X_1^{n+1} + \dots + X_n^{n+1} = (n+1)tX_0X_1\dots X_n \quad (1.1)$$

で定義される超曲面族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ の代数幾何学を展開する. 但し, $t \in \mathbb{P}^1$ である^{*13}.

低次元の場合を考えてみると, $n = 2$ の場合は所謂 ヘッセ (HESSE) 型の標準形で表された楕円曲線族 $Y: X_0^3 + X_1^3 + X_2^3 = 3tX_0X_1X_2$, $n = 3$ の場合は $K3$ 曲面族 $Y: X_0^4 + X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 = 4tX_0X_1X_2X_3$ となり, いずれも以前から非常に良く研究されていた. カラビヤウ超曲面族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ はこの古典的な対象を自然に高次元化したものである. さらに,

^{*12} 《適当に体を拡大することでモジュラー性が生まれる》ことから, 潜在的モジュラー性 (*Potential Modularity*) の名称が付けられている.

^{*13} $t = \infty$ の時は, $Y_\infty: (n+1)X_0X_1\dots X_n = 0$ と考えることとする.

この超曲面族は セントラル-チャージ が $3(n-1)$ の $N=2$ ギンツブルク-ランダウ 理論 (GINZBURG-LANDAU theory) と密接に関係することが知られており、数理論理学の分野でも極めて重要な対象として位置づけられている ([LSW] 参照).

超曲面族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ のファイバーの中間次元 ℓ 進エタールコホモロジーをとることで n 次元 ℓ 進表現 $V_{\ell,t}$ が得られる. この $V_{\ell,t}$ 達から構成される ガロワ整合系 (GALOIS compatible system) を〈舞台〉として (ℓ, ℓ') トリックが展開される. 端的に言えば (ℓ, ℓ') トリックを実行するに当たっての〈舞台作り〉を行うのが本節の役割である.

本節の内容について簡単に触れておこう. 最初に本節の主役である超曲面族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ 及び付随する局所系 $\{V[N]_t\}_t$, $\{V_{\ell,t}\}_t$, $\{V_t\}_t$ を導入する. その後, 超曲面族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ を用いて如何にして (ℓ, ℓ') トリックを展開するか, その基本的なアイデアを概観する. 超曲面族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ の詳しい解析 (特にモノドロミーの解析) はその後で行うことにする.

本節では主に 複素代数幾何 や 代数解析 の手法に依るカラビ-ヤウ多様体の幾何学が展開される. この部分だけでも独立に興味を惹く内容だと思われるが, かなり長い議論が展開されるので, 潜在的モジュラー性定理 や 佐藤-テイト予想の証明 に興味のある方は, 取り敢えず局所系 $\{V_t\}_t$ の「モノドロミーが“大きい”」ということ (補題 1.11 参照. この性質は, §2 で登場する モレ-バイイーの定理 を適用する際に必要とされる極めて重要な性質である) 及び ℓ 進表現 $V_{\ell,t}$ の基本性質 (§1.3 参照) を確認した上で次節に進んでいただくことも十分可能であろう.

1.1 カラビ-ヤウ族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ と (ℓ, ℓ') トリック

Y を $\mathbb{Z}[\frac{1}{n+1}]$ 上方程式 (1.1) で定義される $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^1$ 内の超曲面とし, $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ を第二成分への射影とする. すると $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ は カラビ-ヤウ多様体 (CALABI-YAU variety) と呼ばれる多様体 (超曲面) の族を形成する^{*14}. $t \in \mathbb{P}^1$ 上の Y のファイバーを Y_t で表す.

以下に $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ の基本的な幾何学的性質を列挙しておく.

- μ_{n+1} を 1 の $(n+1)$ 乗根のなす群スキームとする. このとき, 射影 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ は $T_0 = \mathbb{P}^1 \setminus (\mu_{n+1} \cup \{\infty\}) / \mathbb{Z}[\frac{1}{n+1}]$ 上で滑らかとなる.
- $Y \setminus Y_\infty$ は正則スキーム.
- ζ を任意の 1 の $(n+1)$ 乗根 とするとき, Y_ζ は孤立特異点

$$\{[\alpha_0: \alpha_1: \dots: \alpha_n] \mid \alpha_i^{n+1} = 1 (0 \leq i \leq n), \alpha_0 \dots \alpha_n = \zeta^{-1}\}$$

^{*14} カラビ-ヤウ多様体の定義は, 例えば「標準束 (微分加群層の最高階外積) が自明かつコンパクトな複素ケーラー多様体 (KÄHLER manifold)」とするものが一般的と思われるが, 数理論理学の文脈等では微妙に異なる定義を採用することもあるので注意を要する. しかし, 本稿では何れにせよカラビ-ヤウ多様体の性質を表立って用いることはないのであまり神経質になる必要はない (注意 4 も参照のこと).

を持つ. これらは全て通常二次孤立特異点.

これらの性質は定義方程式から直ちに従う. 超曲面 Y には $\mathbb{Z}[\frac{1}{n+1}, \zeta_{n+1}]$ 上で群スキーム $H = \mu_{n+1}^{n+1}/\Delta(\mu_{n+1})$ (Δ は対角埋め込み) が

$$(\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n)[X_0: X_1: \dots: X_n] = [\zeta_0 X_0: \zeta_1 X_1: \dots: \zeta_n X_n]$$

に依って作用する (ζ_{n+1} は 1 の原始 $(n+1)$ 乗根). 特に H_0 を $\zeta_0 \zeta_1 \dots \zeta_n = 1$ を満たす元 $(\zeta_0, \dots, \zeta_n)$ のなす H の部分群とすると, H_0 は各ファイバー Y_t に作用する^{*15}. また, 各特異ファイバー Y_{ζ} に於いて, その二次孤立特異点達が H_0 の作用で推移的に移り合うことも直ちに分かる.

さて, $n+1$ と互いに素な整数 N に対して $\mathbb{P}^1$ 上の層 $V_n[N] = V[N] = (R^{n-1}\pi_*(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))^{H_0}$ を定義しよう. これは階数 n の局所自由層で, しかも $T_0 \times \text{Spec } \mathbb{Z}[\frac{1}{N(n+1)}]$ 上滑らかとなる. さらに, $\ell \nmid n+1$ なる素数 ℓ に対し ℓ 進層 $V_{n,\ell} = V_\ell = \left(\varprojlim_{m \rightarrow \infty} V[\ell^m]\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell$ を定義しよう^{*16}. ここで, $t \in T_0(F)$ (F は代数体) での $V[\ell]$, V_ℓ のヘンゼリアン・ストーク (HENSELIAN stalk) は $V[\ell]_t = H_{\text{ét}}^{n-1}(Y_t \times \text{Spec } \overline{F}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{H_0}$, $V_{\ell,t} = H_{\text{ét}}^{n-1}(Y_t \times \text{Spec } \overline{F}, \mathbb{Q}_\ell)^{H_0}$ となるので, 局所系 $\{V[\ell]_t\}_t$ 及び $\{V_{\ell,t}\}_t$ がエタール・コホモロジー (étale cohomology) を用いた絶対ガロワ群 $\text{Gal}(\overline{F}/F)$ の法 ℓ 表現 及び ℓ 進表現を与えていることを注意しておく. 最後に, 同様にして局所自由層 $V = (R^{n-1}\pi_*\mathbb{Z})^{H_0}$ も定義しておく.

さて, ここで一旦 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ の幾何学から離れて, この〈舞台〉上で繰り広げられる (ℓ, ℓ') トリックの大雑把な青写真を描くことで (ℓ, ℓ') トリックに対する感覚を養っておこう. とは言ってもいきなり (ℓ, ℓ') トリックを扱うのは敷居が高いと思われるので, 始めにウォーミング・アップとして (ℓ, ℓ') トリックの原型である ワイルズの $(3, 5)$ トリック (WILES' $(3, 5)$ -trick) を思い出すことにしよう ([Wiles1]. [山下1] も参照のこと). $(3, 5)$ トリックとは, $\mathbb{Q}$ 上で $E[3]$ が既約でないような準安定楕円曲線 E に対し, $E[5]$ のモジュラー性を示す際にワイルズが用いたテクニックであった. このトリックの要となるのは

$E'[3]$ が既約で $E'[5]$ が $E[5]$ と同型となるような準安定楕円曲線 E' を構成すること

である^{*17}. そうすれば図式 2 のようにモジュラー性持ち上げ定理 (MLT) 及び法 5 還元を続けて用いることに依って (「法 3 でのモジュラー性を“持ち上げて”法 5 に“落とす”」),

^{*15} 定義方程式を見れば, $t=0$ の場合は H 全体が Y_0 に作用することも分かる.

^{*16} 本節では次元 n を固定して考えるため, 次元を表す下付き添字 n を省略して表記するが, 潜在的モジュラー性定理 (定理 3.1) の証明に於いては色々な次元の表現を同時に扱うため, 次元を表す添字 n をきちんと把握することが重要となってくる.

^{*17} $E'[3]$ の既約性 (及び楕円曲線 E' の準安定性) は, ワイルズの示したモジュラー性持ち上げ定理で必要な仮定であることに注意. なお, $E[3]$ 及び $E'[3]$ は ラングランズ-タンネルの定理 (LANGLANDS-TUNNEL'S theorem) に拠りモジュラーとなる. 詳しくは [山下1] 参照.

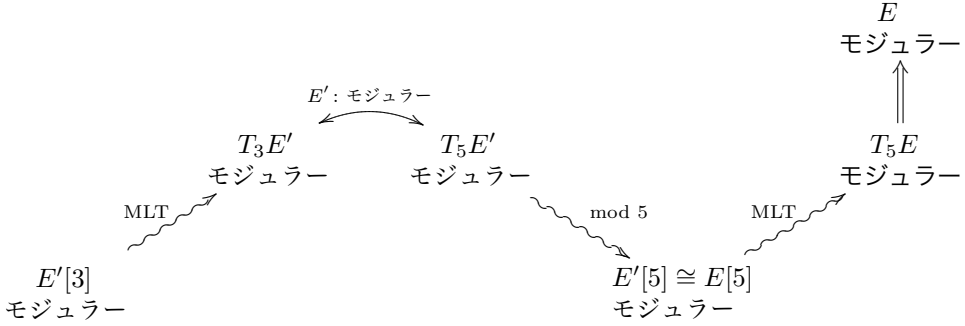


図2 ワイルズの (3,5) トリックの模式図

$E'[3]$ のモジュラー性が $E'[5]$ に “感染” する (!) さらには $E[5]$ の既約性から^{*18}, 再びワイルズのモジュラー性持ち上げ定理に依って $E[5] \cong E'[5]$ のモジュラー性が T_5E に “持ち上がり” 結果として E のモジュラー性が導かれる. 斯くしてワイルズは $\mathbb{Q}$ 上準安定な楕円曲線に対して 谷山-志村予想 (TANIYAMA-SHIMURA conjecture) を証明し, フェルマー予想の解決に向けて大きな一歩を踏み出したのであった.

これから本稿を通じて扱う (ℓ, ℓ') トリックの議論では本質的に

$V[\ell']_t = H_{\text{ét}}^{n-1}(Y_t \times \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}, \mathbb{Z}/\ell'\mathbb{Z})^{H_0}$ のモジュラー性が分かっており (なおかつモジュラー性持ち上げ定理の条件を満たし), $V[\ell]_t = H_{\text{ét}}^{n-1}(Y_t \times \text{Spec } \overline{\mathbb{F}}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^{H_0}$ が考えている法 ℓ 表現 $\bar{\rho}$ と同型であるような $t \in T_0$ を構成すること

を行う. (3,5) トリック で適当な楕円曲線 E' を構成することがキーポイントであったことと比較されたい. このような t が構成出来れば, 図式 3 の様にワイルズの (3,5) トリックを真似して「法 ℓ' でのモジュラー性を “持ち上げて” 法 ℓ に “落とす” という道程を辿ることに依り $V[\ell']_t$ のモジュラー性が $\bar{\rho}$ に “感染” するのである (!) ワイルズはモジュラー曲線の有理点を考察することで楕円曲線 E' を直接構成したが, 我々は件の $t \in T_0$ を構成するために モレ-バイイーの定理 という数論幾何学的な定理を利用することになる. その詳細は次節 (§ 2.1) で解説することにしよう.

図式 2, 3 を見比べていただければ, カラビ-ヤウ族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ を用いた潜在的モジュラー性の証明のテクニック (即ち (ℓ, ℓ') トリック) がワイルズの (3,5) トリックの “変奏” (variant) となっていることは一目瞭然であろう. 勿論, 実際にはその過程に様々な困難が立ち塞がるの

^{*18} $E[3]$ が既約でないとき $E[5]$ が既約となるのは バリー・メイザー (Barry MAZUR) の定理に由る. [Mazur1], [Mazur2] 参照.

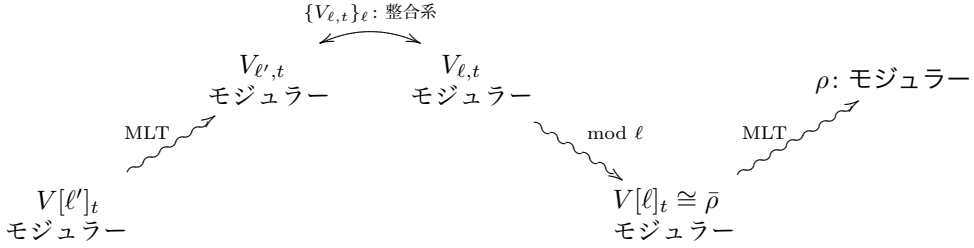


図3 カラビ-ヤウ 族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ を用いた (ℓ, ℓ') トリックの“大雑把な”模式図

で, (ℓ, ℓ') トリックを実行するのはそんなに容易なことではない. その様々な困難については以降の節でもう少し丁寧に議論するが, 先ずは図3を全体の俯瞰図として頭に入れておくと, 本稿後半の議論も見通しが良くなる (かもしれない).

注意 4. [HSBT] で扱う GSp_n 表現の潜在的モジューラー性定理の証明にカラビ-ヤウ超曲面が登場するのは些か唐突な印象を受ける方も多いと思う. それもその筈で, ここでカラビ-ヤウ多様体が登場しなければならない必然性は実は 全く ないのである (!) 繰り返しとなるが, (ℓ, ℓ') トリックを実行するに当たって最も重要なことは

法 ℓ' リアライゼーションがモジューラーでモジューラー性持ち上げ定理の条件を満たし, 法 ℓ リアライゼーションが所望の法 ℓ 表現と同型なモチーフ $\mathcal{M}$ の構成

であった. GSp_n 表現の潜在的モジューラー性定理に於いては, 数理論理学や代数解析学, 代数幾何学, トポロジー等様々な分野で良く調べられていた超曲面族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ がたまたま (ℓ, ℓ') トリックを実践する際の“巧い”モチーフとして機能しそうだったので「借用してきた」だけという印象が強い^{*19}. したがって「何故潜在的モジューラー性定理の証明に於いてカラビ-ヤウ多様体が登場しなくてはならなかったのだろうか?」と悩むよりも, 「我々が必要だったのはあくまでも (ℓ, ℓ') トリックを行うのに適した〈舞台〉としての“巧い”モチーフであり, それがカラビ-ヤウ多様体であったことの方が寧ろ思わぬ副産物であったのだ」と考えた方が (精神安定上も) 良いのかもしれない. ◆

^{*19} 例えば, カラビ-ヤウ多様体でない全く別の“巧い”モチーフ $\mathcal{M}'$ が存在するなら, $\mathcal{M}'$ を用いて全く同様に (ℓ, ℓ') トリックが実行されてしまう筈である. その意味でも, Y のカラビ-ヤウ性が GSp_n 表現の潜在的モジューラー性定理の証明に於いて本質的であるとは言えないのである.

1.2 カラビ-ヤウ族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ のモノドロミー解析

さて, (ℓ, ℓ') トリックの感覚を掴んでいただいたところで引き続き超曲面族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ を詳しく解析してゆくことにしよう. ここでは特に局所系 $\{V_t\}_t$ のモノドロミーを詳しく解析することにする. その理由は, (ℓ, ℓ') トリックを実行する際に欠かすことのできないモレーバ-イイの定理 (命題 2.1) を適用するための条件として, 局所系 $\{V_t\}_t$ のモノドロミーが“大きい”ことが極めて重要となるからである. なお, この節では (本報告集の解説記事全体を見渡してみても珍しいことに) 複素代数幾何的かつ代数解析的な議論が多用されており, 目新しい点も多々あると思われるので, 少し詳しく解説することにした.

まず, V に於ける $\zeta \in \mu_{n+1}$ の周りのモノドロミーに関しては, Y_ζ 上の特異点が全て通常二次特異点であることから, ピカル-レフシェッツ理論 (PICARD-LEFSCHETZ theory) を用いることで比較的簡単にその様子を考察出来る ([SGA7] 参照).

補題 1.4. $V \otimes \mathbb{Q}$ に於ける $\zeta \in \mu_{n+1}$ の周りでのモノドロミー作用素の, 固有値 1 に関する固有空間の次元は少なくとも $n-1$ である. $\diamond$

証明. $t \in T_0(\mathbb{C})$ とする. 特異ファイバー $Y_t(\mathbb{C})$ 上の二次孤立特異点の集合を Δ とおく. すると, 各 $y \in \Delta$ に対応して消滅サイクル (vanishing cycle) $\delta_y \in H^{n-1}(Y_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ が存在して, $\alpha \in H^{n-1}(Y_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ に対する ζ の周りのモノドロミーの作用は

$$\alpha \mapsto \alpha \pm \sum_{y \in \Delta} (\alpha, \delta_y) \delta_y$$

で表わされる (ピカル-レフシェッツの公式). 但し $(\cdot, \cdot)$ はコホモロジーのカップ積.

ここで, 各 $Y_t(\mathbb{C})$ 上の孤立特異点は H_0 の作用で推移的に移り合うから, α を H_0 -不変部分から取ると, 或る $d(\alpha) \in \mathbb{Z}$ に対しモノドロミーの作用は $\alpha \mapsto \alpha \pm d(\alpha) \sum_{y \in \Delta} \delta_y$ で表わされる. $d: H^{n-1}(Y_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^{H_0} \rightarrow \mathbb{Z}$ は明らかに準同型写像となる. d の核が固有値 1 に関する固有空間に他ならないが, 線形代数の次元定理から ($\mathbb{Q}$ をテンソルした後の) d の核の次元は少なくとも $n-1$ 次元となる. $\square$

したがって, あとは残った無限遠点 ∞ の周りでのモノドロミーの様子を調べれば良い. [HSBT] では, フィリップ・オーガスタス・グリフィス (Phillip Augustus GRIFFITHS) に依る有理形式に関する周期積分の理論 (theory of period integrals for rational forms) [Griffiths] を用いて, 局所系 $\{V_t\}_t$ に於ける無限遠点 ∞ の周りでの幾何的モノドロミーをピカル-フックス型微分方程式 (differential equation of PICARD-FUCHS type) の解の解析的モノドロミーという代数解析的な対象に帰着させて考察している*20. 以下それを概観しよう.

*20 要するにリーマン-ヒルベルト対応 (RIEMANN-HILBERT correspondence) に依って対応するガウス-マニン

Y_t の定義方程式 (1.1) を書き換えて

$$Q_t = \frac{1}{n+1}(X_0^{n+1} + \dots + X_n^{n+1}) - tX_0 \dots X_n$$

とおき, $Y_t(\mathbb{C})$ に沿って i 位の極を持つ $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上の有理 n -形式

$$\omega'_i = (i-1)! \frac{(X_0 X_1 \dots X_n)^{i-1} \Omega}{Q_t^i}, \quad 1 \leq i \leq n+1$$

を考える. 但し, $\Omega = \sum_{j=0}^n (-1)^j X_j dX_0 \wedge \dots \wedge dX_{j-1} \wedge dX_{j+1} \wedge \dots \wedge dX_n$. 簡単な計算に依って ω' は常微分方程式

$$\frac{d\omega'_i}{dt} = \omega'_{i+1} \quad (1.2)$$

を満たすことが分かる.

さて, グリフィスの記法に倣って $\mathcal{A}_r^q(Y_t(\mathbb{C}))$ を $Y_t(\mathbb{C})$ に沿って高々 r 位の極を持つ $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ 上の有理 q -形式のなす $\mathbb{C}$ -ベクトル空間とし, $\mathcal{H}_k(Y_t(\mathbb{C})) = \mathcal{A}_k^n(Y_t(\mathbb{C}))/d\mathcal{A}_{k-1}^{n-1}(Y_t(\mathbb{C}))$ とおこう*21. このとき, $t \in T_0(\mathbb{C})$ に対して

$$\omega'_i \in \mathcal{H}_i(Y_t(\mathbb{C})) \setminus \mathcal{H}_{i-1}(Y_t(\mathbb{C})) \quad (1.3)$$

となることを背理法に依って示すことが出来る ([HSBT] 補題 1.5 直前のパラグラフを参照). ここで, 各 $\varphi \in \mathcal{A}_k^n(Y_t(\mathbb{C}))$ に対して 留数写像 (*residue map*) $R(\varphi): H_{n-1}(Y_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$(R(\varphi))(\gamma) = \int_{\tau(\gamma)} \varphi, \quad \gamma \in H_{n-1}(Y_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$$

で定める. 但し $\tau: H_{n-1}(Y_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \rightarrow H_n(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus Y_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ は γ の適当な管状近傍の境界をとる写像 (詳しくは [Griffiths] § 3 を参照). したがって $R(\varphi)$ は $H^{n-1}(Y_t(\mathbb{C}), \mathbb{C}) (= \text{Hom}_{\mathbb{C}}(H_{n-1}(Y_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z}), \mathbb{C}))$ の元を定める. $R: \mathcal{H}_k(Y_t(\mathbb{C})) \rightarrow \text{Fil}^{n-k}(H_{\text{DR}}^{n-1}(Y_t(\mathbb{C})))_0$ は同型を与えることが知られているので (下付き添字の 0 は原始的な部分を表す. [Griffiths] 定理 8.3 参照), (1.3) と併せて

$$R(\omega'_i) \in \text{Fil}^{n-i}(H_{\text{DR}}^{n-1}(Y_t(\mathbb{C}))^{H_0}) \setminus \text{Fil}^{n+1-i}(H_{\text{DR}}^{n-1}(Y_t(\mathbb{C}))^{H_0}) \quad (1 \leq i \leq n)$$

が導かれる (Fil^j は ホッジ・フィルトレーション (HODGE filtration)). つまり $R(\omega'_1), R(\omega'_2), \dots, R(\omega'_n)$ は $H_{\text{DR}}^{n-1}(Y_t(\mathbb{C}))^{H_0}$ の基底をなす.

以降の計算に於ける基本戦略は次の通りである:

接続の満たす微分方程式 (系) を, リーマン-ヒルベルト対応をあまり前面に出さずに直接構成しているのである.

*21 ド・ラームコホモロジー群の類似物であるが, 閉形式のなす部分空間の剰余をとっているのではないことに注意しよう.

適当な $\gamma_t \in H_{n-1}(Y_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z})^{H_0}$ の元に対する 留数ベクトル (residue vector) ^a

$$v'(\gamma_t) = \begin{pmatrix} \int_{\tau(\gamma_t)} \omega'_1 \\ \vdots \\ \int_{\tau(\gamma_t)} \omega'_n \end{pmatrix}$$

のパラメータ t に関する微分を, 関係式 (1.2) 等を用いて変形することで常微分方程式系 $\frac{d}{dt}v'(\gamma_t) = A'v'(\gamma_t)$ を導出し, その解のモノドロミーを調べる.

^a これは, γ_t を $[\omega'_1], \dots, [\omega'_n]$ の双対基底に関して線形結合表示した時の係数を並べたベクトル.

ここで, 計算の都合上新たな有理形式 $\omega_i = t^i \omega'_i$ ($1 \leq i \leq n+1$) を導入しよう. ω_i 達は H の作用で不変であり, しかも関係式

$$\frac{d\omega_i}{dt} = i\omega_i + \omega_{i+1} \quad (1.4)$$

を満たす. もし $t \notin \{0, \infty\} \cup \mu_{n+1}(\mathbb{C})$ であれば, 当然のことながら $R(\omega_1), \dots, R(\omega_n)$ もまた $H^{n-1}(Y_t(\mathbb{C}), \mathbb{C})^{H_0}$ の基底をなしている. さらに, 初等的な計算に依って $t \notin \{0, \infty\} \cup \mu_{n+1}(\mathbb{C})$ のとき

$$[\omega_{n+1}] = \frac{1}{-t^{-(n+1)} - 1} (A_{1,n+1}[\omega_n] + \dots + A_{n,n+1}[\omega_1]) \quad (1.5)$$

が成り立つことが分かる ($[\cdot]$ は ド・ラーム (DE RHAM) コホモロジー類). 但し, $A_{i,j}$ ($j > i \geq 0$) は漸化式

- $A_{0,j} = 1 \quad (j \geq 0)$
- $A_{i+1,j} = A_{i,i+1} + 2A_{i,i+2} + \dots + (j-i-1)A_{i,j-1} \quad (j > i+1)$

で定まる数であり, 関係式

$$(i+1)^n = \sum_{j=0}^{\min(n,i)} A_{n-j,n+1} \frac{i!}{(i-j)!} \quad (1.6)$$

を満たす.

さて, ファイバー Y_t の H_0 -不変 $(n-1)$ -サイクル γ_t を巧くとることに依って γ_t が t に関して局所定値かつ $\tau(\gamma_t) \in H_n(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \setminus Y_t(\mathbb{C}), \mathbb{Z})$ も t に関して局所定値となるように出来る.

したがって留数ベクトル $v(\gamma_t) = {}^t(\int_{\tau(\gamma_t)} \omega_1, \dots, \int_{\tau(\gamma_t)} \omega_n)$ の微分に於いて

$$t \frac{d}{dt} v(\gamma_t) = \begin{pmatrix} \int_{\tau(\gamma_t)} t \frac{d\omega_1}{dt} \\ \vdots \\ \int_{\tau(\gamma_t)} t \frac{d\omega_n}{dt} \end{pmatrix}$$

のように t に関する微分と $\tau(\gamma_t)$ に関する積分が順序交換可能であると仮定して良い. 右辺のベクトルを (1.4) 及び (1.5) を用いて計算することで, 一階のピカル-フックス型常微分方程式

$$t \frac{d}{dt} v(\gamma_t) = A(t^{-(n+1)}) v(\gamma_t) \quad (1.7)$$

を得る. 但し $A(z)$ は

$$A(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{A_{n,n+1}}{z-1} \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{A_{n-1,n+1}}{z-1} \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 & 0 & \frac{A_{n-2,n+1}}{z-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n-2 & 0 & \frac{A_{3,n+1}}{z-1} \\ \vdots & & & \ddots & 1 & n-1 & \frac{A_{2,n+1}}{z-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & n + \frac{A_{1,n+1}}{z-1} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

なる行列. ここで $\mathbb{P}^1$ の被覆 $\pi_{\mathbb{P}^1}: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1; t \mapsto z = t^{-(n+1)}$ に依り変数を t から z に変換すると, 常微分方程式 (1.7) は

$$z \frac{d}{dz} f(z) = -\frac{1}{n+1} A(z) f(z)$$

に変換される (ここで $v(\gamma_t)$ を z 変数の関数と見做したものを $f(z)$ と書いた). この形のピカル-フックス型微分方程式の $z=0$ の周りでの局所解は

$$f(z) = S(z) \exp\left(-\frac{1}{n+1} A(0) \log z\right) v_0 \quad (S(z) \text{ は一価の行列値関数, } v_0 \text{ は定ベクトル})$$

で与えられることが知られており ([CL] 参照), $z=0$ の周りを一周した際の解の局所モノドロミーは $\exp\left(-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{n+1} A(0)\right)$ で与えられることが分かる. これを $\pi_{\mathbb{P}^1}$ で持ち上げることで, 常微分方程式 (1.7) の解の無限遠点 ∞ の周りでのモノドロミーは $\exp(2\pi\sqrt{-1}A(0))$ となる.

$\det(TI_n - A(0))$ を第 n 列に関して展開して計算することで, $A(0)$ の特性多項式は

$$\sum_{j=0}^n A_{n-j,n+1} (T-1)(T-2)\dots(T+j-n)$$

カラビ-ヤウ多様体の或る族 と 潜在的保型性 —佐藤-テイト予想の証明に向けて— 27

と求まるが、これは (1.6) で i を $T-1$ に置き換えたものの右辺と一致するので、結局 $A(0)$ の特性多項式は T^n . $A(0)$ の階数が $n-1$ であることは簡単に分かるから、 $A(0)$ の最小多項式も T^n . 斯くしてモノドロミー作用素 $\exp(2\pi\sqrt{-1}A(0))$ の最小多項式は $(T-1)^n$ となる.

さて、ガロワ-エタール被覆

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, \infty\} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, \infty\}; t \mapsto t^{n+1}$$

に依って V を $(T_0(\mathbb{C}) \setminus \{0\})/\mu_{n+1}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上の局所定数層 $\tilde{V}$ に降下 (descent) したものを考えよう.

補題 1.6. $\tilde{V}$ のモノドロミーに関して、以下が成立.

- (1) ∞ の周りのモノドロミー作用素は冪単で、最小多項式は $(T-1)^n$.
- (2) 1 の周りのモノドロミー作用素は冪単で、固有値 1 に関する固有空間の次元はちょうど $n-1$ となる.
- (3) 0 の周りのモノドロミー作用素は 1 の自明でない $(n+1)$ 乗根をそれぞれ重複度 1 で固有値として持つ. ◇

証明. (1) は上記の議論より従う. (2) は 補題 1.4 (+ エタール 降下理論) 及び、 1 の周りのモノドロミーが恒等写像となり得ないことから従う. (3) に関しては、 0 の周りのモノドロミーは被覆写像 $t \mapsto t^{n+1}$ に由来するので、被覆変換群 $\mu_{n+1} \cong H/H_0$ の作用と同一視されるが、この作用が 1 の自明でない $(n+1)$ 乗根全体を固有値として持つことはよく知られている ([DMOS] 参照). □

系として局所系 $\{V_t\}_t$ のモノドロミーの様子が直ちに従う.

系 1.7. 局所系 $\{V_t\}_t$ のモノドロミーに関して、以下が成立.

- (1) ∞ の周りのモノドロミー作用素は冪単で、最小多項式は $(T-1)^n$.
- (2) $\zeta \in \mu_{n+1}(\mathbb{C})$ の周りのモノドロミー作用素は冪単で、固有値 1 に関する固有空間の次元はちょうど $n-1$ となる. ◇

雑談 5. 有理形式を ω_i に取り替えず、 ω'_i のまま上記の方針で $v'(\gamma_t) = {}^t(x_1, \dots, x_n)$, $x_i = \int_{\tau(\gamma_t)} \omega'_i$ について常微分方程式 $\frac{d}{dt}v'(\gamma_t) = A'v'(\gamma_t)$ を立式し、 x_1 に関する文字消去及び変数変換 $z = t^{-(n+1)}$, $F = z^{-\frac{1}{n+1}}x_1$ を施すと、特異点を $z = 0, 1, \infty$ に持つ一般化超幾何微分方程式 (generalized hypergeometric differential equation)

$$\left[\left(z \frac{d}{dz} \right)^n - z \left(z \frac{d}{dz} + \frac{1}{n+1} \right) \left(z \frac{d}{dz} + \frac{2}{n+1} \right) \cdots \left(z \frac{d}{dz} + \frac{n}{n+1} \right) \right] F = 0$$

が得られる*²². 超幾何微分方程式のモノドロミーは代数解析の分野で良く研究されている. 補題 1.6 も, 本質的にはこの超幾何微分方程式のモノドロミーの代数解析を行っていることに他ならない. $\blacklozenge$

さて, $V, \tilde{V}, V[N]$ 等には ポワンカレ 双対性 (POINCARÉ duality) から誘導される非退化交代形式が存在する. モノドロミー変換がこの交代形式を不変に保つことは良く知られているので, モノドロミー表現

$$\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}, z) \rightarrow Sp(\tilde{V}_z \otimes \mathbb{C}), \quad \pi_1(T_0(\mathbb{C}), t) \rightarrow Sp(V[N]_t)$$

等が得られる. 次の補題は §2.2 に於いて極めて重要な役割を演じる:

補題 1.11. ある定数 $C(n)$ で, $C(n)$ より大きい素数しか因数に持たない任意の整数 N 及び任意の $t \in T_0(\mathbb{C})$ に対して

$$\pi_1(T_0(\mathbb{C}), t) \rightarrow Sp(V[N]_t)$$

が全射となるようなものが存在する. $\blacklozenge$

証明の概略. 先ず以下の補題を示す.

補題 1.9. 任意の $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ に対し, $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}, z)$ のモノドロミー表現に依る像 $\mathcal{H}$ は $Sp(\tilde{V}_z \otimes \mathbb{C})$ に於いてザリスキー位相に関して稠密である. $\blacklozenge$

このことが分かれば $\pi_1(T_0(\mathbb{C}), t)$ の $Sp(V_t \otimes \mathbb{C})$ に於ける像もザリスキー位相に関して稠密であることが従う ([HSBT] 系 1.10). さて, 補題 1.9 の証明は $\mathcal{H}$ がパラメーター $a_1 = 1, \dots, a_n = 1; b_1 = \zeta_{n+1}, \dots, b_n = \zeta_{n+1}^n$ (ζ_{n+1} は 1 の原始 $(n+1)$ 乗根) の超幾何群 (hypergeometric group) と呼ばれる群となることから, ポイカース-ヘックマン (BEUKERS-HECKMAN) に依る超幾何群の分類理論を適用することで示される. その大筋の流れを追ってみよう.

$GL_n(\mathbb{C})$ の部分群 $\mathfrak{h}$ がパラメーター $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n$ の超幾何群であるとは, $\mathfrak{h}$ が

$$\det(tI_n - h_\infty) = \prod_{j=1}^n (t - a_j), \quad I_n - h_1 \text{ の階数が } 1, \quad \det(tI_n - h_0^{-1}) = \prod_{j=1}^n (t - b_j)$$

を満たす 3 つの元 $h_0, h_1, h_\infty \in GL_n(\mathbb{C})$ に依って生成されることとする (但し I_n は n 次単位行列). 因みに h_1 のことを 反射写像 (reflection) と呼び, h_1 で生成される $\mathfrak{h}$ の部分群 $\mathfrak{h}_r$ を 反射部分群 (reflection subgroup) と呼ぶ. 我々の状況では 特異点 $0, 1, \infty$ の周りでのモノド

*²² これは一般化超幾何関数 (generalized hypergeometric function)
 ${}_nF_{n-1}[1/(n+1), 2/(n+2), \dots, n/(n+1); 1, 1, \dots, 1; z]$
 を解に持つ常微分方程式.

ロミー作用素をそれぞれ h_0, h_1, h_∞ とすれば, $\mathcal{H}$ がパラメーター $1, \dots, 1; \zeta_{n+1}, \dots, \zeta_{n+1}^n$ の超幾何群となる (これは 補題 1.6 の言い換えに他ならない).

超幾何群の一般論に抛り, 任意の超幾何群は既約であるから ([BH] 命題 3.3) $\mathcal{H}$ は既約. しかもパラメーター $1, \dots, 1; \zeta_{n+1}, \dots, \zeta_{n+1}^n$ は如何なる 1 の冪根 ζ の作用でも保たれないので, 反射部分群 $\mathcal{H}_r$ も既約 ([BH] 定理 5.3). この様な場合はパラメーターの情報に抛り $\mathcal{H}, \mathcal{H}_r$ が原始的 (primitive) であるかどうか判定出来る ([BH] 定理 5.8 及び 定理 5.14). 今回の場合は $\mathcal{H}, \mathcal{H}_r$ は原始的となる. さらに $\mathcal{H}, \mathcal{H}_r$ は明らかに無限群である.

以上の様な $\mathcal{H}$ に対しては, そのザリスキー閉包 $\overline{\mathcal{H}}$ の特徴付けがなされている. 今回はパラメーターの集合 $\{1, \dots, 1\}$ 及び $\{\zeta_{n+1}, \dots, \zeta_{n+1}^n\}$ が逆元をとる操作で不変であること及び h_1 の固有値が全て 1 であることから $\overline{\mathcal{H}} \cong Sp_n(\mathbb{C})$ であることが従う ([BH] 定理 6.5).

$\mathcal{H}$ の稠密性 (補題 1.9) さえ示してしまえば, 適当な十分大きい N に対して $Sp(V[N]_t)$ への剰余を考えることでモノドロミー表現を全射に出来ることが知られている ([MVW] 定理 7.4, 補題 8.4)*²³ ので, 補題 1.11 が従う. $\square$

雑談 6. 上記の証明で扱われている ボイカース-ヘックマン に依る超幾何群の分類理論は, 所謂 微分ガロワ理論 (differential GALOIS theory) なる理論の一端を表している. $\blacklozenge$

補題 1.11 は, 端的に言えば超曲面族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ の局所系 $\{V_t\}_t$ のモノドロミーが “十分に大きい” と言うことを表している. 繰り返しになるが, モノドロミーが大きいことはモレ-バイイーの定理を用いる際に極めて重要な条件である. 詳しくは次節 (§ 2.2) にて説明しよう.

雑談 7. 本節では [HSBT] の記述に従って代数解析的な手法でモノドロミー解析を行ったが, シェパード-バロンが構成した ∞ で準安定 (semi-stable) な Y の H_0 -同変ブロー・アップにラポポルト-ジンク スペクトル系列 (RAPOPORT-ZINK spectral sequence) を適用することで, 純代数的にモノドロミーを解析することが出来るのではないか (寧ろより詳細な情報を得ることが出来るのではないか) という趣旨のことが [HSBT] に於いて示唆されている. $\blacklozenge$

1.3 ガロワ表現 $V_{\ell,t}$ の諸性質

§ 1.3 ではカラビ-ヤウ族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ から得られる表現 $V_{\ell,t}$ 及び $V[\ell]_t$ の性質について述べる. 但し, 前節で扱ったモノドロミー解析とは異なりあまり独特な証明テクニックは見受けられないので, 証明には深入りせず, 寧ろ得られる結果を纏めることを重視することにした.

*²³ [MVW] の定理 7.4 では, 証明の一つのステップとして代数群 $\mathcal{H}$ の ℓ 進完備化が $Sp(V_{\ell,t})$ を含むことを証明しているが, その際に 単純有限群の分類理論を用いている. 最近までは 補題 1.11 の単純有限群の分類を用いない証明は (不完全なものを除いて) 知られていなかったが, [HSBT] の最新版に於いて ニコラス・カッツ (Nicolas KATZ) に依る単純有限群の分類理論を経由しない証明方法が掲載された.

補題 1.13. $K/\mathbb{Q}_\ell$ を有限次拡大とし, $t \in T_0(K)$ をとるとき, $V_{\ell,t}$ は $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ のド・ラーム表現であり, ホッジ-テイト数は $\{0, 1, \dots, n-1\}$ である. さらに t が整数環 $\mathcal{O}_K$ の元で, なおかつ $1/(t^{n+1}-1)$ も $\mathcal{O}_K$ に含まれるとき, $V_{\ell,t}$ はクリスタリン表現となる. $\diamond$

証明. $V_{\ell,t}$ がド・ラーム表現になることは良く知られている. $V_{\ell,t} = H^{n-1}(Y_t \times \text{Spec } \overline{K}, \mathbb{Q}_\ell)^{H_0}$ なので, p 進ホッジ理論に於けるド・ラーム比較定理から $H_{DR}^{n-1}(Y_t/K)^{H_0}$ のホッジ-テイト数を調べれば良い. これは §1.2 で調べてある通りである. さらに $t \in \mathcal{O}_K$ かつ $1/(t^{n+1}-1) \in \mathcal{O}_K$ ならば, $Y_t/\mathcal{O}_K$ が滑らかかつ射影的となるので $V_{\ell,t}$ はクリスタリン表現となる. $\square$

補題 1.14. $\ell \equiv 1 \pmod{n+1}$ なる素数 ℓ に対し, $I_{\mathbb{Q}_\ell}$ -加群としての同型

$$V[\ell]_t \cong 1 \oplus \omega_\ell^{-1} \oplus \dots \oplus \omega_\ell^{1-n}$$

が存在する. 但し, $I_{\mathbb{Q}_\ell}$ は $\mathbb{Q}_\ell$ の絶対ガロワ群 $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}/\mathbb{Q}_\ell)$ の惰性群であり, $\omega_\ell: I_{\mathbb{Q}_\ell} \rightarrow \mathbb{Q}_\ell^\times$ は或る ℓ 進指標. $\diamond$

証明. 円分 ℓ 進指標 ϵ_ℓ に対し,

$$V_{\ell,0} \cong 1 \oplus \epsilon_\ell^{-1} \oplus \dots \oplus \epsilon_\ell^{1-n}$$

を示せば良いが, $V_{\ell,0}$ が n 個の指標の和になることは [DMOS] 等を参照. あとは, これらの指標がクリスタリン表現でホッジ-テイト数が $0, 1, \dots, n-1$ であることを鑑みれば上記のようになる. $\square$

補題 1.15. $q \neq \ell$ かつ $q \neq n+1$ なる素数 q をとり, $K/\mathbb{Q}_q$ を有限次拡大とする. v_K を K の正規化された付値とし, $t \in K$ を $v_K(t) < 0$ なる元とする. このとき

- (1) $V_{\ell,t}$ と $V[\ell]_t$ の半単純化は不分岐で, その幾何学的フロベニウス元 Frob_K の作用の固有値は或る $\alpha \in \{\pm 1\}$ に対して $\alpha, \alpha \# \kappa(K), \dots, \alpha (\# \kappa(K))^{n-1}$ となる. 但し $\kappa(K)$ は K の剰余体.
- (2) 惰性群 I_K の $V_{\ell,t}$ への作用は, 最小多項式が T^n であるような $V_{\ell,t}$ 上の冪零変換 N に依って $\exp(Nt_K)$ で与えられる.
- (3) 惰性群 I_K の $V[\ell]_t$ への作用は, $V[\ell]_t$ 上の冪零変換 N に依って $\exp(v_K(t)Nt_K)$ で与えられる. また, ある自然数 $D(n)$ が存在し, $\ell > D(n)$ ならば N の最小多項式が T^n となる. $\diamond$

証明の概略. この補題は, 実は §1.2 で行ったモノドロミー作用の解析の直接の帰結であるが, そのための設定や準備が少し冗長になるので割愛する. 原論文 [HSBT] を参照されたい. $\square$

強調しておかねばならないことは, $V[\ell]_t, V_{\ell,t}$ に上記のような制限がつくため, 超曲面族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ を用いた (ℓ, ℓ') トリックで潜在的モジュラー性を証明出来るようなガロワ表現に

も強い制限が課されてしまうと言う点である (定理 3.1 の (性質 4), (性質 5) も参照のこと). [たのしみ] にて吉田輝義氏も述べていることであるが, 佐藤-テイト予想の証明に於いて欠かす事の出来ない楕円曲線の対称積表現 $\mathrm{Symm}^{n-1}T_\ell E$ がこのような強い条件を満たしていたと言うことは, 誠に幸運であったとしか言いようがあるまい.

2 代数的整数論を少々 — *Some algebraic number theory*

「代数的整数論」というと何とも仰々しいことこの上ないが, [HSBT] に於ける第 2 節のテーマは (ℓ, ℓ') トリックを実行する上で欠かすことの出来ない モレ-バイイーの定理 (MORET-BAILLY's theorem) を扱いやすい形に拡張することである.

本節では最初にモレ-バイイーが証明したオリジナルの定理を紹介する. この定理は大雑把に纏めれば「スキームの有理点の存在定理」の一種であり, 純粋に代数幾何・数論幾何的な定理である. モレ-バイイーの定理は (ℓ, ℓ') トリックに於けるモチーフの構成の際に利用されるが, そのイメージを掴むために GL_2 表現の潜在的モジュラー性定理の証明に於ける (ℓ, ℓ') トリックの議論 ([Taylor2], [Taylor3], [津嶋]) を振り返り, そこでのモレ-バイイーの定理の使われ方を観察する. 最後に本稿で用いられるモレ-バイイーの定理の変形版 (命題 2.1) を導入し, モレ-バイイーの定理を適用する対象であるモジュライ空間の幾何学的連結性を証明する.

2.1 モレ-バイイーの定理と潜在的モジュラー性

始めに ローラン・モレ-バイイー (Laurent MORET-BAILLY) に依って示されたオリジナルの定理を紹介しよう (本稿では代数体版しか用いないが, 読者の便宜のために関数体版も同時に扱うこととする). K を大域体 (代数体 又は 有限体 k 上の一変数関数体) とする. 以下, 環 R は以下の何れかのデデキント整域とし, $B = \mathrm{Spec} R$ とおく:

- (代数体版)
 R は代数体 K の S -整数環 (S -integer ring) $\mathcal{O}_K^S$. 但し, S は K の素点の有限集合で, アルキメデスの素点を全て含むもの^{*24}.
- (関数体版)
関数体 K を持つ k 上滑らかな連結アファイン曲線の座標環.

さて, $\mathfrak{M}_K$ を K の素点全体のなす集合とし, $\mathfrak{M}_R$ を $B = \mathrm{Spec} R$ の閉点全体の集合とする. B の閉点を K の非アルキメデスの素点と同一視することに依り, $\mathfrak{M}_R$ を自然に $\mathfrak{M}_K$ の部分集合と見做そう. さらに, $\mathfrak{M}_K$ の有限部分集合 Σ (アルキメデスの素点も含んで良い) を

^{*24} 代数体 K の S -整数環 $\mathcal{O}_K^S$ とは, S に含まれない任意の素点 v に対し, $v(x) \geq 0$ を満たす元 x で生成される K の部分環を指す.

$\mathfrak{M}_R$ と共通部分が無いように選んで固定しておく. この設定の下で, モレ-バイイーは以下の定理を示した:

定理 (モレ-バイイーの定理, [MB2] 定理 1.3). $R, K, \mathfrak{M}_K, \mathfrak{M}_R, \Sigma$ を上記の通りとする. $B = \operatorname{Spec} R$ とおく. $X \rightarrow B$ を分離的有限型な既約 B -スキームで, 構造射が全射であり, X_K が K 上 幾何学的既約 (*geometrically irreducible*) であるようなものとする. さらに, 各 $v \in \Sigma$ に対して局所体の有限次ガロワ拡大 L_v/K_v が与えられ, X の非特異な L_v -有理点 $X^{\text{sm}}(L_v)$ の 空でない 開集合 Ω_v (位相は v -進位相で考える) で, $\operatorname{Gal}(L_v/K_v)$ の作用に対して安定なものが与えられているとする. もし $\Sigma, \mathfrak{M}_R, \mathfrak{M}_K$ が 非完備性条件

$$\Sigma \sqcup \mathfrak{M}_R \neq \mathfrak{M}_K \quad (2.1)$$

を満たすならば, B 上有限かつ構造射が全射となるような X の既約閉部分スキーム $Y \hookrightarrow X$ が存在して, 各 $v \in \Sigma$ に対して $Y \times_B \operatorname{Spec} L_v$ が $\coprod \operatorname{Spec} L_v$ と分解し, $Y \times_B \operatorname{Spec} L_v \rightarrow Y$ から誘導される $Y \times_B \operatorname{Spec} L_v$ の各連結成分から Y への射^{*25}が Ω_v に含まれるようなものが存在する. $\diamond$

雑談 8. モレ-バイイーは, 定理の中で登場した組 $\mathcal{S} = \{X \rightarrow B, \Sigma, \{L_v\}_{v \in \Sigma}, \{\Omega_v\}_{v \in \Sigma}\}$ をスコレム・データ (*donnée de SKOLEM*, *SKOLEM data*) と呼んでいる. その名称の由来は本小節最後の 雑談 13 を参照のこと. また, 非完備性条件 (2.1) を満たすようなスコレム・データは, 非完備スコレム・データ (*donnée incomplète de SKOLEM*, *incomplete SKOLEM data*) と呼ばれる. $\blacklozenge$

注意 9. モレ-バイイーの定理には様々な仮定が必要とされるが, 例えば X が代数体 K 上の代数多様体の場合 (以下の議論では専らこのケースが扱われる) には幾つかの仮定が自動的に満たされてしまう場合が多い; 先ず X の $\mathcal{O}_K$ 上のモデルを取ることで, 分離的有限型全射 $X \rightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ の条件は満たされる. さらに, Σ を真に含み, かつ K のアルキメデス的素点を全て含む様な K の素点の有限集合 S を取り, $\mathcal{O}_K$ を S -整数環 $\mathcal{O}_K^S$ に取り替えることで非完備性条件 (2.1) も容易に達成される. したがって, X が K 上の代数多様体の場合に特に調べる必要がある重要な条件は

- X_K の幾何学的既約性 (連結性)
- 各 $v \in \Sigma$ に対して局所有理点の集合 Ω_v が空でないこと

の二点である. 後程導入されるモレ-バイイーの定理の変形版 (命題 2.1) も, 適用する際にはこの二点を確認することが最も重要かつ厄介な作業となる. 例えば, §1 の長い議論の大半は実はモレ-バイイーの定理を適用する対象となる “モジュライ空間” の幾何学的連結性を示すこ

^{*25} これは Y の L_v -有理点 ($Y(L_v)$ の元) を定めることに注意.

とに割かれていると言っても過言ではない (§2.2 も参照). また, 局所有理点の構成には p 進ホッジ理論などの高度な理論を用いることが要求される場合が多く, こちらも確認するのはなかなか骨が折れる条件である ([HSBT] に於ける局所有理点の構成については §3 参照. また, [Taylor2] に於いても本田-テイト理論やセール-テイト理論を用いた局所有理点の構成が行われている. こちらに関しては [津嶋] を参照されたい). ◆

テイラーは GL_2 表現の潜在的モジュラー性定理の証明に於いて, モレ-バイイーの定理を若干書き直した次の形の系を用いた:

系 ([Taylor2], 定理 G). K を代数体とし, Σ を K の無限素点を全て含む素点の有限集合とする. K^Σ/K を全ての $v \in \Sigma$ が完全分解するような最大の代数拡大とする. さらに, X を K 上幾何学的既約かつ滑らかな擬射影スキームで, 各 $v \in \Sigma$ に対して $X(K_v)$ が空集合でないものとする. このとき $X(K^\Sigma) \subseteq X$ はザリスキー位相に関して稠密である. ◇

証明. Σ を真に含む様な K の素点の有限集合 S を一つ固定し, $B = \text{Spec } \mathcal{O}_K^S$ とおく (注意 9 参照). 非完備スコレム・データ $\mathcal{S} = \{X \twoheadrightarrow \text{Spec } B, \Sigma, \{K_v\}_{v \in \Sigma}, \{X(K_v)\}_{v \in \Sigma}\}$ に対してモレ-バイイーの定理を適用することに依り, 定理の条件を満たす既約閉部分多様体 $Y \hookrightarrow X$ を得る (X が K 上滑らかであることを仮定しているので, $X^{\text{sm}}(K_v) = X(K_v)$ となることに注意). ここで, Y の任意のアファイン開部分集合 $W = \text{Spec } A$ 及び各 $v \in \Sigma$ に対し, Y の特徴付けに因り $A \otimes_{\mathcal{O}_K^S} K_v \cong \prod K_v$ となることが従うので, 特に各 $v \in \Sigma$ は A (の商体) に於いて完全分解することが分かる. したがって A から K^Σ への埋め込みが存在し, 各埋め込みが X の K^Σ -有理点 ($X(K^\Sigma)$ の元) を定める. 稠密性に関しては以下の注意 10 を参照のこと. □

注意 10 (有理点の稠密性に付いて). 実は局所体 K' (より一般にはヘンゼル体) 上幾何学的既約なスキーム Z が非特異な K' -有理点を持つとき, $X(K')$ が X に於いてザリスキー位相に関して稠密となることが知られている (この主張は, 例えばヘンゼル体上の多様体の有理点集合に対する陰関数定理等を用いて証明される. [GPR] の付録等を参照). この事実を用いると, 上記の系に於ける有理点の稠密性の部分が以下の様にして証明される;

X の任意のザリスキー開集合 U 及び各 $v \in \Sigma$ に対し, (v -進位相に関する) K_v -有理点の開部分集合 $U(K_v) \subseteq X(K_v)$ は X_{K_v} に於いてザリスキー位相に関して稠密となる (特に空集合ではない) ので, 上記の証明と同様にして, $U(K^\Sigma)$ の元が構成される. 即ち, $X(K^\Sigma) \cap U \neq \emptyset$ であるから, $X(K^\Sigma)$ はザリスキー位相に関して稠密となる. ◆

ご覧の通り, モレ-バイイーの定理は純粋に幾何学的な定理であって, 一見すると (ℓ, ℓ') トリックとは全く結びつかない定理の様にも思える. それではこの幾何学的な定理をどのように活用すれば (ℓ, ℓ') トリックに応用出来るのであろうか? ここでは [Taylor2] 及び [Taylor3]

で考察された GL_2 表現に対する (ℓ, ℓ') トリック を例にとりて、モレーバイーの定理が (ℓ, ℓ') トリックに於いてどのように活躍するのか、その様子を観察することにしよう*²⁶。

適当な法 ℓ GL_2 表現 $\bar{\rho}: \text{Gal}(\bar{F}/F) \rightarrow GL_2(\bar{\mathbb{F}}_\ell)$ の (潜在的) モジュラー性を示すことを考える。ここで、モジュラー性が既知の法 ℓ' 表現 $\bar{\rho}': \text{Gal}(\bar{F}/F) \rightarrow GL_2(\bar{\mathbb{F}}_{\ell'})$ が既に構成されていると仮定しよう (通常このような $\bar{\rho}'$ は適当なヘッケ指標の保型誘導表現に対応するガロワ表現をとることが多い*²⁷)。§1.1 での考察を思い出すと

法 ℓ' リアライゼーションがモジュラーかつモジュラー性持ち上げ定理の仮定を満たし、法 ℓ リアライゼーションが所望の法 ℓ 表現と同型となるようなモチーフ $\mathcal{M}$ の構成

こそが (ℓ, ℓ') トリックの要であった。テイラーは [Taylor2] 及び [Taylor3] で、 GL_2 表現の場合には $\mathcal{M}$ として“巧い”ヒルベルト-ブルメンタール アーベル多様体 (HILBERT-BLUMENTHAL *abelian varieties*, HBAV) が構成出来て、それを用いることで (ℓ, ℓ') トリックが実行出来ることを示した。ヒルベルト-ブルメンタール アーベル多様体の具体的な定義や (ℓ, ℓ') トリックのための細かい設定に関しては津嶋氏の解説記事 ([津嶋] §1) に譲ることとして、本稿ではそういった“些末な”部分は (本当は大事けれども) この際大胆に斬り捨てて、 (ℓ, ℓ') トリックに用いる“巧い”ヒルベルト-ブルメンタール アーベル多様体をモレーバイーの定理を利用して如何にして構成することが出来るか、という点に焦点を絞って解説することにしよう。

さて、我々が見つけたいヒルベルト-ブルメンタール アーベル多様体 A は、非常に大雑把に考えると以下の 2 条件を満たすものである:

(HBAV-1) A の ℓ' 等分点のなすガロワ表現 $A[\ell']$ に対し、 $A[\ell'] \cong \bar{\rho}' (+A[\ell'])$ はモジュラー性持ち上げの条件を満たす).

(HBAV-2) A の ℓ 等分点のなすガロワ表現 $A[\ell]$ に対し、 $A[\ell] \cong \bar{\rho}$.

このような A が構成出来さえすれば、§1.1 で概観したワイルズの $(3, 5)$ トリックと全く同様にして「法 ℓ' でのモジュラー性を“持ち上げて”法 ℓ に“落とす」という過程を経て $\bar{\rho}'$ の

*²⁶ [Taylor3] の結果は [Taylor2] で示された通常表現の場合の潜在的モジュラー性定理をクリスタリン表現の場合に拡張したものだが、難しくなった部分は寧ろ「 $R = \mathbb{T}$ 」定理及びモジュラー性持ち上げ定理の改良の部分であって、 (ℓ, ℓ') トリックの内容は本質的に同じである (多少複雑にはなるが)。詳しくは [津嶋] 参照。

*²⁷ 高木-アルティンの類体論のお陰でガロワ指標とヘッケ指標の間の対応は良く分かっているので、ヘッケ指標の誘導表現にガロワ表現が対応することは容易に分かるのである。本稿でも後程ヘッケ指標の誘導表現に対応するガロワ表現を「モジュラー性が既知の表現」として利用することになる (§3 参照)。

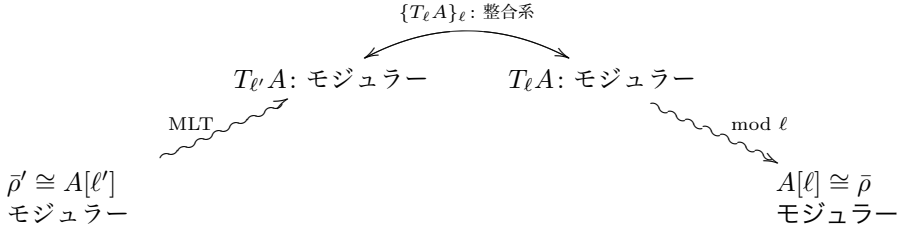


図4 [Taylor2], [Taylor3] で実行された ヒルベルト-ブルメンタール アーベル 多様体を用いた (ℓ, ℓ') トリック

モジュラー性を $\bar{\rho}$ に“感染”させることが出来るのである (図式4 参照)*28.

条件 (HBAV-1) 及び 条件 (HBAV-2) を満たすヒルベルト-ブルメンタール アーベル多様体を見つけ出すために、(偏極条件を指定した) ヒルベルト-ブルメンタール アーベル多様体全体、即ち ヒルベルト-ブルメンタール アーベル多様体のモジュライ を考えてみよう. このモジュライ空間 X (ヒルベルト-ブルメンタール モジュラー多様体 HILBERT-BLUMENTHAL modular variety) は所謂 志村多様体 (SHIMURA variety) と呼ばれるもので、擬射影性や幾何学的既約性等、非常に良い幾何学的性質を持つ多様体となることが ミハエル・ラポポルト (Michael RAPOPORT) 等に依って証明されている ([Rapoport] 参照). そこでテイラーは

ヒルベルト-ブルメンタール モジュラー多様体 X にモレ-バイイーの定理 (の系) を適用すれば、所望のアーベル多様体 A を構成出来るだろう

と考えた. 即ち、モレ-バイイーの定理 (の系) に拠って、適当な代数拡大 E/F に対してモジュライ空間 X の E -有理点 $x_A \in X(E)$ が構成出来る*29が、これは条件 (HBAV-1), (HBAV-2) を満たす E 上の ヒルベルト-ブルメンタール アーベル多様体 A/E に対応する (!) したがってこの A/E を用いて (ℓ, ℓ') トリックを実行することが出来る、というからくりである. 以上が [Taylor2], [Taylor3] に於ける (ℓ, ℓ') トリックの基本的戦略であった.

*28 一般には素数 ℓ, ℓ' ではなく 素イデアル λ, λ' が用いられるが、ここではあくまでヒルベルト-ブルメンタール アーベル多様体を用いた (ℓ, ℓ') トリックを通じて、 (ℓ, ℓ') トリックに於けるモレ-バイイーの定理の使われ方の概観を掴むことが目的なので、敢えて表記を他と合わせて ℓ, ℓ' を用いた.

*29 このような代数拡大 E/F は、具体的には適当な K の素点の有限集合 Σ に対し $E = K^\Sigma$ で与えられることは既に指摘した通りである.

但し、モレ-バイイーの定理を用いたアーベル多様体の構成は致命的な問題点も孕んでいることも注意しておこう; 即ち、 A が適当な代数拡大 E/F 上で定義されてしまっているため、 (ℓ, ℓ') トリックの際に $\bar{\rho}'$ のモジュラー性が $\bar{\rho}$ 全体には伝わらず、その制限 $\bar{\rho}|_{\text{Gal}(\bar{F}/E)}$ にしか伝搬されないのである。換言すれば、潜在的モジュラー性定理が“潜在的”となる由縁 (即ち体の拡大を行わなければ $\bar{\rho}$ のモジュラー性が示されない理由) はモレ-バイイーの定理 (及びその系) を適用する際に生じてしまう体の拡大に起因しているのである。現時点ではこの体拡大の不定性をコントロールすることは出来ておらず、したがって (ℓ, ℓ') トリックに於けるモジュラー性伝搬の際に生ずる“潜在性”は未だ回避出来ていない (注意 11 も参照)。

後程、モレ-バイイーの定理を少し変形したものを、カラビ-ヤウ族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ の底空間 T_0 に誘導される局所系 $\{V[N]_t\}_t$ に於けるレベル構造を指定したモジュライ空間に適用するが (§3 参照)、その際にも基礎体の拡大が生じてしまい、モジュラー性の伝搬に制限が生じてしまう。その詳細及び、体の拡大に由る不定性を如何にして回避するかと言った話題に関しては追って解説することにしよう。

注意 11. モレ-バイイーの定理の系に関連する話題として、 K^Σ を Σ の素点が完全分解する最大の 可解 拡大 $K^{\Sigma, \text{sol}}/K$ に取り替えられないか という問題がある。もしこのように取り替えられたとすると、アーサー-クローゼルの可解底変換定理 (ARTHUR-CLOZEL's *solvable base change theorem*) ([AC] 定理 4.2, [CHT] 補題 4.3.2) に拠って

$$\rho|_{\text{Gal}(\bar{K}/K^{\Sigma, \text{sol}})}: \text{モジュラー} \quad \Leftrightarrow \quad \rho: \text{モジュラー}$$

が従うので、モレ-バイイーの定理に起因する体拡大から発生する“潜在性” (不定性) を取り除くことが出来る。しかし、残念ながらこの問題は現時点に於いて未解決である (したがって未だに“潜在的”モジュラー性定理のままである)。◆

雑談 12 (擬代数的閉性, 擬 Σ -進閉性と可解性). 折角 注意 11 の話題に触れたので、異なる背景からも同様の問題に関心が持たれていることを紹介しよう*30。

有名な ヒルベルトの零点定理 (HILBERT *Nullstellensatz*) は、体 K が代数的閉体であることを

K 上の多項式環 $K[X_1, \dots, X_m]$ の任意の元 $f_1, \dots, f_r$ がイデアルとして $K[X_1, \dots, X_m]$ を生成しないとき、 $f_1, \dots, f_r$ の共通零点で K の元であるものが必ず存在する

と特徴付けている。この (アフィン代数幾何学的な) 条件を少し緩めた条件

*30 この話題は安田正大氏に教えていただきました。

任意の空でない K 上絶対既約な代数多様体が必ず K -有理点を持つ

を満たすような体 K を擬代数的閉体 (*Pseudo Algebraically Closed field, PAC field*) と呼ぶ. ヒルベルトの零点定理に拠り, 代数的閉体は自動的に擬代数的閉体となる. それでは, 逆に代数的閉でない擬代数的閉体は存在するか, 存在するならばどのようなものかという問題が自然に発生する. また, 既知の(代数的閉体ではない)体で擬代数的閉であるものは存在するかという問題も, 関連する重要な話題であると言えよう. これらの問題に対して, 例えばゲルハルト・フライ (*Gerhard Frey*) に依って

有理数体の最大アーベル拡大 $\mathbb{Q}^{\text{ab}}$ 及び最大冪零拡大 $\mathbb{Q}^{\text{nil}}$ は擬代数的閉でない

という結果が得られている ([Frey] 及び [FJ] 系 11.5.7 参照). ところが意外なことに, 有理数体の最大可解拡大 $\mathbb{Q}^{\text{sol}}$ が擬代数的閉体であるか, 即ち

$\mathbb{Q}^{\text{sol}}$ 上定義された空でない絶対既約な代数多様体は (必ず $\overline{\mathbb{Q}}$ 有理点を持つことは分かっているが) 必ず $\mathbb{Q}^{\text{sol}}$ 有理点を持つかどうか

という問題は未解決なのである (!) 「擬代数的閉かどうか」と言う非常に素朴な問題が, 有理数体の最大可解拡大というこれまた非常に素朴な代数拡大に対してさえ未だに解決されていないということは, 誠に驚くべきことであると言えよう.

さて, 以上の話題を踏まえた上でモレー-バイイーの定理を改めて振り返ってみよう. 代数体 K の素点の有限集合 (アルキメデスの素点を全て含む) Σ に対し, Σ の素点が完全分解する K の最大代数拡大を K^{Σ} とする時, モレー-バイイーの定理の系は K^{Σ} を

空でない K^{Σ} 上の絶対既約な多様体が各 $v \in \Sigma$ に対し非特異な K_v -有理点を持つとき, 必ず K^{Σ} -有理点を持つ

と特徴づけている. 擬代数的閉体との違いは, 各 $v \in \Sigma$ に対する K_v -有理点の存在条件が付されていることである. このように, 各 $v \in \Sigma$ に対し非特異な局所有理点の存在条件を付すことに依って大域有理点の存在が導かれる様な体を擬 Σ -進閉体 (*Pseudo Σ -adically Closed field, PSC field*) と呼ぶ. 注意 11 で指摘された「 K^{Σ} を $K^{\Sigma, \text{sol}}$ に取り替えられるか?」と言う問題は, まさに「 $K^{\Sigma, \text{sol}}$ は擬 Σ -進閉体か?」という問題に他ならない. この問題も $\mathbb{Q}^{\text{sol}}$ の擬代数的閉性と同様未解決であったから, どうも体の擬閉性と最大可解性は相性が悪いようであり, 現時点では両者の間の関係性がなかなか見出せない状況が続いている. 尤も, 最近ではこの方面の研究も徐々に進んでおり, 例えば シペリアーニ-ワイルズ (*CIPERIANI-WILES*) に依って

$\mathbb{Q}$ 上定義された種数 1 の滑らかかつ幾何学的既約な射影曲線 C で、各素数 p に対し $\mathbb{Q}_p$ 有理点が存在し、かつそのヤコビ多様体 (Jacobian variety) が準安定であるようなものに関しては $\mathbb{Q}^{\text{sol}}$ 有理点が存在する

という $\mathbb{Q}^{\text{sol}}$ の擬閉性の問題に対する部分的な結果が得られていることも付け加えておこう ([CW] 参照). ◆

雑談 13 (歴史的背景). モレバイイーの定理を巡る歴史的な背景について少し補足しておこう; 整数係数方程式の整数解が存在するか否かを問う ディオファントス問題 (DIOPHANTINE problem) には, 「 $R = \mathbb{T}$ 」の発展に貢献したフェルマー問題 (FERMAT problem) 等様々な興味深い問題が存在するが, これ等の問題の 解法 に付いてダフィッド・ヒルベルト (David HILBERT) は以下の様な問題を提起した:

n 個の未知数を含む整数係数の多項式 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ に対し, 方程式 $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ が整数解を持つか否かを有限的に判定する方法を見つけよ.

この問題はヒルベルトの第 10 問題 (HILBERT's tenth problem) と呼ばれる (「有限的に判定する方法」を正確に定式化するためにはモデル理論に於ける決定可能性等の概念を用いる必要がある). ヒルベルトの第 10 問題は, ロシアの数学者 ユーリ・マチャセヴィッチ (Yuri MATIYASEVICH) によって否定的に解決された.

一方, トラルフ・スコレム (Thoralf SKOLEM) は ディオファントス方程式の整数解ではなく 代数的整数解 に着目し,

整数係数の m 変数多項式系 $\{f_i(X_1, \dots, X_m)\}_{1 \leq i \leq r}$ が代数的整数で表される共通根を持つための (適当な) 条件を求めよ

という問題を考察した (スコレム問題 (SKOLEM's problem)). この問題もこのままでは純粹に方程式論・代数的整数論の問題でしかないが, 現代の代数幾何学の枠組みで捉え直すと

スキーム $S = \text{Spec } \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]/(f_1, \dots, f_r)$ が $\overline{\mathbb{Z}}$ -有理点をもつための適当な条件を求めよ (但し $\overline{\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{Z}$ の $\overline{\mathbb{Q}}$ に於ける整閉包)

という 有理点の存在問題 に帰着される. この問題に対し 最初に大きな進展をもたらした人物が ロバート・ルメリー (Robert RUMELY) である. 彼は以下の定理を示した:

定理 (ルメリーの局所・大域原理, [Rumely1]). $R, K, \mathfrak{M}_K, \mathfrak{M}_R$ を §2.1 の冒頭で定義した通りとする. $B = \text{Spec } R$ とおく. $X \rightarrow B$ を分離的有限型な既約 B -スキームで, 構造射が全射であり, X_K が K 上幾何学的既約であるようなものとする. このとき, 有理点の集合

カラビ-ヤウ多様体の或る族 と 潜在的保型性 —佐藤-テイト予想の証明に向けて— 39

$X(\overline{R})$ が空でないための必要十分条件は、各 $v \in \mathfrak{M}_R$ に対して $\overline{R}_v$ -有理点の集合 $X(\overline{R}_v)$ が空でないことである (但し $\overline{R}_v$ は K_v の代数的閉包 $\overline{K}_v$ に於ける R_v の整閉包). $\diamond$

ルメリーのこの定理は、大域的な有理点の存在と局所有理点の存在とが等価であることを主張することから 局所・大域原理 (*local-global principle*) と呼ばれる. 証明は長くなるのでここでは触れられないが、超平面切断の議論を繰り返してアファイン曲線の場合に帰着した後、キャパシティ理論 (*capacity theory*) を用いて証明するものである (ルメリーのキャパシティ理論に付いては [Rumely2] を参照). なお、ディオファントス方程式に於いて $\overline{\mathbb{Z}}_p$ -値の解を持つか否かに関しては有限的に判定する方法が存在することがモデル理論により知られているので、局所・大域原理と併せることに依って $\overline{\mathbb{Z}}$ に於いてはヒルベルトの第 10 問題が肯定的に解決されることも従う.

モレ-バイイーは [MB1] 及び [MB2] で、ルメリーの局所大域原理を局所有理点の条件を強めた上で、さらにキャパシティ理論を用いずに代数幾何学的方法で証明した (矢張り超平面切断を繰り返してアファイン曲線の場合に帰着した後、ピカル群の議論を用いる)^{*31}. したがって、モレ-バイイーの定理は“精密化”局所・大域原理 (*refined local-glocal principle*) と呼ばれたりもしている. その後モレ-バイイーの定理は、グリーン-ポップ-ロケット (GREEN-POP-ROQUETTE) [GPR] に依り付値論的な方法で再証明されている.

局所・大域原理に纏わる上記の結果は、直接的な応用として代数多様体の構成問題 (適当な“モジュライ空間”に局所・大域原理を適用する)^{*32}及び体の構成問題等に用いられていたようである. しかし、この様な応用が突き詰められて、テイラーに依り (ℓ, ℓ') トリックに利用され、更には佐藤-テイト予想を解決する原動力にまで発展するとは、流石のルメリーやモレ-バイイーも想像だにできなかったのではなかろうか. デイオファントス問題、スコレム問題から佐藤-テイト予想の解決に至るまでのダイナミックな歴史の胎動に触れ、近年の数論幾何学の目まぐるしい発展の営みに思いを馳せるのもまた一興であろう.

なお、スコレム問題を巡る歴史及びその応用に関しては、モレ-バイイーが非常に分かりやすく簡潔な要約 [MB3] を書いているので、興味のある方は是非参照されたい (英語で書かれているという点でも気楽に読めるのではないかと思う). $\blacklozenge$

2.2 モレ-バイイーの定理の変形版 と モジュライ空間の幾何学的連結性

それでは、本稿で実際に用いるモレ-バイイーの定理の変形版を導入しよう.

^{*31} 尤も、ルメリーのキャパシティ理論は局所・大域原理よりも深い情報を齎してくれるので、モレ-バイイーの結果がキャパシティ理論を駆逐したわけではない、ということは強調しておこう.

^{*32} 本稿の初稿では、モジュライ空間への応用はあまりなされていなかったような記述をしてしまったが、完全な著者の不見識であった.

命題 2.1 (モレ-バイイーの定理の変形版^{*33}). F を代数体とし, $S = S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3$ を F の素点の有限集合で, 互いに共通部分を持たず, さらに S_2 はアルキメデスの素点を含まないとする. また, T/F を F 上滑らかかつ 幾何学的連結 な代数多様体とし, 各 $v \in S_1$ に対して $T(F_v)$ の (v -進位相に関する) 空でない開集合 Ω_v が与えられ, 各 $v \in S_2$ に対して $T(F_v^{\text{nr}})$ の空でない $\text{Gal}(F_v^{\text{nr}}/F_v)$ -安定な開集合 Ω_v が与えられ, なおかつ各 $v \in S_3$ に対して $T(\overline{F}_v)$ の空でない $\text{Gal}(\overline{F}_v/F_v)$ -安定な開集合 Ω_v が与えられているとする. 最後に L/F を任意の有限次拡大とする. このとき F の有限次ガロワ拡大 F'/F 及び T の F' -有理点 P で, 以下の条件を満たすものが存在する:

(MB-1) F'/F は L/F と線形無関連.

(MB-2) 各 $v \in S_1$ は F' で完全分解し, v 上の F' の素点 w に対して $P \in \Omega_v \subseteq T(F'_w)$.

(MB-3) 各 $v \in S_2$ は F' で不分岐で, v 上の F' の素点 w に対して $P \in \Omega_v \cap T(F'_w)$.

(MB-4) 各 $v \in S_3$ 上の F' の素点 w に対して $P \in \Omega_v \cap T(F'_w)$. ◇

証明の概略. S_1, S_2, S_3 を適当に取り替えていって, オリジナルのモレ-バイイーの定理に帰着させることを目指す.

Step 1, 各単純部分ガロワ拡大 L_i/F で完全分解しないような素点 v を S_1 に付け加えることで, 線型無関連性 (MB-1) は (MB-2) から自動的に成立^{*34}.

Step 2, 適当な有限次ガロワ拡大 K/F で, S_1 の全ての素点が完全分解し, S_2 の全ての素点が不分岐かつ十分大きい惰性次数を持ち, かつ S_3 の全ての素点における完備化が十分大きい体となるようなものをとることに依り, 各 $w \in \Sigma_K$ に対して $\Omega_{v_w} \cap T(K_w)$ が空集合とならないように出来る. 但し, K の素点で S 上にあるもののなす集合を Σ_K とおき, 各 $w \in \Sigma_K$ の下にある S の素点を v_w と書いた.

Step 3, スコレム・データ $\mathcal{S} = \{T_K \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_K^S, \Sigma_K, \{K_w\}_{w \in \Sigma_K}, \{\Omega_{v_w} \cap T(K_w)\}_{w \in \Sigma_K}\}$ に対してモレ-バイイーの定理 ([MB2] 定理 1.3) を適用して既約閉部分多様体 $Y \hookrightarrow X$ を得る. 但し S は Σ_K を真に含む K の素点の有限集合 (注意 9 参照).

Step 4, このとき K のある有限次拡大 F' が存在し, Y は F' -有理点を持つ (例えば Y の関数体を考えよ). 構成からこの F' -有理点が, 各 S_1, S_2, S_3 の素点に対して (MB-2), (MB-3), (MB-4) を満たすことは明らかである.

Step 5, 必要に応じて F' を F 上のガロワ閉包に取り替えれば良い.

□

^{*33} [HSBT] の最新版で, S_3 の部分がさらに拡張された.

^{*34} ヘンゼルの補題とヴェイユの有界性定理を用いることで, T は殆ど全ての K の素点 v に対し K_v -有理点を持つことに注意.

纏めると

F_v の不分岐有限次拡大に於ける有理点の存在と K_v の完全分解有限次拡大に於ける有理点の存在が同値 (但し, 適当な (v で不分岐な) 代数拡大 K/F について)

であることから, 適当な代数拡大 K に対しては $\underline{S}_2 = \underline{S}_3 = \emptyset$ として良いという点に着目すれば, オリジナルのモレ-バイイーの定理に帰着出来るという点が証明の際のポイントである.

我々は, この変形版モレ-バイイーの定理 2.1 を, カラビ-ヤウ族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ の底空間 T_0 に誘導される局所系 $\{V[N]_t\}_t$ に於けるレベル構造を指定したモジュライ空間に適用することで (ℓ, ℓ') トリックに必要なモチーフを構成しようとしていたのであった. ここで, そろそろ件の“モジュライ空間” T_W を構成することとしよう.

F を代数体とし, W を連続な $\text{Gal}(\overline{F}/F)$ の作用を持つ n 階自由 $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ -加群とする. さらに, W は完全交代形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle_W: W \times W \rightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}(1-n)$ を持つものとする. W を自然に $\text{Spec } F$ 上の滑らかなエタール層と見做そう. 以上の設定の下で, 反変関手

$$\begin{aligned} \mathcal{S}ch/(T_0 \times \text{Spec } F) &\rightarrow \mathcal{S}ets \\ X &\mapsto V[N] \text{ 及び } W \text{ の } X \text{ への引き戻しの,} \\ &\text{交代形式を保つ同型射のなす集合} \end{aligned}$$

を考える ($\mathcal{S}ch/(T_0 \times \text{Spec } F)$ は $T_0 \times \text{Spec } F$ -スキームのなす圏). この関手は $T_0 \times \text{Spec } F$ 上の有限エタール被覆 T_W に依って表現されることが分かる. これが, 我々の考えるべきモジュライ空間である. 直観的には, T_W は T_0 の点 t 及び同型 $f_t: V[N]_t \xrightarrow{\sim} W$ (W に依るレベル構造) の組全体のなす空間である. 何度も注意しているように, T_W にモレ-バイイーの定理の変形版 (命題 2.1) を適用するためには T_W の幾何学的連結性を調べるのが肝要であったが (注意 9 参照), これは $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ の幾何的モノドロミーが大きいこと (補題 1.11) から直ちに従う:

系 1.12 (モジュライ空間 T_W の幾何学的連結性). $W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W$ を上記の通りとし, モジュライ空間 T_W を考える. $C(n)$ を補題 1.11 で導入される n のみに依存する定数とし, N を $C(n)$ より大きい素数のみを因数に持つ整数とする. このとき, 任意の埋め込み $F \hookrightarrow \mathbb{C}$ に対して $T_W(\mathbb{C})$ は連結となる. 即ち T_W は F 上のスキームとして幾何学的連結である. $\diamond$

証明. 代数体 F の埋め込み $F \hookrightarrow \mathbb{C}$ を予め固定しておこう. T_W の構成から, 任意の

$T_0 \times \operatorname{Spec} F$ -スキーム X に対して

$$\operatorname{Hom}_{T_0 \times \operatorname{Spec} F}(X, T_W) \cong \{V[N] \text{ 及び } W \text{ の } X \text{ への引き戻しの, 交代形式を保つ同型射}\}$$

が成立する. 特に X として $\operatorname{Spec} \mathbb{C}$ をとることで, T_W の複素有理点 $x \in T_W(\mathbb{C})$ は, $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ の埋め込み $F \hookrightarrow \mathbb{C}$ に関する引き戻しと, $V[N]_t$ (t は x に対応する T_0 の複素有理点) の間の交代形式を保つ同型射 f_x に対応する ことが分かる.

さて, T_W の複素有理点 x 及び対応する $T_0 \times \operatorname{Spec} F$ の複素有理点 t を考えよう^{*35}. さらに, 被覆空間 $\pi_W: T_W(\mathbb{C}) \rightarrow (T_0 \times \operatorname{Spec} F)(\mathbb{C})$ に於ける t のファイバーを $\pi_W^{-1}(t)$ と書くことにする. このとき, ファイバーの 2 点 x, x' に対応する同型射 $f_x, f_{x'}$ のズレが $V[N]_t$ のシンプレクティック自己同型射 $f_{x'} \circ f_x^{-1} \in Sp(V[N]_t)$ で表されることを用いると, モノドロミー表現

$$\pi_1(T_0(\mathbb{C}), t) \rightarrow \operatorname{Aut}(\pi_W^{-1}(t)) \cong Sp(V[N]_t); [\gamma] \mapsto f_{\gamma_* x} \circ f_x^{-1}$$

が得られる (ここで $\gamma_* x$ は, t を基点とする $T_0(\mathbb{C})$ の閉軌道 γ を $T_W(\mathbb{C})$ に持ち上げることで得られる x を始点とする道 $\tilde{\gamma}$ の, 終点 $\tilde{\gamma}(1)$ に対応する点). 補題 1.11 はこのモノドロミー表現が全射であることを表しているのに他ならない. したがって 任意の $t \in T_0(\mathbb{C})$ に対し, そのファイバー $\pi_W^{-1}(t)$ 内の任意の 2 点は $T_W(\mathbb{C})$ の道で繋ぐことが出来る. 即ち $T_W(\mathbb{C})$ は (弧状) 連結. $\square$

3 潜在的モジュラー性 ——— *Potential modularity*

第 3 節では, 前節までに用意して来た道具達を縦横無尽に駆使して本稿のハイライトである潜在的モジュラー性定理を証明する. 証明に入る前に, 「保型表現に対応するガロワ表現」や「ガロワ表現の保型性」の意味合いを明確にするために, RAESDC 表現及び付随するガロワ整合系の概念を導入する. その後, 先ず一般的な GSp_n 表現に対する潜在的モジュラー性定理 (定理 3.1) を証明し, 続いて GL_2 表現の対称積表現という特別な表現に対して仮定を弱めた結果 (定理 3.2) を示す. 特に証明を複雑たらしめている技術的な困難及び, テイラー等によるその巧妙な回避法をなるべく分かりやすく説明することを目標として論じていきたい.

現代数論幾何学の華形の一つである潜在的モジュラー性定理及び (ℓ, ℓ') トリックの議論を存分に堪能されたい.

^{*35} 複素有理点に対応する埋め込み $F \hookrightarrow \mathbb{C}$ が固定されているので, 以降 $T_0 \times \operatorname{Spec} F$ の複素有理点とその $T_0(\mathbb{C})$ -成分をしばしば断ることなく同一視する.

3.1 RAESDC 表現と付随するガロワ整合系

以下、代数体 F は総実代数体であるとし、 $\mathbb{A}_F$ を F のアデール環とする。また n を自然数、 ℓ を正の素数とし、同型 $\iota: \overline{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ を固定しておく。

さて、 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_F)$ の *RAESDC 表現* (*Regular Algebraic, Essentially Self Dual, Cuspidal representation*) とは、以下の条件を満たす 保型表現 π のことである:

- (正則代数性, regular algebraicity)
 π_∞ は、 GL_n の F から $\mathbb{Q}$ への係数制限のある既約な代数的表現と同じ無限小指標を持つ。
- (本質的自己双対性, essential self-duality)
ある指標 $\chi: F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ で $\chi_v(-1)$ が無限素点 v の取り方に依らないものが存在し、 $\pi^\vee \cong \chi\pi$ ($\pi^\vee$ は π の反傾表現) を満たす。
- (カスピダル性, cuspidality)
 π はカスピダル表現。

RAESDC 表現 π が 重さ 0 (*of weight 0*) であるとは

- π_∞ が $\mathrm{GL}_n(F_\infty)$ の自明表現と同じ無限小指標を持つ

こととする (一般の重さの概念については [CHT] § 4.2, 4.3 参照)。さらに、 S を F の有限素点の 空でない 有限集合とし、各 $v \in S$ に対し $\mathrm{GL}_n(F_v)$ の既約かつ 二乗可積分 (*square-integrable*) な表現 ρ_v が与えられているとき、RAESDC 表現 π が $\{\rho_v\}_{v \in S}$ 型 (*of type* $\{\rho_v\}_{v \in S}$) であるとは

- 各 $v \in S$ に対し π_v が $\rho_v^\vee$ の不分岐捻りと同型

となることとする。最後に、全ての ℓ 上の素点 $l \mid \ell$ に関して π_l が不分岐であるとき π は レベルが ℓ と素 (*level prime to ℓ*) であると呼ぶことにする。

RAESDC 表現に於いて重要な点は *RAESDC 表現* から志村多様体の理論を用いてガロワ整合系を構成出来ることであつた; 重さ 0, $\{\rho_v\}_{v \in S}$ 型の RAESDC 表現 π に対して (この様な表記をしたとき、暗黙のうちに $S \neq \emptyset$ が仮定されていることを改めて注意しておく)、クローゼル-ハリス-テイラー は以下の性質を持つ連続既約 ℓ 進ガロワ表現

$$r_{\ell, \iota}(\pi): \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

を構成した ([CHT] 命題 4.3.1)。

(性質-1) (局所ラングランズ対応との整合性) 全ての ℓ を割らない F の素点 v に対して

$$WD(r_{\ell,\iota}(\pi)|_{\text{Gal}(\overline{F}_v/F_v)})^{\Phi\text{-ss}} = \iota^{-1}(\text{rec}(\pi_v) \otimes |\text{Art}_K^{-1}|_K^{(1-n)/2})$$

が成り立つ。但し WD は連続な有限次元 ℓ 進ガロワ表現に対応する ヴェイユ-ドリーニュ表現 (WEIL-DELIGNE representation), $\Phi\text{-ss}$ は ヴェイユ-ドリーニュ表現のフロベニウス半単純化, rec は ハリス-テイラー (HARRIS-TAYLOR) に依り与えられた局所ラングランズ対応 [HT], Art_K は アルティンの相互写像 (それぞれの詳しい定義は [TY] 等を参照)^{*36}。

(性質-2) $r_{\ell,\iota}(\pi)^\vee = r_{\ell,\iota}(\pi)\epsilon_\ell^{n-1}r_{\ell,\iota}(\chi)$ 。

但し ϵ_ℓ は 円分 ℓ 進指標, $r_{\ell,\iota}(\chi)$ は指標 $\chi: F^\times \backslash \mathbb{A}_F^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ (RAESDC 表現の定義で登場した指標) に対応するガロワ指標 ([CHT] 補題 4.1.3 参照)。

(性質-3) ℓ 上の F の素点 v に対し $r_{\ell,\iota}(\pi)|_{\text{Gal}(\overline{F}_v/F_v)}$ は潜在的準安定表現 (potentially semi-stable representation) で, さらに π_v が不分岐ならばクリスタリン表現となる。

(性質-4) ℓ 上の F の素点 v と v に対応する埋め込み $\tau: F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ に対して

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \text{gr}^i(r_{\ell,\iota}(\pi) \otimes_{\tau, F_v} B_{DR})^{\text{Gal}(\overline{F}_v/F_v)} = \begin{cases} 1 & 0 \leq i \leq n-1 \text{ のとき,} \\ 0 & \text{それ以外,} \end{cases}$$

が成り立つ。但し B_{DR} は フォンテーヌ (FONTAINE) の p 進 ド・ラーム周期環。

また, 重さ 0, $\{\rho_v\}_{v \in S}$ 型の RAESDC 表現 π のレベルが ℓ と素のときには, 適当に $r_{\ell,\iota}(\pi)$ の像の共役をとって $\text{GL}_n(\overline{\mathbb{Z}}_\ell)$ に含まれるようにしたのち, ℓ での還元をとって半単純化することで連続半単純表現

$$\bar{r}_{\ell,\iota}(\pi): \text{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow \text{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$$

が得られる (これは共役の取り方に依らない)。

さて, ℓ 進ガロワ表現

$$r: \text{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow \text{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

が或る 重さ 0, $\{\rho_v\}_{v \in S}$ 型の RAESDC 表現 π に対し $r_{\ell,\iota}(\pi)$ と同型となるとき, r は 重さ 0, $\{\rho_v\}_{v \in S}$ 型で保型的 (*automorphic of weight 0 and type $\{\rho_v\}_{v \in S}$*) と呼ぶ。また, 法 ℓ ガロワ表現

$$\bar{r}: \text{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow \text{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$$

^{*36} または同値な言い換えであるが, 「代数的正規化」された ℓ 進相互写像 r_ℓ ([HT] VII.1 参照) を用いて,

$r_{\ell,\iota}(\pi)|_{\text{Gal}(\overline{F}_v/F_v)}^{\text{ss}} = r_\ell(\iota^{-1}\pi_v)^\vee(1-n)^{\text{ss}}$ とも書かれる ([CHT] 命題 4.3.1)。

が或る重さ 0, $\{\rho_v\}_{v \in S}$ 型のレベルが ℓ と素な RAESDC 表現 π に対し $\bar{r}_{\ell, \iota}(\pi)$ と同型となるとき, $\bar{r}$ は重さ 0, $\{\rho_v\}_{v \in S}$ 型で保型的 (*automorphic of weight 0 and type $\{\rho_v\}_{v \in S}$*) と呼ぶ. 重さ 0, $\{\rho_v\}_{v \in S}$ 型 RAESDC 表現に付随するガロワ表現達 $\{r_{\ell, \iota}(\pi)\}_{\ell}$ はガロワ整合系をなすことに注意しよう.

注意 14. 以下の注意は, テイラー等が証明した佐藤-テイト予想に於ける「弱い仮定」と直接関わる注意であるが, 著者の実力不足のためその深い背景にまでは迫ることが出来ないことをお詫びしておく.

- 志村多様体の理論を用いた保型表現からのガロワ表現の構成は, CM 体及び総実体の場合にしか行われていない^{*37}. この様に自在に保型表現からガロワ表現が構成出来ないという困難が, 「 $R = \mathbb{T}$ 」定理やモジュラー性持ち上げ定理に於いて様々な仮定を必要とする一つの要因となっている.
- π が $\{\rho_v\}_{v \in S}$ 型であるとき, π は少なくとも或る素点に於いて二乗可積分であることが要求される. このような局所二乗可積分性は, 局所ラングランズ対応に於いて生じるエンドスコピーの跡公式への寄与から生じる困難を回避するために必要な条件である. 「ある素点に於いて二乗可積分」という仮定に因り大幅に計算の複雑さが軽減されることもあり, 現時点ではガロワ表現の構成に於いてこの仮定を外すことは出来ていない…… という状況も今は昔の話で, 今や保型表現の研究 (及び「 $R = \mathbb{T}$ 」関連の研究) の発達の日進月歩であり, この人工的な仮定が外される日が来るのもそう遠い将来の話ではない (らしい). なお, この条件が, 今日佐藤-テイト予想が証明されているケース (定理 4.3) に於いて j -不変量が整数で無い という制限が課されてしまう源流となっている. ◆

例 (一般化スタインバーグ表現 $\mathrm{Sp}_n(\pi)$). K を局所体, $n \mid N$ とする. π を $\mathrm{GL}_{N/n}(K)$ のスーパー・カスピダル表現とし, Q_n を GL_N の放物型部分群 (parabolic subgroup) でそのレヴィ因子 (LEVI component) が $\mathrm{GL}_{N/n}^n$ で与えられるものとする. このとき,

$$\pi \times (\pi \otimes |\det|) \times \dots \times (\pi \otimes |\det|^{n-1})$$

の Q_n に依る正規誘導表現の中に現れる唯一の“生成的な”部分商 (generic subquotient) を $\mathrm{Sp}_n(\pi)$ と書き, π に付随する $\mathrm{GL}_N(K)$ の n 次一般化スタインバーグ表現 (*generalized STEINBERG representation*) と呼ぶ (より厳密な定義及び諸性質については [HT] I.3 参照). $\mathrm{GL}_n(K)$ の全ての二乗可積分表現はある $n \mid N$ 及び $\mathrm{GL}_{N/n}(K)$ のスーパー・カスピダル表現 π から定まる一般化スタインバーグ表現 $\mathrm{Sp}_n(\pi)$ と同型となることが知られている. 特に $\mathrm{GL}_{N/n}(K)$ の自明表現 $\mathbb{1}$ から定まる一般化スタインバーグ表現 $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{1})$ を単に

^{*37} 虚数乗法論の一般化であると言う観点から考えると納得しやすいかもしれない.

スタインバーグ表現 (STEINBERG representation) と呼ぶ. $\sharp\kappa(K)$ と素な素数 ℓ に対して $r_\ell(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{1}))^\vee(1-n)^{\mathrm{ss}}$ は フィルトレーション

$$\mathrm{gr}^j r_\ell(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{1}))^\vee(1-n)^{\mathrm{ss}} \cong \epsilon_\ell^j, \quad 0 \leq j \leq n-1$$

を持つので, K の幾何学的フロベニウス元 Frob_K に対して $r_\ell(\mathrm{Sp}_n(\mathbb{1}))^\vee(1-n)^{\mathrm{ss}}(\mathrm{Frob}_K)$ の固有値 (フロベニウス固有値) が $1, (\sharp\kappa(K))^{-1}, \dots, (\sharp\kappa(K))^{1-n}$ で与えられることが従う. 逆に π が二乗可積分 (もつと弱く緩増加 (tempered) でも良い) で, π に対応するガロワ表現 $r_\ell(\pi)^\vee(1-n)^{\mathrm{ss}}$ が不分岐かつそのフロベニウス固有値が或る $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ に対して $\alpha, \alpha\sharp(\kappa(K))^{-1}, \dots, \alpha(\sharp\kappa(K))^{1-n}$ で与えられるとき, π は $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{1})$ の不分岐捻りとなることが知られている. $\diamond$

3.2 $GS\mathrm{p}_n$ 表現の潜在的モジュラー性定理

いよいよ本稿のメイン・キャストである 潜在的モジュラー性定理 (Potential Modularity Theorem) にご登壇願おう. 先ずはそのステイトメントの紹介である. 正の偶数 n に対し代数群 $GS\mathrm{p}_n$ を

$$GS\mathrm{p}_n = \left\{ g \in \mathrm{GL}_n \left| \exists \nu: \mathrm{GL}_n \rightarrow \mathbb{G}_m \text{ s.t., } gJ_n {}^t g = \nu(g)J_n, \quad J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_{n/2} \\ -I_{n/2} & 0 \end{pmatrix} \right. \right\}$$

で定義し, 倍率 (multiplier, similitude) 付きシンプレクティック群 と呼ぶこととする (但し $I_{n/2}$ は $n/2$ -次単位行列).

定理 3.1 ($GS\mathrm{p}_n$ 表現の潜在的モジュラー性定理). F/F_0 を総実代数体のガロワ拡大とし, $n_1, n_2, \dots, n_t$ を 正の偶数 とする. ℓ を $\max\{C(n_i), n_i\}$ ($C(n_i)$ は 補題 1.11 にて導入された数) より大きい F で不分岐な素数とし, 完全分解条件

$$(\dagger) \quad \ell \equiv 1 \pmod{n_i + 1} \quad (\text{各 } i = 1, 2, \dots, t \text{ に対し})$$

を満たすものとする. さらに素数 q を各 $i = 1, 2, \dots, t$ に対して $q \nmid (n_i + 1)$ を満たすものとし, v_q を q 上の F の素点とする. $\mathcal{L}$ を ℓq 上の素点を含まない F の素点の有限集合で, $\mathrm{Gal}(F/F_0)$ の作用で安定なものとする.

さて, 各 $i = 1, 2, \dots, t$ に対し

$$r_i: \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow GS\mathrm{p}_{n_i}(\mathbb{Z}_\ell)$$

を以下の 5 つの性質を満たす殆ど全ての素点で不分岐な連続表現としよう:

(性質-1) 各 $i = 1, 2, \dots, t$ に対し, r_i の倍率 (multiplier) は $\epsilon_\ell^{1-n_i}$ となる. 但し ϵ_ℓ は ℓ 進円分指標.

カラビ-ヤウ多様体の或る族 と 潜在的保型性 —佐藤-テイト予想の証明に向けて— 47

(性質-2) r_i の法 ℓ 還元 $\bar{r}_i$ に対し $\bar{r}_i(\text{Gal}(\bar{F}/F(\mu_\ell)))$ は $(\text{GL}_{n_i}(\bar{\mathbb{F}}_\ell))$ の中で) 大きく (後述), さらに $\bar{F}^{\ker \text{ad } \bar{r}_i}$ は $F(\mu_\ell)$ を含まない. 但し μ_ℓ は 1 の ℓ 乗根のなす乗法群で, $\text{ad } \bar{r}_i$ は $\bar{r}_i$ の随伴表現.

(性質-3) r_i は $\mathcal{L}$ 上の全ての素点で不分岐.

(性質-4) w を ℓ 上の F の素点とすると, $r_i|_{\text{Gal}(\bar{F}_w/F_w)}$ はクリスタリン表現であり, 埋め込み $\tau: F_w \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ に関して

$$\dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell} \text{gr}^j(r_i \otimes_{\tau, F_w} B_{DR}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq j \leq n-1 \text{ のとき,} \\ 0 & \text{それ以外,} \end{cases}$$

が成立する. さらに,

$$\bar{r}_i|_{I_{F_w}} \cong 1 \oplus \epsilon_\ell^{-1} \oplus \dots \oplus \epsilon_\ell^{1-n_i}$$

も成立する.

(性質-5) $r_i|_{\text{Gal}(\bar{F}_{v_q}/F_{v_q})}^{\text{ss}}$ は不分岐表現で, その幾何学的フロベニウス元 Frob_{v_q} に於ける固有値は或る $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ に対して $\alpha, \alpha \# \kappa(v_q), \dots, \alpha(\# \kappa(v_q))^{n_i-1}$ となる. 但し $\kappa(v_q)$ は v_q の剰余体.

このとき, 総実代数体 F'/F で F_0 上ガロワ拡大かつ $\bar{F}^{\ker \bar{r}_i}$ 達の合成体と F 上線形無関係なものが存在し, 以下の性質を満たす.

- $\mathcal{L}$ 及び ℓ 上の全ての素点は F' に於いて不分岐.
- v_q 上の F' の素点 w_q が存在して, 各 $r_i|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ が重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w_q\}}$ 型で保型的となるものが存在する. 但し $\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})$ は n_i 次のスタインバーグ表現. $\diamond$

ここで, 有限次元 $\bar{\mathbb{F}}_\ell$ -ベクトル空間 V に対し $\text{GL}(V/\bar{\mathbb{F}}_\ell)$ の部分群 Δ が大きい (*big*) とは, Δ が位数 ℓ -冪の剰余を持たず, さらに条件

- $H^0(\Delta, \text{ad}^0 V) = H^1(\Delta, \text{ad}^0 V) = 0$ (但し $\text{ad}^0 V$ は $\text{ad } V$ のトレース 0 部分),
- $\text{ad } V$ の全ての既約 $\bar{\mathbb{F}}_\ell[\Delta]$ -部分加群 W に対して, 或る $h \in \Delta$ 及び $\alpha \in \bar{\mathbb{F}}_\ell$ で以下の条件を満たすものが存在する:
 - h の固有値 α に関する一般化固有空間 $V_{h,\alpha}$ の次元が 1,
 - V から $V_{h,\alpha}$ への射影を $\pi_{h,\alpha}$, $V_{h,\alpha}$ から V への埋め込みを $i_{h,\alpha}$ とするとき, $\pi_{h,\alpha} \circ W \circ i_{h,\alpha} \neq \{0\}$,

を満たすことを指し, [CHT] 及び [Taylor4] で扱われるモジュラー性持ち上げの議論に於いて重要な概念であるが, 本稿ではあまり深入りしないことにする. [安田・千田]などを参照されたい. また, 大きい部分群の例については [CHT] の 2.5 節 及び [SW] を参照.

注意 15. 御覧の通り, 潜在的モジュラー性定理はその仮定や条件が入り組んでいるためステイトメントを紹介するだけでも非常に複雑で難解なものとなってしまう. そこで, いきなり証明にとりかかる前に, この大量の条件がそれぞれ何のために必要となるかを概観しておこう.

(性質-1), (性質-4), (性質-5) は, 各 r_i をカラビ-ヤウ族 $\pi_{n_i}: Y_{n_i} \rightarrow \mathbb{P}^1$ に付随する局所系 $\{V_{n_i, \ell, t}\}_t$ から得られる ℓ 進表現 $V_{n_i, \ell, t}$ と結びつけるために必要な条件である. 特に (性質-4), (性質-5) は § 1.3 で調べた $V_{n_i, \ell, t}$ の性質と見比べていただくと納得しやすいであろう. また (性質-1) は, 各 r_i の倍率が局所系 $\{V_{n_i, \ell, t}\}_t$ に於いてポワンカレ双対性から誘導される交代形式に依るテイト捻りと対応していることを表している. これらの性質を仮定しないと, モレ-バイイーの定理の変形版 (命題 2.1) で考える局所有理点の集合 Ω_v が空集合になってしまう可能性が生ずる.

(性質-2), (性質-3) は主にセルマー群 (SELMER group) を扱うために必要な条件であり, 潜在的モジュラー性そのものに関係すると言うよりは [CHT], [Taylor4] で考察される モジュラー性持ち上げ定理 (*Modularity Lifting Theorem*) に於いて必要とされる条件である. ◆

証明の概略. この定理の証明は実は (ℓ, ℓ') トリックを実行しているだけ であると言っても過言ではない. ここではモジュラー性が既知の表現を如何にして構成するか, 若しくは実際にどのようなにして (ℓ, ℓ') トリックが行われるかを丁寧に見ていくために, 証明の細部までなるべく詳しく書くこととした. そのため記述が幾分長くなってしまったが, その本質は Step 2, のモレ-バイイーの定理を用いたモジュライ空間の有理点の構成と Step 3, の (ℓ, ℓ') トリックに集約されているのである.

Step 1, 「モジュラー性が既知な表現」の構成 (ℓ' サイド)

まずは ℓ' サイドの表現, 即ち 予め保型的であることが分かっている表現 を構成する. これは, 適当なヘッケ指標に対応するガロワ指標の保型誘導表現 として実現するのであった.

さて, E を虚二次体とし, n_i 次巡回ガロワ CM 体 $M_i/\mathbb{Q}$ を以下の条件を満たす様にする:

- ℓ 及び $\mathcal{L}$ の下にある $\mathbb{Q}$ の素点は M_i で不分岐.
- 各 M_i 達の合成体は, F のガロワ閉包と E との合成体と $\mathbb{Q}$ 上線型無関連.

ガロワ群 $\text{Gal}(M_i/\mathbb{Q})$ の生成元を τ_i とおき, 各 $i = 1, 2, \dots, t$ に対して p_i を M_i に於いて惰性的かつ不分岐で, EF_0 に於いて完全分解する様な素数とする. M_i のアデール環の有限部分を $\mathbb{A}_{M_i}^{\text{fin}}$ とする. このとき, 連続指標

$$\psi_i: (\mathbb{A}_{M_i}^{\text{fin}})^{\times} \rightarrow \overline{M_i}^{\times}$$

で以下の性質を満たすものが構成出来る ([HSBT] 補題 2.2 参照):

- $\psi_i|_{M_i^{\times}}(a) = \prod_{j=0}^{n_i/2-1} \tau_i^j(a^j) \tau_i^{j+n_i/2}(a^{n_i-1-j}).$

- $\psi_i|_{(\mathbb{A}_{M_i^+}^{\text{fin}})^\times}(a) = \prod_v |a|_v^{1-n_i}$. 但し, CM 体 M に対し, その最大総実部分体を M^+ と書いた.
- ψ_i は ℓ 及び $\mathcal{L}$ の下の素数に於いて不分岐.
- 各 $j = 1, 2, \dots, n_i - 1$ に対し, $\psi_i|_{\mathcal{O}_{M_i, p_i}^\times} \neq \psi_i^{\tau_i^j}|_{\mathcal{O}_{M_i, p_i}^\times}$.
- ψ_i は E で完全分解する様な有理素数上でのみ分岐する.

続いて適当な素数 ℓ' に対して, ψ_i を “ ℓ' 進化” する; $\widetilde{M}_i$ を ψ_i の像を含む M_i の有限次拡大で, $\mathbb{Q}$ 上ガロワ拡大であるものとする. このとき ℓ' を以下を満たす様にとる:

- ℓ' は $EF\widetilde{M}_1 \dots \widetilde{M}_t(\zeta_{n_1(n_1+1)}, \dots, \zeta_{n_t(n_t+1)})$ で完全分解.
- 各 $i = 1, 2, \dots, t$ に対して $\ell' > 8((n_i + 2)/4)^{n_i/2+1}$.
- 各 $i = 1, 2, \dots, t$ に対して $\ell' > C(n_i)$.
- ℓ' は E の類数を割り切らない.
- 各 $\bar{\tau}_i$ は ℓ' で不分岐.
- 各 ψ_i は ℓ' で不分岐.
- 各 $i = 1, 2, \dots, t$ に対して $\ell' \nmid (p_i^{n_i} - 1)$.
- 各 $j = 1, 2, \dots, \max_i \{n_i\} - 1$ に対して $\ell' \nmid (q^j - 1)$.
- $\ell' \neq \ell, \ell' \neq q$ かつ ℓ' は $\mathcal{L}$ の下の素数ではない.

さて, $\tilde{w}_{\ell', i}$ を ℓ' 上の $\widetilde{M}_i$ の素点とし, $w_{\ell', i} = \tilde{w}_{\ell', i}|_{M_i}$ とする. このとき,

$$\psi_{i, \ell'}: M_i^\times \backslash (\mathbb{A}_{M_i}^{\text{fin}})^\times \rightarrow \widetilde{M}_{i, \tilde{w}_{\ell', i}}^\times$$

を $\psi_{i, \ell'}(a) = \psi_i(a) \prod_{j=0}^{n_i/2-1} a_{\tau_i^{-j} w_{\ell', i}}^{-j} a_{\tau_i^{-j+n_i/2} w_{\ell', i}}^{j+1-n_i}$ として定義し, これをアルティンの相互写像 Art_{M_i} と合成させて $\tilde{w}_{\ell', i}$ で還元を取ることで, 法 ℓ' ガロワ 指標

$$\bar{\theta}_i: \text{Gal}(\overline{M}_i/M_i) \rightarrow \mathbb{F}_{\ell'}^\times$$

を得る. 構成からこの $\bar{\theta}_i$ は以下の性質を持つ:

- $\bar{\theta}_i \bar{\theta}_i^c = \epsilon_{\ell'}^{1-n_i}$. 但し c は任意の複素共役.
- 任意の $1 \leq j \leq n_i/2 - 1$ に対して $\bar{\theta}_i|_{I_{M_i, \tau_i^j w_{\ell', i}}} = \epsilon_{\ell'}^{-j}$.
- $\bar{\theta}_i$ は ℓ 及び $\mathcal{L}$ の下の素点に於いて不分岐.
- 任意の $1 \leq j \leq n_i - 1$ に対して $\bar{\theta}_i|_{I_{M_i, p_i}} \neq \bar{\theta}_i^{\tau_i^j}|_{I_{M_i, p_i}}$.
- $\bar{\theta}_i$ は E で完全分解する様な有理素数上でのみ分岐.

$\bar{\theta}_i$ の誘導表現 $\text{Ind}_{\text{Gal}(\overline{M}_i/M_i)}^{\text{Gal}(\overline{M}_i/\mathbb{Q})} \bar{\theta}_i$ 上に

$$\langle \varphi, \varphi' \rangle = \sum_{\sigma \in \text{Gal}(\overline{M}_i/M_i) \backslash \text{Gal}(\overline{M}_i/\mathbb{Q})} \epsilon_{\ell'}(\sigma)^{n_i-1} \varphi(\sigma) \varphi'(c\sigma)$$

で交代形式を定義すれば (これは複素共役 c の取り方に依らない. また交代性は n_i が偶数であることから従う), $\text{Ind}_{\text{Gal}(\overline{M}_i/M_i)}^{\text{Gal}(\overline{M}_i/\mathbb{Q})} \bar{\theta}_i$ は法 ℓ' 表現

$$I(\bar{\theta}_i): \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow GSp_{n_i}(\mathbb{F}_{\ell'})$$

を誘導する. $\bar{\theta}_i$ の構成に因り, $I(\bar{\theta}_i)$ の倍率も $\epsilon_{\ell'}^{1-n_i}$ であることが分かる.

Step 2, (ℓ, ℓ') トリックのための準備 (有理点 t_i の構成)

K を各 $\overline{F}^{\ker \bar{r}_i}$ 及び $\overline{\mathbb{Q}}^{\ker I(\bar{\theta}_i)}$ 達の合成体とする. また W_i を $\bar{r}_i \times I(\bar{\theta}_i)$ に対応する階数 n_i の自由 $\mathbb{Z}/\ell\ell'\mathbb{Z}$ -加群とする.

以下, § 2.2 で考察した $\pi_{n_i}: Y_{n_i} \rightarrow \mathbb{P}^1$ の底空間 T_0 の局所系 $\{V_{n_i, \ell\ell', t}\}_t$ に於けるレベル構造 W_i を指定したモジュライ空間 $T_{W_i} \rightarrow \mathbb{P}^1$ にモレ-バイイーの定理の変形版 (命題 2.1) を適用する. より具体的には, $S_1 = \{F \text{ の無限素点 } \}$, $S_2 = \mathcal{L} \cup \{\ell\ell' \text{ 上の素点 } \}$, $S_3 = \{v_q\}$ とおき, 各素点 $w \in S (= S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3)$ での局所有理点の条件 $\Omega_{i,w} \subseteq T_{W_i}(\overline{F}_w)$ を以下で定めた上で 命題 2.1 を用いる;

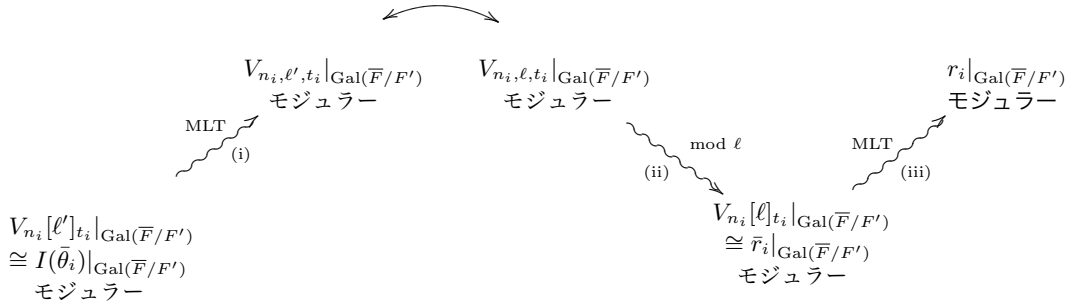
$$\begin{aligned} \Omega_{i,w} &= T_{W_i}(F_w) \quad (w \in S_1 \text{ のとき}), \\ \Omega_{i,w} &= (\{t \in T_0(F_w^{\text{nr}}) \mid w(1 - t^{n_i+1}) = 0\} \text{ 上の } T_{W_i}(F_w^{\text{nr}}) \text{ の元全体} \\ &\quad (w \in S_2 \text{ のとき}), \\ \Omega_{i,v_q} &= (\{t \in T_0(\overline{F}_{v_q}) \mid v_q(t) < 0\} \text{ の } T_{W_i}(\overline{F}_{v_q}) \text{ での逆像}) \subseteq T_{W_i}(\overline{F}_{v_q}), \end{aligned}$$

(各 $\Omega_{i,w}$ が空でないことは定義から簡単に分かる). 命題 2.1 を繰り返し用いることで, 漸進的に総実代数体 F_i/F 及び F_i -有理点 $\tilde{t}_i \in T_{W_i}(F_i)$ を

- F_i/F は ガロワ 拡大.
- F_i/F は $\mathcal{L}$ 及び $\ell\ell'$ 上の素点で不分岐.
- F_i は $KF_1F_2 \dots F_{i-1}$ と F 上線形無関連.
- 全ての $w \in S$ に対して, $\tilde{t}_i$ は $\Omega_{i,w}$ に含まれる.

を満たすように構成することが出来る. $\tilde{F} = F_1F_2 \dots F_t$ は F の総実ガロワ拡大で, S_1 の素点は全て $\tilde{F}$ で完全分解し, S_2 の素点は全て $\tilde{F}$ で不分岐となり, しかも $\tilde{F}$ は K と F 上線形無関連になる. また $t_i \in T_0(\tilde{F})$ を $\tilde{t}_i$ の像とすると, 構成から $V_{n_i}[\ell]_{t_i} \cong \bar{r}_i|_{\text{Gal}(\tilde{F}/\tilde{F})}$ 及び $V_{n_i}[\ell']_{t_i} \cong I(\bar{\theta}_i)|_{\text{Gal}(\tilde{F}/\tilde{F})}$ が成立する. さらに Y_{n_i, t_i} は $\ell\ell'$ で良い還元を持つので, V_{n_i, ℓ, t_i} は ℓ に於いてクリスタリン表現かつ ℓ' に於いて不分岐表現. 同様に V_{n_i, ℓ', t_i} は ℓ に於いて不分岐表現かつ ℓ' に於いてクリスタリン表現. w を v_q 上の $\tilde{F}$ の素点とすると, $V_{n_i, \ell', t_i}|_{\text{Gal}(\tilde{F}_w/\tilde{F}_w)}$ の半単純化は不分岐で, そのフロベニウス固有値は $\beta, \beta(\sharp\kappa(w)), \dots, \beta(\kappa(w))^{n_i-1}$ ($\beta \in \{\pm 1\}$ は w に依存する) となる.

Step 3, 証明の完成 ((ℓ, ℓ') トリック)

図5 定理 3.1 に於ける (ℓ, ℓ') トリック

F' を F_0 上の $\tilde{F}$ のガロワ閉包とする. F' は $\bar{F}^{\ker(\bar{r}_i)}$ 達の合成体と F 上線形無関連である*38.

- (i) $V_{n_i}[\ell']_{t_i} |_{Gal(\bar{F}/F')} \cong I(\bar{\theta}_i) |_{Gal(\bar{F}/F')}$ にテイラーのモジュラー性持ち上げ定理 ([Taylor4] 定理 5.6) を適用することで, $V_{n_i, \ell', t_i} |_{Gal(\bar{F}/F')}$ が重さ 0, $\{\mathrm{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w|v_q\}}$ 型で保型的となることが分かる. したがって $V_{n_i, \ell, t_i} |_{Gal(\bar{F}/F')}$ も重さ 0, $\{\mathrm{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w|v_q\}}$ 型で保型的
- (ii) また, $V_{n_i, \ell, t_i} |_{Gal(\bar{F}/F')}$ のレベルは ℓ と素だから, 法 ℓ 還元を考えることに依って, $V_{n_i}[\ell]_{t_i} |_{Gal(\bar{F}/F')} \cong \bar{r}_i |_{Gal(\bar{F}/F')}$ も重さ 0, $\{\mathrm{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w|v_q\}}$ 型で保型的となる.
- (iii) 再びテイラーのモジュラー性持ち上げ定理 ([Taylor4] 定理 5.2) に依って, $V_{n_i, \ell, t_i} |_{Gal(\bar{F}/F')}$ が重さ 0, $\{\mathrm{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w|v_q\}}$ 型で保型的となることが従う.

□

Step 3, の様子を 図 5 に示した. これをご覧いただければ, 本質的に行われている議論が (ℓ, ℓ') トリックのみであることが改めてご理解いただけるのではないかと思います.

定理 3.1 が本稿で扱う潜在的モジュラー性定理の核心部であることに何ら疑いの余地はないが, 定理 3.1 は素数 ℓ の完全分解条件 (†) や q が各 $n_i + 1$ を割り切らない条件等といった余計な条件を色々和仮定しなければ適用出来ないため, 残念ながらこのままでは使い勝手が良い定理とは言い難い. § 3.3 では GL_2 表現の対称積表現 という特別な GSp 表現に対してこの余計な条件達を外し, より使いやすい定理に改良することを目指す.

注意 16. 実は 定理 3.1 の証明は『 $R = \mathbb{T}$ の最近の発展についての勉強会』が開催された当時と比較すると大分簡略化されてしまった ([HSBT] の初期の版では証明に 5 ページ程割かれ

*38 これもモジュラー性持ち上げに必要な条件.

ていたが、最新版では 3 ページにまで削ぎ落とされている). これは主にモジュラー性持ち上げ定理側 (「 $R = \mathbb{T}$ 」側) の改良に由るものである. モジュラー性持ち上げ定理に関しては安田氏, 千田氏の解説 [安田・千田] もあるので深入りするつもりは毛頭ないが, そうは言っても証明が飛躍的に簡略化された理由に興味を持たれる方は少なからずいらっしゃると思われるので, ここでは 定理 3.1 の証明を簡略化する原動力となったモジュラー性持ち上げ定理の改良点のみに焦点を絞って解説を試みることにしよう.

総実代数体 F の絶対ガロワ群の ℓ 進表現 $\rho: \text{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow \text{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ に対し, その法 ℓ 還元 (の半単純化) を $\bar{\rho}$ とする. モジュラー性持ち上げの問題とは「 $\bar{\rho}$ がモジュラーな表現である時, そのモジュラー性を ρ に持ち上げられるか?」という問題であった. 特別な GL_n 表現に関しては クローゼル, ハリス, テイラーが伊原の補題の一般化を仮定した下でモジュラー性の持ち上げ定理を証明し ([CHT] 定理 4.4.2), その後テイラーが マーク・キシシ (Mark KISIN) の枠付き変形環の理論を用いることで伊原の補題の一般化を仮定することなく証明した ([Taylor4] 定理 5.2, 5.4).

さて, クローゼル-ハリス-テイラーのモジュラー性持ち上げ定理 ([CHT] 定理 4.4.2) を適用する際に必要な条件の中に, 以下ような条件がある^{*39}:

- (DS-1) ℓ を割らない F の素点の空でない有限集合 S が存在し, 各 $v \in S$ に対し $\text{GL}_n(F_v)$ の $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 上の二乗可積分表現 ρ_v が存在し, $r|_{\text{Gal}(\overline{F}/F)}^{\text{ss}} = r_\ell(\rho_v)^\vee(1-n)^{\text{ss}}$ が成り立つ.
- (DS-2) $\rho_v = \text{Sp}_n(1)$ (スタインバーグ表現) のとき, $j = 1, 2, \dots, n$ に対して非合同性条件 $e_\ell^j \not\equiv 1 \pmod{\ell}$ が成り立つ (F_v のフロベニウス固有値で言い換えると, $j = 1, 2, \dots, n$ に対して $(\#\kappa(v))^j \not\equiv 1 \pmod{\ell}$).
- $\rho_v = \text{Sp}_n(\pi)$ (一般化スタインバーグ表現) のときにも同様の非合同性条件が付されるが, より複雑となるので割愛する.

この条件をここでは「DS 条件」と呼ぶことにしよう. (DS-1) は, ハリス-テイラーの局所ラングランズ対応 [HT] に依ってガロワ表現 $r|_{\text{Gal}(\overline{F}_v/F_v)}^{\text{ss}}$ が離散系列表現 (*Discrete Series representation*) に対応するということを主張している. 「DS 条件」という呼称もこのことに因んだ. この条件は, 現時点ではある有限素点に於いて二乗可積分な保型表現でなければそれに伴うガロワ表現が構成されていないことに由来して付されたものである (注意 14 も参照). 他方 (DS-2) は v に於ける局所変形問題をなるべく単純かつ「扱いやすい」ものに制限するために付されている条件であり, 極めて技術的な仮定と言えよう.

(ℓ, ℓ') トリックを実行する際に問題となったのは (DS-2) の非合同性条件であった. 即ち, モジュライ空間に モレ-バイイーの定理を適用することに依って基礎体の拡大が生じてしまう

^{*39} [CHT] 定理 4.4.2, [Taylor4] 定理 5.4 の ステイトメント中の条件 5. 正確なステイトメントは原論文を参照のこと.

ために、モジュラー性を“感染”させた後の表現に対して 非合同性条件 (DS-2) が成立しなくなってしまう 可能性が発生するからである。この問題を回避するために、[HSBT] の初期の稿では大雑把に言えば 素点や体を次々と取り替える というアイデアを駆使し、散々回り諄い議論を積み重ねた上で漸く 定理 3.1 を証明していた。

ところが [Taylor4] (の最新版) で改良されたテイラーのモジュラー性持ち上げ定理 ([Taylor4] 定理 5.4) に於いては、 ρ_v がスタインバーグ表現の際に限り非合同性条件 (DS-2) が外された (つまり、スタインバーグ表現に対応する v についてはより複雑な局所変形環も扱えるようになったということである)。スタインバーグ表現という特別な表現に限った改良と言う点では劇的な改良とは言いが、上記の証明から明らかな様に 定理 3.1 の証明では ρ_v がスタインバーグ表現の場合しか扱わないため、この改良に因って証明が大幅に簡略化されたのである。

なお、以前この定理の証明が如何に複雑だったかを最新の証明と比較していただくために、付録として [HSBT] の初期の稿に於ける 定理 3.1 の証明を載せることとした (付録 B)。興味がある方は読み比べられるのもまた一興かと思う。◆

注意 17 ([Taylor4] 定理 5.6 について)。補題 1.15 に抛り カラビ-ヤウ族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ を用いた (ℓ, ℓ') トリックで現れる表現 V_{n_i, ℓ', t_i} はスタインバーグ型の惰性表現のみであることが分かる。そのため、素数 q に対する局所スタインバーグ条件 (特に (性質 5)) が r_i 達に付されている。しかし、証明中で登場した保型誘導表現 $I(\theta_i)$ (これが保型性が既知の表現であった) は決して局所スタインバーグ型にはならない (!) ので、このままでは V_{n_i, ℓ', t_i} と関連づけることが出来ない、という問題が生じる。但し $I(\theta_i)$ は局所スタインバーグ型にはならない代わりに、証明中で導入した素数 p_i に於いて局所スーパー・カスピタル型にはなる。この事実に着目して、[Taylor4] 定理 5.6 では $I(\bar{\theta}_i)$ のもう一つの持ち上げ ρ_i で v_q で局所スタインバーグ的なものを構成し、

- $I(\theta_i)$ は 重さ 0, $\{\rho_{v_{p_i}}\}_{\{v_{p_i}\}}$ 型で保型的
(v_{p_i} は p_i 上の素点, $\rho_{v_{p_i}}$ はスーパー・カスピタル表現)
- $\Rightarrow I(\bar{\theta}_i) \cong \bar{\rho}_i$ は重さ 0, $\{\rho_{v_{p_i}}\}_{\{v_{p_i}\}}$ 型で保型的
- $\Rightarrow \rho_i$ は 重さ 0, $\{\rho_{v_{p_i}}\}_{\{v_{p_i}\}}$ 型で保型的
(テイラーの保型性持ち上げ定理 [Taylor4] 定理 5.2)
- $\Rightarrow \rho_i$ は 重さ 0, $\{\mathrm{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{v_q\}}$ 型で保型的^{*40}
- $\Rightarrow \bar{\rho}_i \cong I(\bar{\theta}_i) \cong V_{n_i}[\ell']_{t_i}$ は 重さ 0, $\{\mathrm{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{v_q\}}$ 型で保型的
- $\Rightarrow V_{n_i, \ell', t_i}$ は 重さ 0, $\{\mathrm{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{v_q\}}$ 型で保型的
(テイラーの保型性持ち上げ定理 [Taylor4] 定理 5.2)

^{*40} RAESDC 表現がある素点に於いて二乗可積分であれば、全ての有限素点に於いて緩増加になること ([HT] 系 VII.1.11) から、 ρ_i は素点 v_q に於いて緩増加表現 π_{v_q} に対応する。さらに、 $r_{\ell'}(\ell^{-1}\pi_{v_q})^\vee(1-n_i)^{\mathrm{ss}}$ が

の様にして $I(\bar{\theta}_i)$ の保型性を巧妙に V_{n_i, ℓ', t_i} に持ち上げている (基礎体の拡大等細かい部分は割愛している. 正確な証明は [Taylor4] 定理 5.6 を参照のこと). $\blacklozenge$

3.3 対称積表現の潜在的モジュラー性

今度は GL_2 ガロワ表現の対称積表現に対して潜在的モジュラー性定理 3.1 を拡張しよう. §0 でも触れた様に, 佐藤-テイト予想への応用に於いては対称積表現に対する潜在的モジュラー性が本質的である.

定理 3.2 (対称積表現の潜在的モジュラー性). F を総実代数体とし, $n_1, n_2, \dots, n_s$ を正の偶数とする. また, ℓ を $\max\{C(n_i), 2n_i + 1\}$ より大きい F で不分岐な素数とし ($C(n_i)$ は補題 1.11 で導入された数), q を ℓ と異なる素数する. さて,

$$r: \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$$

を以下の 3 つの性質を満たす殆ど全ての素点で不分岐な総奇連続表現^{*41}とする:

(性質-1) r は全射.

(性質-2) w を ℓ 上の F の素点とすると, $r|_{\mathrm{Gal}(\bar{F}_w/F_w)}$ はクリスタリン表現であり, 埋め込み $\tau: F_w \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ に関して

$$\dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell} \mathrm{gr}^j(r \otimes_{\tau, F_w} B_{DR}) = \begin{cases} 1 & j = 0, 1 \text{ のとき,} \\ 0 & \text{それ以外,} \end{cases}$$

が成立する.

(性質-3) q 上完全分解する F の素点 v_q が存在して, $r|_{\mathrm{Gal}(\bar{F}_{v_q}/F_{v_q})}^{\mathrm{ss}}$ は不分岐表現で,

$r|_{\mathrm{Gal}(\bar{F}_{v_q}/F_{v_q})}^{\mathrm{ss}}(\mathrm{Frob}_{v_q})$ の固有値はある $\alpha \in \bar{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ を用いて $\alpha, \alpha \sharp \kappa(v_q)$ と表される.

このとき, 素数 ℓ が不分岐であるような総実ガロワ拡大 F''/F 及び v_q 上の F'' の素点 w_q で, 各 $\mathrm{Sym}^{n_i-1} r|_{\mathrm{Gal}(\bar{F}/F'')}^{\mathrm{ss}}$ が重さ 0, $\{\mathrm{Sp}_{n_i}(1)\}_{\{w_q\}}$ 型で保型的となるようなものが存在する. $\blacklozenge$

注意 18. (性質-1) に由り r の法 ℓ 還元 $\bar{r}$ が全射であることから, $\overline{\mathrm{Sym}^{n_i-1} r}^{\mathrm{ss}}(\mathrm{Gal}(\bar{F}/F(\mu_\ell)))$ が大きいことが従う ([CHT] 系 2.5.4). $\blacklozenge$

不分岐かつ, そのフロベニウス固有値が $\{\alpha_{i,q}(\sharp \kappa(v_q))^j\}_{0 \leq j \leq n_i-1}$ の形となる緩増加表現はスタインバーク表現の不分岐捻りのみであることに注意せよ.

^{*41} 連続表現 $\rho: \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \rightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_\ell)$ が総奇 (totally odd) とは, 任意の複素共役 $c \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ に対して $\det \rho(c) = -1$ が成り立つこと.

§3.2 でも指摘した様に, 定理 3.1 で登場する q 及び ℓ の局所条件 ($\ell \equiv 1 \pmod{n_i+1}$, $q \nmid (n_i+1)$) を外すことがこの定理の主たる目標であるが, その際に 楕円曲線のモジュライを利用した (ℓ, ℓ') トリック が活躍するのである.

証明の概略. 段階を分けて解説してゆこう. 先ず $F_1 = \overline{F}^{\ker(\epsilon_\ell \det r)}$ とおくと, F_1 は総実代数体となり, ℓ は F_1 に於いて不分岐となる.

Step 1, 下準備

以下を満たす素数 q' 及びその上の F の素点 $v_{q'}$ を選ぶ:

- r は q' 上不分岐.
- $\bar{r}(\text{Frob}_{v_{q'}})$ は固有値 $1, \sharp \kappa(v_{q'})$ を持つ.
- 各 $i = 1, 2, \dots, s$ に対して $q' \nmid (n_i + 1)$.
- $q' \neq q$ かつ $q' \neq \ell$.

同様に, 以下の性質を満たす素数 ℓ' を選ぶ;

- 各 $i = 1, 2, \dots, s$ に対して $\ell' \equiv 1 \pmod{n_i + 1}$.
- $\ell' \neq \ell, q, q'$.
- $\ell' > \max\{C(n_i), n_i\}$.
- ℓ' は F_1 で不分岐.
- r は ℓ' で不分岐.

注. ℓ' は (ℓ, ℓ') トリックで使う素数, q' は証明中でのみ用いる“補助的な”素数. 特に下線部で表した条件は 定理 3.1 で必要とされる条件のうち 定理 3.2 の仮定に含まれていないものであり, この部分を ℓ' と q' に押しつけているわけである. ◆

また, 楕円曲線 E_1/F で

- E_1 は ℓ 上の素点に於いて良い還元を持つ.
- E_1 は 素点 v_q 及び $v_{q'}$ に於いて潜在的乗法還元 (potentially multiplicative reduction) を持つ.
- E_1 は ℓ' 上の素点に於いて良い通常還元を持つが, $H^1(E_1 \times \text{Spec } \overline{F}, \mathbb{Z}/\ell'\mathbb{Z})$ は ℓ' に於いて馴分岐.
- 自然な射 $\text{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow \text{Aut}(H^1(E_1 \times \text{Spec } \overline{F}, \mathbb{Z}/\ell'\mathbb{Z}))$ は全射.

を満たすものをとる^{*42}.

^{*42} このような E_1/F が存在することは, 弱近似定理及びヒルベルトの既約性定理 (HILBERT's irreducibility

Step 2, 楕円曲線を用いた (ℓ, ℓ') トリックのための準備

W を $\bar{r} \times H^1(E_1 \times \text{Spec } \bar{F}, \mathbb{Z}/\ell'\mathbb{Z})$ に対応する階数 2 の自由 $\mathbb{Z}/\ell'\mathbb{Z}$ -加群とする. W には $\text{Gal}(\bar{F}/F_1)$ が自然に作用する. さらに, W には自然な完全交代形式

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: W \times W \rightarrow \mathbb{Z}/\ell'\mathbb{Z}(-1)$$

が定まる ($\bar{r}$ には $GL_2 = GSp_2$ 表現として完全交代形式が定まっており, 一方で $H^1(E_1 \times \text{Spec } \bar{F}, \mathbb{Z}/\ell'\mathbb{Z})$ にはポワンカレ双対性から完全交代形式が定まる). W を $\text{Spec } F_1$ 上の滑らかなエタール層と自然に同一視しておこう.

さて, $\text{Spec } F_1$ 上局所ネーター的 (locally noetherian) なスキームのなす圏 $\text{loc-noeth-}\mathcal{S}ch/\text{Spec } F_1$ から集合の圏 $\mathcal{S}ets$ への反変関手

$$\text{loc-noeth-}\mathcal{S}ch/\text{Spec } F_1 \rightarrow \mathcal{S}ets$$

$$S \mapsto \{(E, i) \text{ の同型類} \}$$

但し, $\pi: E \rightarrow S$ は楕円曲線

$$i: W \xrightarrow{\sim} R^1\pi_*(\mathbb{Z}/\ell'\mathbb{Z}) \text{ は交代形式を保つ同型}$$

のモジュライ空間を $X_W/\text{Spec } F$ とする (X_W は精モジュライで, 滑らかかつ幾何学的連結なアフライン曲線となることが分かる). ここで, $S_1 = \{F_1 \text{ の無限素点} \}$, $S_2 = \{\ell\ell' \text{ 上の } F_1 \text{ の素点} \}$, $S_3 = \{v_q, v_{q'} \text{ 上の } F_1 \text{ の素点} \}$ とし, さらに各素点 $v \in S (= S_1 \sqcup S_2 \sqcup S_3)$ に対し, 局所有理点の条件 $\Omega_v \subseteq X_W(\bar{F}_{1,v})$ を

$$\Omega_v = X_W(F_{1,v}) \quad v \mid \infty \text{ のとき}$$

$$\Omega_v = \{(E, i) \mid E \text{ は良い還元を持つ} \} \subseteq X_W(F_{1,v}^{\text{nr}}) \quad v \mid \ell\ell' \text{ のとき}$$

$$\Omega_{v_q} = \{ \text{乗法的還元を持つ楕円曲線に対応する } X_W(\bar{F}_{1,v_q}) \text{ の点} \}$$

$$\Omega_{v_{q'}} = \{ \text{乗法的還元を持つ楕円曲線に対応する } X_W(\bar{F}_{1,v_{q'}}) \text{ の点} \}$$

と定めた上で, モレ-バイイーの定理の変形版 (命題 2.1) を適用し, (ℓ, ℓ') トリックを実行する.

その際, 各局所有理点の集合 Ω_v が空でないことを確認する必要がある. 無限素点の場合は容易, $v \mid \ell'v_qv_{q'}$ の場合は E_1 の底変換が上記の条件を満たすので Ω_v は空ではない. 今回興味深いのは $v \mid \ell$ の場合の局所有理点の問題, 即ち

$v \mid \ell$ のとき, $E/F_{1,v}^{\text{nr}}$ が良い還元を持つような (E, i) が構成出来るか

theorem) の帰結である (F_{v_q} , $F_{v_{q'}}$ 及び $\mathbb{Q}_{\ell'}$ 上で局所的に構成しておいて, 大域体 F に延ばす議論をする. [Ekedahl] 参照).

という問題である. r は ℓ 上の素点ではクリスタリン表現であるため, この場合は p 進ホッジ理論 (p -adic HODGE theory) 等の p 進的な理論を用いた考察が必要となってくる. ここでは大筋の流れだけを追うことにしよう; 先ず フォンテーヌ-ラファイユ理論 (FONTAINE-LAFFAILLE theory) を用いて W の ℓ 捩れ部分 $W[\ell]$ の構造を決定する. $W[\ell]_{I_{F_1,v}}$ が $\omega_2^{-1} \oplus \omega_2^{-\ell}$ と直和に分解する場合は, $\overline{\kappa(v)}$ 上の超特異楕円曲線の ($F_{1,v}$ の有限次拡大の整数環への) 持ち上げが求める有理点に対応する. $W[\ell]$ が $I_{F_1,v}$ 上分裂しない場合には, $\kappa(v)$ の有限次拡大 κ 上で先ず楕円曲線 $\overline{E}$ を構成した後, κ を剰余体に持つような F_v の有限次拡大 K (正確にはその整数環 $\mathcal{O}_K$) 上に $\overline{E}$ を “巧く持ち上げる” ことで求める楕円曲線 E を構成する戦略をとる.

このような “巧い” 楕円曲線の持ち上げが存在するかどうかを調べる必要があるが, 楕円曲線 $\overline{E}/\kappa$ の $\mathcal{O}_K$ への持ち上げは p 進理論の古典理論たるアーベル多様体のセール-テイト理論 (SERRE-TATE theory) に拠って, 群 $\mu_{\ell^\infty}(\chi^{-1})$ の $(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)(\chi)$ に依る $\mathcal{O}_K$ 上の拡大でパラメータ付けされる. さらにそれぞれの群拡大はガロワ・コホモロジー群 $H^1(\text{Gal}(\overline{K}/K), \mathbb{Z}_\ell(\epsilon_\ell \chi^2))$ の元と対応するのであった. そこで, 持ち上げ $E/\mathcal{O}_K$ に対応するコホモロジー類 $[E] \in H^1(\text{Gal}(\overline{K}/K), \mathbb{Z}_\ell(\epsilon_\ell \chi^2))$ が自然な射

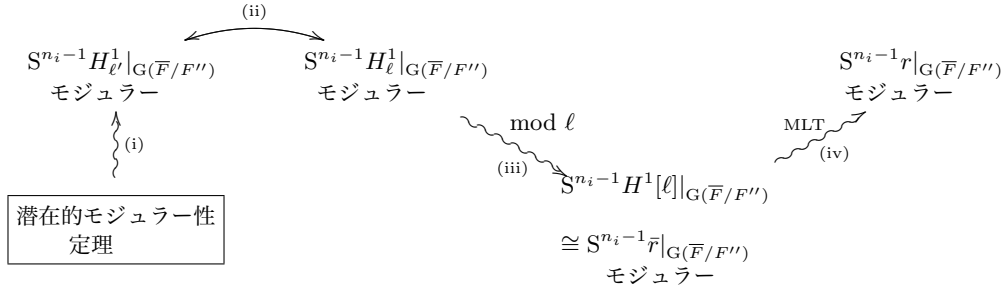
$$H^1(\text{Gal}(\overline{K}/K), \mathbb{Z}_\ell(\epsilon_\ell \chi^2)) \rightarrow H^1(\text{Gal}(\overline{K}/K), (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})(\epsilon_\ell)) \quad (3.1)$$

に依って $W^\vee$ (W の反傾表現) に対応する $H^1(\text{Gal}(\overline{K}/K), (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})(\epsilon_\ell))$ のコホモロジー類 $[W^\vee]$ に移るならば, $H^1(E \times \text{Spec } \overline{K}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \cong W[\ell]$ が導かれ, E が求める局所有理点に対応することが分かる. 後はガロワ・コホモロジーの計算 (加群の計算) で $[W^\vee]$ が (3.1) の像に入っていることを確かめれば良いだけである (計算の詳細は原論文を参照されたい).

以上の議論に拠り各 Ω_v が空集合でないことが示されたので, モレー-バイイーの定理の変形版 (命題 2.1) に依って以下のような F_1 を含む有限次ガロワ拡大 F'/F 及び楕円曲線 E/F' が構成される:

- F' は F_1 上 $\overline{F}^{\ker(\text{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow \text{Aut}(W))}$ と線型無関連.
- F' は総実代数体.
- $\ell\ell'$ 上の全ての素点は F' に於いて不分岐.
- E は ℓ 及び ℓ' 上の全ての素点に於いて良い還元を持つ.
- E は v_q 及び $v_{q'}$ 上の素点に於いて分裂乗法還元 (split multiplicative reduction) を持つ.
- $H^1(E \times \text{Spec } \overline{F}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \cong \bar{r}|_{\text{Gal}(\overline{F}/F')}.$
- $H^1(E \times \text{Spec } \overline{F}, \mathbb{Z}/\ell'\mathbb{Z})$ は ℓ' 上馴分岐.

Step 3, 証明の完了 (楕円曲線を用いた (ℓ, ℓ') トリック)

図 6 定理 3.2 に於ける楕円曲線を用いた (ℓ, ℓ') トリック

- (i) $\{\text{Symm}^{n_i-1} H^1(E \times \text{Spec } \overline{F}, \mathbb{Z}_{\ell'})\}_i$ に関する潜在的モジュラー性定理 (定理 3.1) に拠り, ある総実代数体 F''/F' で, 以下の性質を満たすものがとれる:
- F''/F は ガロワ拡大.
 - ℓ 及び ℓ' は F'' に於いて不分岐.
 - F'' は F' 上 $F' \overline{F}^{\ker(\text{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow \text{Aut}(W))}$ と線型無関連 (従って F'' は F_1 上 $\overline{F}^{\ker(\bar{r})}$ と線型無関連).
 - $w_{q'}$ を $v_{q'}$ 上の F'' の素点とすると, 各 $\text{Symm}^{n_i-1} H^1(E \times \text{Spec } \overline{F}, \mathbb{Z}_{\ell'})$ は F'' に於いて重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w_{q'}\}}$ 型で保型的かつレベルが ℓ' と素.
- (ii) v_q 上の F'' の素点を w_q とするとき, 各 $\text{Symm}^{n_i-1} H^1(E \times \text{Spec } \overline{F}, \mathbb{Z}_{\ell})$ は F'' に於いて 重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w_q\}}$ 型で保型的かつレベルが ℓ と素 (注意 17 と同様の議論に拠り, $w_{q'}$ を w_q に取り替える).
- (iii) 法 ℓ 還元を考えると, $\text{Symm}^{n_i-1} H^1(E \times \text{Spec } \overline{F}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) \cong \text{Symm}^{n_i-1} \bar{r}|_{\text{Gal}(\overline{F}/F'')}$ は F'' 上重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w_q\}}$ 型で保型的となる.
- (iv) テイラーのモジュラー性持ち上げ定理 ([Taylor4] 定理 5.4) に拠り, $\text{Symm}^{n_i-1} r|_{\text{Gal}(\overline{F}/F'')}$ は F'' に於いて 重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w_q\}}$ 型で保型的.

□

今回も Step 3, の流れを図 6 に表した (図 6 では Symm^{n_i-1} を S^{n_i-1} , Gal を G , E の ℓ 進コホモロジーを H_{ℓ}^1 , 法 ℓ コホモロジーを $H^1[\ell]$ などと略記した). 巧みに “補助素数” q' を駆使し, 楕円曲線を用いた (ℓ, ℓ') トリックに依って ℓ, q の余計な条件を取り除くその繊細なテクニックを存分に堪能されたい.

雑談 19. §1 及び §2 に於いては幾何学的な考察が多かったが, 定理 3.2 の証明に至って, 局所・大域原理に於ける局所有理点の構成に p 進ホッジ理論や セール-テイト理論などの数論的

に非常に深い理論が大活躍するという点は (個人的に) 非常に興味深いと思う^{*43}.

なお, 既に指摘した様に, テイラーの (GL_2 表現に対する) 潜在的モジュラー性定理 [Taylor2], [Taylor3] の証明中でも, モレ-バイイーの定理を適用する際の局所有理点の構成 (即ち局所体上のヒルベルト-ブルメンタール アーベル多様体の構成) に於いて p 進理論が駆使されている (詳細は [津嶋] 参照). ◆

4 種々の応用 — Applications

[HSBT] の最後を飾る第 4 節では, 前節で得られた対称積表現の潜在的モジュラー性定理 (定理 3.2) を楕円曲線の対称積 L 関数 $L(s, E, \text{Symm}^{m-1})$ ($m \geq 2$) の解析に利用することで, 念願であった (弱い仮定の下での) 佐藤-テイト予想の証明を完結している (定理 4.3). 本稿でも [HSBT] に従い, より一般にアーベル多様体の対称積 L 関数 $L(\text{Symm}^{m-1}(A, i), s)$ に対する解析接続性及び零点の配置について調べ (定理 4.2), その系として佐藤-テイト予想を導くことにしよう.

そうは言っても, 大変な部分は全て前節 (及び [CHT], [Taylor4]) で済ましてしまっているので, ここまで苦勞して本稿 (あるいは原論文 [HSBT]) を〈解説〉されてきた皆様方には, 苦難続きの果てしない旅路を乗り越えた末に漸く獲得した「潜在性モジュラー性定理」と言う非常に強力な“奥儀”に依って, 佐藤-テイト予想という世紀の犬予想が如何に鮮やかに攻略されてしまうかを存分に堪能出来る〈至福のひとつとき〉が訪れるに違いない.

4.1 総実代数体上のアーベル多様体の対称積 L 関数

まずは総実代数体上のアーベル多様体に対する対称積 L 関数の定義を復習しよう. とは言え, 佐藤-テイト予想に必要なのは楕円曲線の対称積 L 関数だけであり, その不分岐局所因子の定義は §0.3 で既に与えてしまっているので, 「一刻も早く佐藤-テイト予想の証明に辿り着きたい」という方は (勿論アーベル多様体の L 関数の一般的な定義を既にご存知の方も) この節は読み飛ばしてしまっても全く差し支えなからう.

F, L を総実代数体とし, A を F 上定義されたアーベル多様体としよう. また, 埋め込み (乗乘法) $i: L \hookrightarrow \text{End}^0(A/F)$ が与えられているとする. このとき, A は ロサッティ対合 (ROSATI involution) が iL に自明に作用するような偏極 (polarization) を持つことが知られている ([Rapoport] 参照). つまり, λ を ℓ 上の L の素点とすると,

$$\det H^1(A \times \text{Spec } \overline{F}, \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{L_\ell} L_\lambda = L_\lambda(\epsilon_\ell^{-1})$$

^{*43} 山下剛氏が本報告集の解説記事で, p 進の理論が「 $R = \mathbb{T}$ 」の発展に大きく寄与している事を指摘している ([山下 1]). 定理 3.2 などはまさにその典型例であろう.

が成立する.

さて, m を 2 以上の正の整数としよう. 各 F の素点 v に対し, $\bar{L}$ 上の 2 次元ヴェイユ-ドリーニュ表現 $WD_v(A, i)$ であって, $\ell (\neq \text{char } \kappa(v))$ 上の L の素点 λ に対して

$$WD(H^1(A \times \text{Spec } \bar{F}, \mathbb{Q}_\ell)|_{\text{Gal}(\bar{F}_v/F_v)} \otimes_{L_\ell} L_\lambda) \cong WD_v(A, i)$$

を満たすものが存在する. このヴェイユ-ドリーニュ表現 $WD_v(A, i)$ の対称積に対する L 因子の積を

$$L(\text{Symm}^{m-1}(A, i)/F, s) = \prod_{v \nmid \infty} L(\text{Symm}^{m-1}WD_v(A, i), s)$$

で表し, (A, i) の対称積 L 関数 と定義する. 対称積 L 関数 $L(\text{Symm}^{m-1}(A, i)/F, s)$ は $\text{Re}(s) > 1 + \frac{m-1}{2}$ の範囲で絶対かつ広義一様に収束し, この範囲で零点を持たない正則関数を定める.

ここで, §3.1 の定義を拡張して, 対称積表現 $\text{Symm}^{m-1}(A, i)$ が重さ 0, $\{\rho_v\}_{v \in S}$ 型で保型的とは, $\text{GL}_m(\mathbb{A}_F)$ の重さ 0, $\{\rho_v\}_{v \in S}$ 型の RAESDC 表現 π が存在して, F の素点 w に対して

$$\text{rec}(\pi_w)|\text{Art}_K^{-1}|_K^{-(m-1)/2} = \text{Symm}^{m-1}WD_w(A, i)$$

を満たすこととして定義する. この条件には幾つか同値な条件が存在するが, 詳しくは [HSBT] §4 の冒頭部を参照していただく (§4.1 の内容は殆ど当該箇所を抜粋したものである).

4.2 佐藤-テイト予想の証明

いよいよ佐藤-テイト予想 (予想 0.1) を (弱い仮定の下で) 証明しよう.

次の定理は, 本質的には 定理 3.2 を $\text{Symm}^{m-1}A$ ($m \geq 2$) に適用しただけのものである.

定理 4.1 (アーベル多様体の対称積表現の潜在的モジュラー性). F, L を総実代数体とし, A/F を $[L: \mathbb{Q}]$ 次元アーベル多様体とする. さらに, 埋め込み $i: L \hookrightarrow \text{End}^0(A/F)$ が与えられていると仮定する. $\mathcal{N}$ を正の偶数の有限集合とし, 埋め込み $L \hookrightarrow \mathbb{R}$ を固定する. さらに, A は F のある素点 v_q で乗法的還元を持つと仮定しよう.

このとき, ある有限次総実ガロワ拡大 F'/F が存在して, 全ての $m \in \mathcal{N}$ 及び, 全ての中間体 $F'/F''/F$ で F'/F'' が可解なものに対して $\text{Symm}^{m-1}(A, i)$ は F'' 上保型的となる. $\diamond$

証明. 適当に二次指標で捻ることで (A, i) は v_q で分裂乗法還元を持つものとしてよい (要するに全ての $\ell (\neq \text{char } \kappa(v_q))$ に対し, $H^1(A \times \text{Spec } \bar{F}, \mathbb{Q}_\ell)|_{\text{Gal}(\bar{F}_{v_q}/F_{v_q})}^{\text{ss}}$ への幾何学的フロベニウス元 Frob_{v_q} の作用の固有値が $1, \#\kappa(v_q)$ となる様に出来る). 後は 定理 3.2 が適用出来るように十分大きい素数 ℓ をとれば良い. 具体的には,

- ℓ は F で不分岐.
- $\ell > \max\{n, C(n)\}_{n \in \mathcal{N}}$. ($C(n)$ は 補題 1.11 で導入した数)
- A は F の全ての ℓ 上にある素点に於いて良い還元を持つ.
- 自然な射 $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow \mathrm{Aut}(H^1(A \times \mathrm{Spec} \overline{F}, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})/(\mathcal{O}_L/\ell\mathcal{O}_L))$ が全射.
- ℓ は L で完全分解.

となる様にとる (この様な ℓ の取り方は原論文参照). そうすれば 定理 3.2 から総実ガロワ拡大 F'/F で ℓ が F'/F に於いて不分岐なもの及び, v_q 上にある F' の素点 w_q が存在して, 任意の $m \in \mathcal{N}$ に対して $\mathrm{Symm}^{m-1}(H^1(A \times \mathrm{Spec} \overline{F}, \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{L_\ell} L_\lambda)$ (λ は ℓ 上にある L の素点) が F' 上で重さ 0, $\{\mathrm{Sp}_m(1)\}_{\{w_q\}}$ 型で保型的かつ, レベルが ℓ と素であることが得られる. これが $\mathrm{Symm}^{m-1}A$ の保型性と同値であることは [HSBT] §4 の冒頭で論じられている.

適当な可解部分拡大 $F'/F''/F$ に取り替えても保型性が保存されることは, 所謂 アーサー-クローゼルの可解底変換定理 (ARTHUR-CLOZEL's solvable base change theorem) ([AC] 定理 4.2, [CHT] 補題 4.3.2) に由る. $\square$

さて, §0.3 に抛り 佐藤-テイト予想の証明はセールの条件 (命題 0.4) に帰着されるが, セールの条件はその一般化である次の定理の直接の帰結として示される.

定理 4.2 (アーベル多様体の対称積 L 関数の解析的性質). F, L を総実代数体とし, A/F を $[L: \mathbb{Q}]$ 次元の代数多様体とする. さらに埋め込み $i: L \hookrightarrow \mathrm{End}^0(A/F)$ が与えられているとする. 埋め込み $L \hookrightarrow \mathbb{R}$ を固定し, A は F のある素点 v_q で乗法的還元を持つとしよう^{*44}. このとき, 全ての $m \geq 2$ に対して対称積 L 関数 $L(\mathrm{Symm}^{m-1}(A, i), s)$ は複素平面全体に有理型に解析接続され, 関数等式を満たし, $\mathrm{Re}(s) \geq \frac{m+1}{2}$ の範囲で正則かつ零点を持たない. $\diamond$

証明の前に議論の流れを確認しよう.

定理 4.1 に依って, m が正の偶数のときには 定理 4.1 で導入される F の代数拡大 F'' に対して $\mathrm{Symm}^{m-1}(A, i)|_{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F'')}$ は保型的, より正確に言えば $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_{F''})$ のある重さ 0, $\{\mathrm{Sp}_m(1)\}_{\{w_q\}}$ 型の RAESDC 表現 Π_m が存在して

$$L(\mathrm{Symm}^{m-1}(A, i)|_{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F'')}, s + \frac{m-1}{2}) = L(\Pi_m, s)$$

を満たす. 右辺のような保型 L 関数に関しては, 所望の性質が全て満たされることは良く知られているので, 考察しなければならないのは以下の二点である:

(問題 1) 如何にして制限 $|_{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F'')}$ を取り払うか? ^{*45}

^{*44} ここまでの仮定は, $\mathcal{N}$ を導入していないことを除いて 定理 4.1 と全く一緒である.

^{*45} この問題は, 潜在的モジュラー性定理の“潜在性” (代数拡大の不定性) に依って失われた情報を如何にして取り戻すか, と言うことを本質的に問うている.

(問題 2) m が奇数の場合はどう乗り切るか？

(問題 1) に関しては、有限群の表現論に於いて有名な ブラウアーの誘導定理 (BRAUER's induction theorem) ([SerreB] 参照) を用いて巧妙に回避する. この辺りの巧みな変形は以下の証明でたっぷり味わっていただければと思う.

(問題 2) はより根源的な問題とも言える. そもそも m が 3 以上の整数のとき, 現時点では直接 GL_m 表現の潜在的モジュラー性を扱えない理由の一つに, GL_m だと像が“大きすぎる”という問題があった. そこで, ポワンカレ双対性から誘導されるシンプレクティック構造 (交代形式) を含めた表現を考え, 像を GSp_m に“縮小”することに依り, 大きい m に対しても現在辛うじて潜在的モジュラー性を扱えるという状況なのである. しかし, シンプレクティック構造を込めて考えなくてはならないということは, 必然的に m が偶数 であることが要求されるということを意味し, 翻って現時点では m が奇数の場合に潜在的モジュラー性を用いて直接 L 関数の解析的性質を調べることは不可能である ということを示唆しているのである (!) (注意 24 も参照のこと) そうなると最早打つ手が断たれたかの様にも思われよう. しかし, 落ち着いて考えてみると, 定理 4.2 を証明する際に必要なのは L 関数の解析的性質 だけ であったから, そのことを逆手に取って 保型 L 関数の解析的理論に困難な部分を全て押し付けてしまう ことで, m が奇数の場合の $\mathrm{Symm}^{m-1}(A, i)$ の潜在的モジュラー性を一切論じることなく L 関数の解析的性質を調べることが出来てしまうのである (具体的には, 保型 L 関数の ランキン-セルバーグ たたみ込み積 (RANKIN-SELBERG convolution) を用いることで m が偶数の場合に帰着させる). 保型 L 関数に対しては, その解析的性質を調べる様々な手法が知られているので, このような“離れ業”が実現出来るのである.

定理 4.2 の証明. m に関する数学的帰納法で証明する. m を正の偶数とし, $2 \leq m' \leq m-1$ なる全ての m' について題意が成立するときに, m 及び $m+1$ について題意が成立することを示せば良い.

定理 4.1 を $\mathcal{N} = \{2, m\}$ に適用しよう. F'/F を定理 4.1 で得られる有限次総実ガロワ拡大とし, その有限個の可解中間体を $\{F_j \mid F'/F_j/F, F'/F_j \text{ は可解}\}$ ととっておく. つまり, $(A, i) \times \mathrm{Spec} \overline{F}_j$ は保型的で $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{F_j})$ の RAESDC 表現 σ_j と対応し, $\mathrm{Symm}^{m-1}(A, j) \times \mathrm{Spec} \overline{F}_j$ も保型的で $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_{F_j})$ の RAESDC 表現 π_j と対応するものとする. ここで $\mathrm{Gal}(F'/F)$ の自明表現 $\mathbb{1}$ に対してブラウアーの誘導定理を用いることで, 仮想表現 (virtual representation) としての等式

$$\mathbb{1} = \sum_j a_j \mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(F'/F_j)}^{\mathrm{Gal}(F'/F)} \chi_j \quad (4.1)$$

が得られる. 但し a_j は整数かつ χ_j は $\mathrm{Gal}(F'/F_j)$ の 1 次指標.

カラビ-ヤウ多様体の或る族 と 潜在的保型性 —佐藤-テイト予想の証明に向けて— 63

1 のブラウアー分解 (4.1) を用いることで, 対称積 L 関数 $L(\mathrm{Symm}^{m-1}(A, i), s + \frac{m-1}{2})$ は

$$\begin{aligned}
 & L(\mathrm{Symm}^{m-1}(A, i), s + \frac{m-1}{2}) \\
 &= L(\mathrm{Symm}^{m-1}(A, i) \otimes \mathbb{1}, s + \frac{m-1}{2}) \\
 &= \prod_j L(\mathrm{Symm}^{m-1}(A, i) \otimes \mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(\overline{F}'/F_j)}^{\mathrm{Gal}(\overline{F}'/F)} \chi_j, s + \frac{m-1}{2})^{a_j} \quad (L \text{ 関数の乗法性}) \\
 &= \prod_j L(\mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F_j)}^{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F')}((\mathrm{Symm}^{m-1}(A, i) \times \mathrm{Spec} \overline{F}_j) \otimes \chi_j), s + \frac{m-1}{2})^{a_j} \\
 & \quad \quad \quad (\text{フロベニウスの相互法則}) \\
 &= \prod_j L((\mathrm{Symm}^{m-1}(A, i) \times \mathrm{Spec} \overline{F}_j) \otimes \chi_j, s + \frac{m-1}{2})^{a_j} \quad (L \text{ 関数の誘導不変性}) \\
 &= \prod_j L(\pi_j \otimes (\chi_j \circ \mathrm{Art}_{F_j}), s)^{a_j} \quad (\text{対応する保型 } L \text{ 関数})
 \end{aligned}$$

と計算される. 右辺に登場する積の各因子は全て保型 L 関数であり, 保型 L 関数に関しては希望の性質が全て満たされるから, m の場合は成立 ($m = 2$ の場合も全く同様の議論).

さて, 例えば不分岐局所因子を見比べることに依って, 以下の L 関数の等式が得られる:

$$L(\mathrm{Symm}^m(A, i), s + \frac{m}{2}) L(\mathrm{Symm}^{m-2}(A, i), s + \frac{m-2}{2}) = \prod_j L((\pi_j \otimes (\chi_j \circ \mathrm{Art}_{F_j})) \times \sigma_j, s)^{a_j} \quad (4.2)$$

但し, 右辺の各因子はランキン-セルバーグのたたみ込み積 L 関数である. たたみ込み積 L 関数の解析的性質は保型表現の様々な手法を用いて精力的に研究されている^{*46}. 定理 4.2 を証明する上で我々が直面する問題は, (4.2) の右辺に現れるたたみ込み積 L 関数達が $\mathbb{C}$ 上有理型に解析接続され, 関数等式を満たすかどうか, 或いはその時 $\mathrm{Re}(s) \geq 1$ の範囲で零点を持つか, という二点であるが, これらの問題は保型 L 関数サイドの研究で既に解決されている. 解析接続性及び関数等式に関しては [CPS] を, また右辺に現れる全ての保型 L 関数達が $\mathrm{Re}(s) \geq 1$ の範囲で零点を持たないことに関しては [Shahidi] 定理 5.1 を参照されたい. あとは帰納法の仮定に因り, $L(\mathrm{Symm}^{m-2}(A, i), s + \frac{m-2}{2})$ は $s \geq 1$ の範囲に正則に解析接続され, その範囲で零点を持たないとして良いから, (4.2) の両辺を $L(\mathrm{Symm}^{m-2}(A, i), s + \frac{m-2}{2})$ で割り

^{*46} 所謂 ランキン-セルバーグ法 (RANKIN-SELBERG method, ゼータ積分を用いて L 関数の解析的性質を調べる方法) や ラングランズ-シャヒディ法 (LANGLANDS-SHAHIDI method, アイゼンシュタイン級数のフーリエ係数に注目して L 関数の解析的性質を調べる方法) といった保型 L 関数研究の“二大メイン・メソッド”を筆頭として, フライドゥーン・シャヒディ (Freydoon SHAHIDI), ヘンリー・キム (Henry H. KIM), イリヤ・ピアテツキ-シャピロ (Ilya PIATETSKI-SHAPIRO) 等保型表現の研究家達に依って目覚ましい成果が挙げられ続けている.

算することで, $L(\text{Symm}^m(A, i), s)$ も $s \geq 1 + \frac{m}{2}$ の範囲で正則に解析接続され, この範囲で零点を持たないことが従う. したがって $m+1$ の場合も成立.

最後に $m=3$ の場合

$$L(\text{Symm}^2(A, i), s) = \prod_j L((\text{Symm}^2 \sigma_j) \otimes (\chi_j \circ \text{Art}_{F_j}), s)$$

が残るが, これは最初に保型表現の二次対称積 L 関数を導入した ゲルバート-ジャック (GELBERT-JACQUET) に依る対称積持ち上げの議論 [GJ] を用いて証明される.

保型 L 関数を通じた解析的整数論が最先端の数論の研究に如何に強力な手段を提供しているかを改めて感じられたい. $\square$

雑談 20. 運命のいたずらか, はたまた歴史の必然か, この『 $R = \mathbb{T}$ の最近の発展についての勉強会』が開催された同年 (2008 年) 夏に举行された歴史ある『整数論サマースクール』のテーマが「保型 L 関数」であり^{*47}, その中で保型 L 関数の研究に於ける“二大メソッド” (ランキン-セルバーグ法, ラングランズ-シャヒディ 法) について非常に詳しい解説がなされた^{*48}. 本報告集の第 2 集も完成予定が順調に (?) 遅れてしまい, 刊行時点では既にこの整数論サマースクールの報告集も出来上がっている様なので, 上記の保型 L 関数の理論に興味をもたれた方は本報告集と併せて是非ご覧になっていただきたい [石井・平野]. $\blacklozenge$

定理 4.3 (弱い仮定の下での佐藤-テイト予想). F を 総実代数体 とし, E/F を F の素点 v_q で乗法的還元を持つ楕円曲線とする (特に, $j(E) \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$). 有限個を除く全ての素点 v について

$$\sharp E(\kappa(v)) = (1 - (\sharp \kappa(v))^{1/2} e^{\sqrt{-1}\theta_v})(1 - (\sharp \kappa(v))^{1/2} e^{-\sqrt{-1}\theta_v})$$

と書くとき, θ_v に関して佐藤-テイト予想 (予想 0.1) が成立する. $\diamond$

証明. セールの条件 (命題 0.4) 及び 定理 4.2 抛り明らか. $\square$

注意 21. 繰り返しになるが, F が総実体と言う条件は 保型表現からガロワ表現を構成する際に必要な条件であり, $j(E)$ が非整数と言う条件は局所ラングランズ対応に於けるエンドスコピーから生ずる難解さを回避するために付された条件である. 特に $j(E)$ が非整数と言う条件は極めて技術的な仮定であり, 保型表現の研究の進展が目覚ましい昨今に於いては, 近いうち

最後に, 保型表現とガロワ表現の間の対応構成を洗練させることで, n が奇数の場合にも潜

^{*47} 少し場違いな気もするが, この場を借りて素晴らしいサマースクールを演出して下さったオーガナイザーの石井卓氏及び平野幹氏に深い感謝の意を表したい.

^{*48} 対称積 L 関数の研究が佐藤-テイト予想に繋がることがこのサマースクール内でも繰り返し指摘されたことは言うまでもなからう.

在的モジュラー性定理を導くことが出来るようになるのではないかと、或いはもっと大胆にラングランズ対応の完成に依り直接（潜在性を經由しないで）全ての n についてモジュラー性を示すことが出来るようになるのではないかと、という非常に難しい（それでいて成り立つことが全ての数学者に依り期待されるような）問題はいまだ難攻不落の砦として我々の前に立ち塞がっているということを再度強調しておこう。ただ、そう言った根本的な困難を現代数学の持つ限りの技術を総動員して回避し辿り着いた上記の証明も、テイラー氏初め様々な先人達の努力と苦悩の痕跡がまざまざと感じられ、非常に感慨深いものであると思う。

雑談 22. 今回, $\mathrm{Symm}^{n-1}\rho$ を適当に 誘導表現の仮想的 $\mathbb{Z}$ -線形和

$$\sum_j a_j \mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F_j)}^{\mathrm{Gal}(\overline{F}'/F')} (\mathrm{Symm}^{n-1}\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{F}_j/F_j)} \otimes \chi_j)$$

で表わすことで、アルティン L 関数を L 関数の積の形に分解する という手法に依って L 関数の解析的性質が調べられた。もともとアルティン-ブラウアーに依る誘導表現の理論は、アルティン L 関数の解析接続性等を調べる際にヘッケ L 関数の性質に帰着させるために導入された理論であり、現在に至るまでアルティン L 関数の解析に於いて非常に有力な手法を提供している。

ここでは、一風変わった分野にも誘導表現の理論が応用されているという一例として、(個人的な趣味で申し訳ないが) 非可換岩澤理論 (*non-commutative IWASAWA theory*) を取り上げたいと思う。その選考理由は、有り体に言えば「著者が非可換岩澤理論を研究しているから」という事に尽きてしまうのかもしれないが、直接の動機は「 $R = \mathbb{T}$ 」という非可換岩澤理論とは大分趣向の異なる分野の勉強会で思い掛けず「見た事のある議論」と遭遇したことが非常に印象的であったことにある。些細なことかもしれないが、それでもこの様な発見は普段非可換岩澤理論という「 $R = \mathbb{T}$ 」とは離れた分野を研究している者の“穿った”視点からしか見えてこないものであると思われるし、勉強会中に得られた新鮮な驚き、感動をそのままお伝えする事も報告集の役割であろう、等と勝手に解釈することにして、以下その議論の類似性を指摘させていただきたい。なお、非可換岩澤理論についての詳細は [CFKSV], [FK], [Kakde], [H] などを参照のこと。

さて、 F^∞/F を総実代数体の総実な p 進リー拡大 (即ちガロワ群がコンパクト p 進リー群となる拡大) で、円分 $\mathbb{Z}_p$ -拡大 F^{cyc}/F を含むものとする。 $G = \mathrm{Gal}(F^\infty/F)$, $H = \mathrm{Gal}(F^\infty/F^{\mathrm{cyc}})$, $\Gamma = \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{cyc}}/F) \cong \mathbb{Z}_p$ とおく。このとき、 F^∞/F の p 進ゼータ関数 (p -adic zeta function) を、 G の岩澤代数 (の適当なオーレ局所化) $\Lambda(G)_S$ のホワイトヘッド群 $K_1(\Lambda(G)_S)$ の元 ξ で、 G の任意のアルティン表現 ρ 及び p 進円分指標 $\kappa: \mathrm{Gal}(F(\mu_{p^\infty})/F) \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ に対して

$$\rho\kappa^r(\xi) = L(1-r, F^\infty/F\rho), \quad \forall r \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad \text{s.t., } p-1 \mid r$$

を満たすものとして“定義”する (補間性質 interpolation property). ここで $L(s, F^\infty/F, \rho)$ は アルティン L 関数 (の分岐局所因子を除いたもの). p 進ゼータ関数 ξ の構成は非可換岩澤理論の重要な問題の一つである.

さて, $\{U_j, V_j\}_j$ を適当な開部分群の組 $G \supseteq U_j$, $H \supseteq V_j$ の族で, U_j/V_j がアーベル群かつ任意の G のアルティン表現 ρ を仮想表現としての $\mathbb{Z}$ -線型和 $\sum_j a_j \text{Ind}_{U_j}^G \chi_j$ (χ_j はアーベル群 U_j/V_j の指標) として表せるものとする (例えばブラウアー基本部分群の族を考えてみると良からう). F_{V_j}/F_{U_j} (F_{U_j}, F_{V_j} は U_j, V_j に依る F^∞ の固定体) に対しては, p 進ゼータ関数 ξ_j (つまり補間性質を満たす元 $\xi_j \in K_1(\Lambda(U_j/V_j)_S) = \Lambda(U_j/V_j)_S^\times$) が一意に存在することが知られている (ドリーニュ-リベ [DR], セール [SerreC]).

ここで, もしノルム写像 $\text{Nr}_j: K_1(\Lambda(G)_S) \rightarrow \Lambda(U_j/V_j)_S^\times$ に対し, $\text{Nr}_j(\xi) = \xi_j$ となる元 ξ が存在するとしたら, この ξ が F^∞/F に対する p 進ゼータ関数となる. これを確認するためには ξ が補間性質を満たすことを示せば良いが, そこで定理 4.2 の証明と同様に, 誘導表現を用いたアルティン L 関数の解析が用いられる. 即ち,

$$\begin{aligned}
 \rho \kappa^r(\xi) &= \left(\sum_j a_j \text{Ind}_{U_j}^G (\chi_j) \kappa^r \right) (\xi) \quad (\text{“誘導定理”}) \\
 &= \left(\sum_j a_j \chi_j \kappa^r \right) \circ (\text{Nr}_j(\xi)) \quad (\text{“フロベニウス相互法則”}) \\
 &= \left(\sum_j a_j \chi_j \kappa^r \right) (\xi_j) \quad (\xi \text{ の特徴付け}) \\
 &= \prod_j L(1-r, F_{V_j}/F_{U_j}, \chi_j)^{a_j} \quad (\xi_j \text{ の補間性質}) \\
 &= \prod_j L(1-r, F^\infty/F, \text{Ind}_{U_j}^G \chi_j)^{a_j} \quad (L \text{ 関数の誘導不変性}) \\
 &= L(1-r, F^\infty/F, \sum_j a_j \text{Ind}_{U_j}^G \chi_j) \quad (L \text{ 関数の乗法性}) \\
 &= L(1-r, F^\infty/F, \rho)
 \end{aligned}$$

ゆえ, ξ が補間性質を満たすことが従うのである.

勿論どちらもガロワ表現の L 関数の解析を行っているのであるから, 誘導定理を用いた解析が有用であることはよく考えてみれば当然のことかもしれないが, 「 $R = \mathbb{T}$ 」や非可換岩澤理論と言った最先端の数論幾何学の理論で“古典的な”誘導表現の理論が形を変えて縦横無尽に大活躍している様子を観察するだけでも十分面白い深いものと思う. ◆

雑談 23 (セールの予想との関係). 折角なのでセールのモジュラー性予想 (SERRE's modularity conjecture) に付いても潜在的モジュラー性定理の観点からコメントしておこう. ℓ を正の素数とする.

カラビ-ヤウ多様体の或る族 と 潜在的保型性 —佐藤-テイト予想の証明に向けて— 67

予想 (セールのモジュラー性予想). $\bar{\rho}: \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ を既約かつ奇な表現とする. このとき, $\bar{\rho}$ はモジュラーである. $\diamond$

この予想は最終的に チャンドラシェーカー・カーレ (Chandrashekhara KAHRE) と ジャン-ピエール・ヴァンテンベルジェ (Jean-Pierre WINTENBERGER) に依って解決された ([KW2], [KW3] 参照).

さて, 既に (ℓ, ℓ') トリックの世界に魅了されてきた方であれば, 「 (ℓ, ℓ') トリックを用いてモジュラー性が既知の表現のモジュラー性を“感染”させれば良いのではないか」というアイデアに容易に辿り着くことが出来るだろう. だが, 同時に (ℓ, ℓ') トリックには一つ看過することの出来ない大きな問題があったことも思い出しておこう; それは, モジュライ空間にモレーバイイーの定理を適用する際に生ずる基礎体の拡大の不定性 である. セールのモジュラー性予想は, 絶対既約かつ奇な GL_2 表現が (“潜在性” を伴わず) “本当に” モジュラーであることを主張しているのであるから, (ℓ, ℓ') トリックを用いてセール予想を証明しようとするならばこの体拡大の不定性をコントロールしなくてはならない. しかし, 現時点ではこれは全く制御出来ていないのであった (注意 11 も参照)*49. したがって, (ℓ, ℓ') トリックのみを用いたセール予想へのアプローチは残念ながらあまり先がないと言わざるを得ない.

ところが カーレ-ヴァンテンベルジェ の証明法には, (ℓ, ℓ') トリックで培われた「保型性の“感染”」の精神は脈々と受け継がれているのである. 彼らは, 上記の様なガロワ表現がガロワ強整合系 (GALOIS *strictly compatible system*) に埋め込めることを示し, それを用いて「ガロワ強整合系に“持ち上げて”法 ℓ' 還元“落とす”」と言う過程を経て, 保型性を次々と“感染”させる道を構成した (本報告集の山内氏の解説記事 [山内] の冒頭にその様子を表した非常に直観的で分かりやすい図式が掲載されている). その精神はまさに (ℓ, ℓ') トリックの精神そのものであるが, 肝心の強整合系が自由には取れないので (寧ろ取れる筈もないので), 残念ながらこの方法では (ℓ, ℓ') トリックのときのように一回の「持ち上げて落とす」操作だけで与えられた表現と保型性を知られている表現を直接“繋ぐ”ことは出来ない. この様な事情も相まって, カーレとヴァンテンベルジェの証明では保型性の伝達の際に複雑な帰納法が駆使されている.

それでは, モレーバイイーの定理を用いた (ℓ, ℓ') トリックはセール予想に対しては完全に無力であったのかと問われると, 必ずしもそう言うわけでもなく, 実は先に触れた「ガロワ表現を強整合系に埋め込める」という事実の証明に於いてテイラーの潜在的保型性定理 ([Taylor2], [Taylor3]) が用いられているのである. この様に複雑な事情を孕んではいるものの, 潜在的モジュラー性定理や (ℓ, ℓ') トリックがセールのモジュラー性予想に対しても極めて重要な役割を担っていると言う点だけは疑う余地はないだろう.

*49 逆説的に言えば, “潜在的” セール予想は既にテイラーが [Taylor2], [Taylor3] で部分的に解決していることになる. [津嶋] 参照.

本稿の後に続く 3 つの解説記事に於いて、田口雄一郎氏 [田口]、萩原啓氏 [萩原]、山内卓也氏 [山内] がセールの保型性予想の解決について素晴らしい解説記事を執筆されていることと思うので、引き続き是非ご堪能されたい。◆

雑談 24 (最近の潜在的モジュラー性定理及び佐藤-テイト予想の進展について). [HSBT] 以後の潜在的保型性定理及び佐藤-テイト予想の進展についてコメントしておこう. なお、著者は以下の結果については詳細に確認したわけではないので、あまり踏み込んだコメントをすることは出来ない. あくまでも最近の結果についての紹介程度の記述と考えていただきたい.

トマス・バーネット-ラム (Thomas BARNET-LAMB) は、 n が偶数のときに [HSBT] の結果を GSp_n 表現から GL_n 表現へと拡張した [BL1]. [HSBT] では、カラビ-ヤウ族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ に付随する局所系 $\{V_{\ell,t}\}_t, \{V[\ell]_t\}_t$ として各ファイバーの中間次元エタールコホモロジーの群スキーム H_0 に依る固定部分を用いていたが、これを別のものに取り替えるのが基本的な戦略のようである.

さらに、奇数次元の GL_n 表現の潜在的モジュラー性定理についても進展があり、2009 年に入って矢張りバーネット-ラムが $n = 3, 5$ のときに潜在的モジュラー性定理を証明したとアナウンスした [BL2].

佐藤-テイト予想に関しては、保型表現からのガロワ表現の構成が既に重さが十分大きい保型表現の場合には出来るようになっており、佐藤-テイト予想に必要な重さが小さい保型表現の場合のガロワ表現の構成もどうやら射程圏内に入っているようである. したがって、「 j -不変量が非整数」という条件は最早外されるのも時間の問題と言えるかもしれない. 一方で「基礎体が総実代数体」という条件の方は特別な場合を除いて外れる目処も立っていないようである.

最後に、本来の佐藤幹夫の研究対象であった保型形式に対する所謂佐藤予想の方面でも進展があり、トビー・ジー (Toby GEE) が重さが 2 乃至 3 の保型新形式について、対応する保型表現が或る有限素点でスタインバーグ的と言う条件 (佐藤-テイト予想に於ける「 j -不変量が非整数」という条件と対応) の下で佐藤予想を証明したと発表した [Gee]. ◆

結びに代えて

もう少しコンパクトに纏める予定であったが、予想外に紙面も時間も手間も費やしてしまった. 原稿の締め切りに何度も遅れ、報告集作成の予定を大幅に狂わせる結果となってしまったことを、編集者の斎藤毅先生並びに報告集作成に携わる全ての方々にお詫び申上げたい.

なるべく原論文の流れに忠実に論じ、数学的な間違いの無いように細心の注意を払って執筆したつもりではあるが、何分この分野に関しては完全な門外漢であるため、酷い勘違いなどが

残っていないとは断言出来ない. そういった間違いに関しては, テイラー氏等の論文原本, 安田氏の講演, 吉田氏の講演及び解説記事に囲まれた極めて理想的な執筆環境にありながらそれらを消化しきれなかった著者の実力不足に全て起因しており, 誤った記述の責任は著者のみあることを明記しておこう.

最後に,

5 日間非常に高密度な講演を聴いているだけでも肉体的にも精神的にも厳しい研究集会であったにも拘らず, たったお二方であれだけの膨大な数の論文を読破し, 分かりやすく講演し続けて下さった山下剛氏, 安田正大氏が如何に大変な苦勞を背負われていたかは想像だに出来ません. 二氏のおかげで全国の数論研究者が最先端の数論幾何学の成果に触れる機会を得られたことは誠に喜ばしいことであると思います.

また, 本稿の執筆に於いては安田正大氏の講演ノートが非常に参考になりました. 勉強会中は話に食らいつうだけで精一杯で, おそらく実際には何も理解していなかったに等しかった状態であったのですが, いざ執筆にあたり講演ノートを読み返してみると, 細々として分かりにくい証明に対し確実にポイントを捉え, 明快に議論の大筋を示して下さっていたことに改めて気づき, 感服するばかりです. ありがとうございます.

東京大学数理科学研究科の宮崎直氏には, 保型表現論に疎い著者に対し, 保型 L 関数及びその解析的性質の研究が現在どのように展開されているかをコメントしていただきました. 主に §4 の執筆の際に参考にさせていただきました. また, 九州大学数理学研究院の三枝洋一氏には, 原稿全体を通じて数学的な言い回しや表現についてアドバイスを頂きました. 恐らく著者の性格上の問題にも由来するのですが, このような解説記事の執筆に於いては大雑把なイメージや概観の記述に傾倒しがちで, 細かな数学的表現等への配慮が疎かになる傾向がありましたので, 氏の細やかな指摘は大変参考になりました. 両氏に御礼申し上げます.

八ヶ岳原村ペンションビレッジには何かと縁があり, 勉強会から半年後の 10 月中旬には日本数学会主催の 八ヶ岳フレッシュマンセミナー のチューターとして再び彼の地に訪れることとなりました. 半年前に同じ場所で行われた最先端の数論幾何学の講演に思いを馳せつつ, 一方で数学の世界に今まさに飛び込まんとする全国の数学科の学生たちの希望に満ちた目に励まされながら, 主に本稿のメインである「潜在的モジュラー性」の節 (§3) を執筆させていただきました. 素晴らしい勉強会環境・執筆環境を用意して下さい下さった原村の皆様及び, 原村での数学的活動 (研究集会, フレッシュマンセミナーなど) を積極的にサポートして下さい下さった斎藤秀司先生に深く御礼申し上げます. 今後とも原村が日本の数学界に新しい光を投げ掛け続ける拠点として機能してゆくならば, 非常に素晴らしいことと思います.

山下剛氏と安田正大氏には, お二方とも非常にお忙しい立場でいらっしゃるにも拘らず, まだまだ誤植や記述の不備が“殆ど至る所に” 存在するような酷い初稿を丁寧に読んでいただき, コメント及び重大な間違い (特に DS 条件について) に対して指摘をいただきました. 特に安

田正大氏には表現上の問題や歴史的背景などといった非常に細やかなところまでコメントしていただきました。自身でもうんざりするほど多くの誤植を孕んだ初稿に目を通された際のお二方の精神的苦痛は推し測るべくありません。お二方の指摘のお陰で、この拙い文章も大分まともなものになったことと存じます。本当にありがとうございました。

本講演会を主催なさった山下剛氏、安田正大氏及び、執筆にあたりお世話になった方々に改めて感謝の意を表しつつ、結びとさせていただきますと思います。

参考文献

- [たのしみ] 上野健爾・砂田利一・新井仁之編集、『佐藤-テイト予想の解決と展望』, 「数学の楽しみ」, 日本評論社, 2008 年最終号.
- [山下 1] 山下剛, 『Taylor-Wiles 系の復習』, 本報告集 第 1 巻.
- [津嶋] 津嶋貴弘, 『Taylor による潜在型性定理』, 本報告集 第 2 巻.
- [安田・千田] 安田正大, 千田雅隆, 『ユニタリ群の $R = \mathbb{T}$ 』, 本報告集 第 2 巻.
- [田口] 田口雄一郎, 『Serre 予想の証明: 帰納法の第一段階』, 本報告集 第 2 巻.
- [萩原] 萩原啓, 『Serre 予想の証明について (レベル 1 の場合)』, 本報告集 第 2 巻.
- [山内] 山内卓也, 『セール 予想の証明: 一般の場合』, 本報告集 第 2 巻.
- [石井・平野] 石井卓, 平野幹編, 第 16 回整数論サマースクール報告集 保型 L 関数 (2009).
- [AC] Arthur, J., and Clozel, L., *Simple algebra, base change, and the advanced theory of the trace formula*, Ann. of Math., Studies, **120**, Princeton University Press, Princeton, NJ (1989).
- [BH] Beukers, F., and Heckman, G., *Monodromy for the hypergeometric function ${}_nF_{n+1}$* , Invent. Math., **95** (1989) 325–354.
- [BL1] Barnet-Lamb, T., *Potential automorphy for certain Galois Representations to $GL(2n)$* , preprint, [arXiv:0811.1586\[math.NT\]](#) (2008).
- [BL2] Barnet-Lamb, T., *On the potential automorphy of certain odd-dimensional Galois representations*, preprint, [arXiv:0901.2514\[math.NT\]](#) (2009).
- [Carol] Carol, L., *Alice's Adventure in Wonderland*, Macmillan and Co., London (1865). (邦題 ルイス・キャロル, 『不思議の国のアリス』)
白ウサギを追って穴に飛び込んだ少女アリスが、不条理やパラドックス、ナンセンスに満ちた不思議の世界に迷い込むお話.
- [CFKSV] Coates, J., Fukaya, T., Kato, K., Sujatha, R., and Venjakob, O., *The GL_2 main conjecture for elliptic curves without complex multiplication*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **101** (2005) 163–208.

- [CHT] Clozel, L., Harris, M., and Taylor, R., *Automorphy for some ℓ -adic lifts of automorphic mod ℓ Galois representations*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **108** (2008) 1–181.
- [CL] Coddington, E. A., and Levinson, N., *Theory of ordinary differential equations*, McGraw-Hill, New York, Toronto, London (1955).
- [CPS] Cogdell, J., and Piatetski-Shapiro, I., *Remarks on Rankin-Selberg convolutions*, in “Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory,” Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD (2004).
- [CW] Çiperiani, M., and Wiles, A., *Solvable points on genus one curves*, Duke Math. J., **142** (2008) no. 3, 381–464.
- [DMOS] Deligne, P., Milne, S., Ogus, A., and Shih, K.-Y., *Hodge cycles, motives and Shimura varieties*, LMN, **900**, Springer (1982).
- [DR] Deligne, P., and Ribet, K. A., *Values of abelian L -functions at negative integers over totally real fields*, Invent. Math., **59** (1980) 227–286.
- [Ekedahl] Ekedahl, T., *An effective version of Hilbert’s irreducibility theorem*, in “Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1988-1989,” Progress in Math., **91**, Birkhäuser (1990).
- [FJ] Fried, M. D., and Jarden, M., *Field Arithmetic*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) **11**, Springer-Verlag, Berlin (1986).
- [FK] Fukaya, T., and Kato, K., *A formulation of conjectures on p -adic zeta functions in noncommutative Iwasawa theory*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **219** (2006).
- [Frey] Frey, G., *Pseudo algebraically closed fields with non-archimedean real valuations*, J. of Algebra, **26** (1973) 202–207.
- [Gee] Gee, T., *The Sato-Tate conjecture for modular forms of weight 3*, preprint, [arXiv:0906.0614\[math.NT\]](https://arxiv.org/abs/0906.0614) (2009).
- [GJ] Gelbert, J., and Jacquet, H., *A relation between automorphic representations of $GL(2)$ and $GL(3)$* , Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **11** (1978) 471–542.
- [GPR] Green, B., Pop, F., and Roquette, P., *On Rumely’s local-global principle*, Jahrensber. Deutsch. Math.-Verein., **97** (1995), 43–74.
- [Griffiths] Griffiths, P. A., *On the periods of certain rational integrals: I*, Ann. of Math. (2) **90** (1969) 460–495.
- [H] Hara, T., *Iwasawa theory of totally real fields for certain non-commutative p -extensions*, preprint, [arXiv:0803.0211v1 \[math.NT\]](https://arxiv.org/abs/0803.0211v1) (submitted).
- [HSBT] Harris, M., Shepherd-Barron, N., and Taylor, R., *A family of Calabi-Yau*

- varieties and potential automorphy*, preprint (to appear in *Annals of Mathematics*).
- [HT] Harris, M., and Taylor, R., *The Geometry and Cohomology of some simple Shimura varieties*, *Annals of Math. Studies*, **151**, PUP (2001).
- [Kakde] Kakde, M., *Proof of the main conjecture of noncommutative Iwasawa theory for totally real number fields in certain cases*, preprint, [arXiv:0802.2272v2](https://arxiv.org/abs/0802.2272v2) [math.NT].
- [KW2] Khare, C., and Wintenberger, J-P., *Serre's modularity conjecture (I)*, preprint (2007).
- [KW3] Khare, C., and Wintenberger, J-P., *Serre's modularity conjecture (II)*, preprint (2007).
- [Lang] Lang, S., *Algebraic numbers*, Addison-Wesley, New York (1964).
- [LSW] Lerche, W., Smit, D.-J., and Warner, N. P., *Differential equations for periods and flat coordinates in two-dimensional topological matter theories*, *Nuclear Phys., B*, **372** (1992) 87–112.
- [Mazur1] Mazur, B., *Modular curves and the Eisenstein ideal*, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **47** (1977) 33–186.
- [Mazur2] Mazur, B., *Rational isogenies of prime degree*, *Invent. Math.*, **44** (1978) 129–162.
- [MB1] Moret-Bailly, L., *Groupes de Picard et Problème de Skolem I*, *Ann. Scient. École Norm. Sup. (4)* **22** (1989) 161–179.
- [MB2] Moret-Bailly, L., *Groupes de Picard et Problème de Skolem II*, *Ann. Scient. École Norm. Sup. (4)* **22** (1989) 181–194.
- [MB3] Moret-Bailly, L., *Applications of local-global principles to arithmetic and geometry*, in *Hilbert's tenth problem: relations with arithmetic and algebraic geometry* (Ghent 1999), *Contemp. Math.* **270**, Amer. Math. Soc. Providence, RI (2000) 169–186.
- [MVW] Matthews, C. R., Vaserstein, L. N., and Weisfeiler, B., *Congruence properties of Zariski dense subgroups I*, *Proc. London Math. Soc.*, **48** (1984) 514–532.
- [Rapoport] Rapoport, M., *Compactifications de l'espace de modules de Hilbert-Blumenthal*, *Composito Math.*, **36** (1978) 255–335.
- [Rumely1] Rumely, R. S., *Arithmetic over the ring of all algebraic integers*, *J. Reine Angew. Math.*, **368** (1986) 127–133.
- [Rumely2] Rumely, R. S., *Capacity Theory on Algebraic Curves*, *Lecture Notes in Math.*, **1378**, Springer (1989).

- [SerreA] Serre, J-P., *Abelian ℓ -adic Representations and Elliptic Curves*, W. A. Benjamin (1968).
- [SerreB] Serre, J-P., *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, Paris (1978).
- [SerreC] Serre, J-P., *Sur le résidu de la fonction zêta p -adique d'un corps de nombres*, C. R. Acad. Sci. Paris, **287** (1978) série A, 183–188.
- [SGA7] Deligne, P., and Katz, N., *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 7, LMN, **340**, Springer (1973).
- [Shahidi] Shahidi, F., *On certain L -functions*, Am. J. Math., **103** (1981) 297–355.
- [SW] Snowden, A., and Wiles, A., *Bigness in compatible systems*, preprint.
- [Tate1] Tate, J., *Algebraic cycles and poles of zeta functions*, Arithmetical Algebraic Geometry, Proc. Conf. Purdue Univ. (1963).
- [Taylor2] Taylor, R., *Remarks on a conjecture of Fontaine and Mazur*, J. Inst. Math. Jussieu, **1** (1) (2002) 125–143.
- [Taylor3] Taylor, R., *On the meromorphic continuation of degree two L -functions*, Documenta Math. Extra Volume: John Coates' Sixtieth Birthday (2006) 729–779.
- [Taylor4] Taylor, R., *Automorphy for some ℓ -adic lifts of automorphic mod ℓ Galois representations II*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **108** (2008), 183–239.
- [TY] Taylor, R., and Yoshida, T., *Compatibility of local and global Langlands correspondences*, J. of Amer. Math. Soc., **20** (2007) 467–493.
- [Wiles1] Wiles, A., *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*, Ann. of Math. (2) **141** (1995) 443–551.

※ 本稿だけ見ると引用文献の番号の付け方がおかしい部分があるが、これは配布資料の REFERENCES に於ける引用文献の番号 (本報告集 第1巻 p.p. 11-15 参照) と整合性を持たせているためである。

付録 A V_t の L 関数の関数等式について

本稿では、主に佐藤-テイト予想の証明を目標として [HSBT] の紹介を行ってきた (勉強会での講演の方針と合わせたつもりである) が、[HSBT] の結果はそれに留まらず、 (ℓ, ℓ') トリックで駆使した カラビ-ヤウ モチーフ V_t の L 関数を導入し、その関数等式を証明している。

本論 (佐藤-テイト予想の証明) で思いの外紙面を費やしてしまったので、 V_t の L 関数について詳しく解説することは出来そうもないが、折角なので付録として紹介しておこう。

以下では n を正の偶数とする。 t を有理数とし、 ℓ, p を互いに異なる素数とすると、 ℓ 進表現 $V_{\ell,t}$ に付随する ヴェイユ-ドリーニュ 表現 $WD(V_{\ell,t}|_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)})$ を考える。ここで、 $\ell \neq p$ なる殆ど全ての素数 ℓ に対し、 $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の ヴェイユ-ドリーニュ 表現 $WD_p(V_t)$ で

$$WD_p(V_t) \simeq WD(V_{\ell,t}|_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)})^{\Phi\text{-ss}}$$

が各埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ について成立するものが存在する。これはつまり係数体 $\mathbb{Q}_\ell$ の剰余標数 ℓ とは無関係に ヴェイユ-ドリーニュ 表現 $WD_p(V_t)$ が存在することを表しており、ある種の純性 (*purity*) を表現している。

このような“純性”を示さない素数の集合を $S(V_t)$ とおく。このとき、[HSBT] では以下のことが示されている：

定理 ([HSBT] 定理 4.4). $t \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}[1/(n+1)]$ とするとき、 $S(V_t) = \emptyset$ である。さらに、

$$L(V_t, s) = 2^{n/2} (2\pi)^{n(n-2)/8} (2\pi)^{-ns/2} \Gamma(s) \Gamma(s-1) \dots \Gamma(s+1-n/2) \prod_p L(WD_p(V_t), s)$$

とおくと、これは複素平面全体に有理型に解析接続される。さらに整関数 (イプシロン 因子) $\epsilon(V_t, s)$ が存在し ([HSBT] ではその具体的な形も決定している)、関数等式

$$L(V_t, s) = \epsilon(V_t, s) L(V_t, n-s)$$

が成立する。 ◇

証明は、潜在的モジュラー性定理 (定理 3.1) を洗練させた形の定理を証明し ([HSBT] 定理 3.3)、 $V_{\ell,t}$ に適用することで $V_{\ell,t}$ の潜在的モジュラー性を示し、定理 4.2 で行った議論と同様に自明表現のブラウアー誘導表現分解を用いて保型 L 関数の積に帰着して示すのである。なお、保型表現から構成されたガロワ整合系に関しては、付随するヴェイユ-ドリーニュ表現が“純”であることが [TY] 定理 3.2 で示されているので、 $S(V_t) = \emptyset$ も分かるというからくりである。

L 関数の有理型解析接続性及び関数等式は、[Taylor2] や [Taylor3] でも扱われているように「潜在的モジュラー性定理」の最初の直接的な応用であり、その意味では $L(V_t, s)$ の解析接続性と関数等式に関するこの結果は佐藤-テイト予想よりも“基本的な”結果と呼べるかもしれない。しかし、如何せん V_t というモチーフがあまりにも特別なものであるため、その L 関数が応用出来る局面がどの程度存在するかは未知数である^{*50}。

^{*50} テイラーは [Taylor4] のイントロダクションで、審査員に「この特別な族 (カラビ-ヤウ族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$) を研

カラビ-ヤウ多様体の或る族 と 潜在的保型性 —佐藤-テイト予想の証明に向けて— 75

しかし、曲面族 $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^1$ は先にも述べたように、数理物理学、代数幾何学と色々な面で非常に重要な対象であり^{*51}、いつ何時この L 関数 $L(V_t, s)$ が活躍するとも限らない。特に、カラビ-ヤウ多様体と言えは ミラー対称性 (*mirror symmetry*) などと切っても切り離せない対象であるが、こういった不思議な対称性とゼータ関数の関数等式の対称性に何か神秘的な関係が隠されていたり…… するのかどうかは全くもって分からないが、とにかくこの L 関数 $L(V_t, s)$ も何れ数論の枠を飛び出して色々な場面で活躍する日が到来するのかもしれない。

付録 B 潜在的モジュラー性定理の証明 (初期型)

この付録では、[HSBT] の初期の稿に書かれていた GSp 表現の潜在的モジュラー性定理 (定理 3.1 に対応する) のステートメント及び、その証明について簡単に解説する。先ずは [HSBT] の初期の稿での 定理 3.1 のステイトメントを述べよう；

定理 (GSp_n 表現の潜在的モジュラー性定理 (初期型)). F/F_0 を総実代数体の ガロワ 拡大とし、 $n_1, n_2, \dots, n_s$ を正の偶数とする。 ℓ を $\max\{C(n_i), n_i\}$ ($C(n_i)$ は 補題 1.11 にて導入された数) より大きい F で不分岐な素数とし、完全分解条件

$$\ell \equiv 1 \pmod{n_i + 1} \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, s$$

を満たすものとする。また、 v_q を素数 $q \neq \ell$ 上の F の素点で

$$(b) \quad \begin{aligned} (\#\kappa(v_q))^j &\not\equiv 1 \pmod{\ell} && \text{for } 1, 2, \dots, \max\{n_i\} \\ q \nmid (n_i + 1) &&& \text{for } 1, 2, \dots, s \end{aligned} \quad (v_q \text{ の非合同条件})$$

を満たすものとする。 $\mathcal{L}$ を、 ℓq 上の素点を含まない F の有限素点の有限集合とする。

さて、

$$r_i: \text{Gal}(\overline{F}/F) \rightarrow GSp_{n_i}(\mathbb{Z}_\ell) \quad \text{for } 1, 2, \dots, s$$

を以下の 7 つの性質を満たす連続表現としよう：

(性質-1) r_i の倍率 (multiplier) は $\epsilon_\ell^{1-n_i}$ 。但し、 ϵ_ℓ は円分 ℓ 進指標。

(性質-2) r_i は有限個の有限素点でのみ分岐。

(性質-3) r_i の法 ℓ 還元の半単純化 $\bar{r}_i$ に対し、 $\bar{r}_i(\text{Gal}(\overline{F}/F(\mu_\ell)))$ は大きい。但し、 μ_ℓ は 1 の ℓ 乗根のなす乗法群。

究することの重要性を説明するよう求められた」と記述している。それに対する一つの答えとしてテイラーは、 ℓ 進コホモロジーへのガロワ作用が “大きい” 多様体 (この場合は GSp_n) の L 関数の研究 “例” として重要であるという趣旨の事を述べているが、 $L(V_t, s)$ 自身の秘めた可能性については触れていないようである。

^{*51} 先のテイラーの論文 [Taylor4] にも、“It is a family that has been studied quite widely and has some beautiful properties” とある。

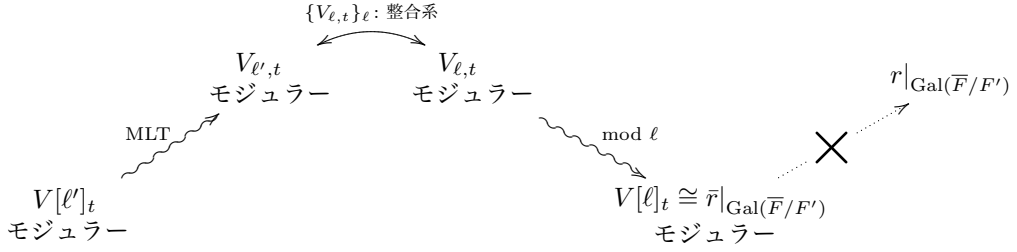


図 7 $\bar{r}|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ のモジュラー性が $r|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ に持ち上がらない!

(性質-4) $\bar{F}^{\ker \text{ad } \bar{r}_i}$ は $F(\mu_\ell)$ を含まない.

(性質-5) r_i は $\mathcal{L}$ 上の全ての素点で不分岐.

(性質-6) w を ℓ 上の F の素点とすると、 $r_i|_{\text{Gal}(\bar{F}_w/F_w)}$ はクリスタリン表現であり、埋め込み $\tau: F_w \hookrightarrow \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ に関して

$$\dim_{\bar{\mathbb{Q}}_\ell} \text{gr}^j(r_i \otimes_{\tau, F_w} B_{DR}) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq j \leq n-1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

が成立する. さらに,

$$\bar{r}_i|_{I_{F_w}} \cong 1 \oplus \epsilon_\ell^{-1} \oplus \dots \oplus \epsilon_\ell^{1-n_i}$$

も成立する.

(性質-7) $r_i|_{\text{Gal}(\bar{F}_{v_q}/F_{v_q})}^{\text{ss}}$ 及び $\bar{r}_i|_{\text{Gal}(\bar{F}_{v_q}/F_{v_q})}^{\text{ss}}$ は不分岐表現で、 $r_i|_{\text{Gal}(\bar{F}_{v_q}/F_{v_q})}^{\text{ss}}(\text{Frob}_{v_q})$ は固有値 $1, \sharp\kappa(v_q), \dots, (\sharp\kappa(v_q))^{n_i-1}$ を持つ. 但し $\kappa(v_q)$ は v_q の剰余体.

このとき、総実代数体 F'/F で F_0 上ガロワ拡大かつ $\bar{F}^{\ker \bar{r}_i}$ 達の合成体と F 上線形無関係なものが存在し、以下の性質を満たす.

- $\mathcal{L}$ 及び ℓ 上の全ての素点は F' に於いて不分岐.
- v_q 上の F' の素点 w_q が存在して、各 $r_i|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ が重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w_q\}}$ 型で保型的となる. ここで、 $\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})$ はスタインバーグ表現. $\diamond$

定理 3.1 との大きな違いは (b) で与えられる 非合同性条件 の有無であることは既に 注意 16 で指摘した通りである (注意 16 中の (DS-2) に対応)*52. この非合同性条件が何故証明を複雑化せしめる要因となったかを振り返ってみよう; モレーバイーの定理で生じる体拡大に

*52 (性質-7) の固有値の条件も α がついていない等若干異なるが、これは指標で捻れば良いだけなので大した問題はない. Step 1, (準備 3) 参照.

依って、非同次条件 (b) は F' では成立しなくなり得る。したがって、改良前のテイラーのモジュラー性持ち上げ定理で必要とされた DS 条件 (DS-1), (DS-2) が成立しなくなり、折角 $\bar{r}_i|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ に伝搬したモジュラー性が (そのままでは) $r_i|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ に持ち上がらなくなってしまうのである (図 7 にその様子を表してみた)。

この困難を乗り越えるために、[HSBT] の初期の稿では再び超曲面族 $\pi_{n_i}: Y_{n_i} \rightarrow \mathbb{P}^1$ を用いて体及び素数の巧妙な取り替え (descent) を行っている。モジュラー性持ち上げ定理が改良された現在となつてはこの様な議論は一切不要になったが、それでもこの手の超絶的な技巧を概観するのも全く無駄ではないと思われるので、付録として掲載することにした。

証明の概略. (定理 3.1 の証明と重複する部分もあるので、その部分は割愛させていただく)

Step 1, 下準備

(準備 1) 「モジュラー性が既知な表現」の構成 (ℓ' サイド)

この部分は 定理 3.1 の証明の Step1, と全く同様なので省略する。

(準備 2) “補助的な” (auxiliary) 素数 q' の導入

ここで、証明の中でしか用いられない素数 q' を補助的に導入する。

この q' は、 q とともに $\mathcal{L}$ の下の素数とも異なり、任意の $1 \leq i \leq s$ に於いて $q' \nmid (n_i + 1)$ かつ

- $EM_1 M_2 \dots M_r$ に於いて q' が完全分解.
- $(q')^j \not\equiv 1 \pmod{\ell}$ for $1, 2, \dots, \max\{n_i\}$.
- $(q')^j \not\equiv 1 \pmod{\ell'}$ for $1, 2, \dots, \max\{n_i\}$.
- $\bar{r}_i(\text{Frob}_{v_{q'}})$ は固有値 $1, q', \dots, (q')^{n_i-1}$ を持つ ($v_{q'}$ は q' 上の F の素点).
- $I(\bar{\theta}_i)(\text{Frob}_{v_{q'}})$ は固有値 $1, q', \dots, (q')^{n_i-1}$ を持つ.

を満たすものとして取る。 q' が ℓ に対しても ℓ' に対しても非同次条件を満たすのがポイントで、したがって $v_{q'}$ という素点はモジュラー性持ち上げ定理と非常に相性が良いのである。我々は取り敢えずこの $v_{q'}$ を用いて (ℓ, ℓ') トリックを行い、最後に $v_{q'}$ を v_q に取り替える議論を行うことになる (Step 4, 参照)。

(準備 3) 二次指標に依る「捻り」

ここはあまり本質的ではない。要するに $\bar{r}_i$ の v_q でのフロベニウス固有値 $(\sharp \kappa(v_q))^j$ と補題 1.15 から従う $V_{n_i}[\ell]_{t_q}$ ($t_q \in T_0(F_{v_q})$) でのフロベニウス固有値 $\alpha(\sharp \kappa(v_q))^j$ との間に $\alpha \in \{\pm 1\}$ のズレが生じるので、その部分を補正する二次の指標を準備する、というだけのことである。

Step 2, 「 F' への降下テクニック」のための準備

$W_i = \bar{r}_i \otimes \delta_i$ とする (δ_i は v_q でのフロベニウス固有値の符号のズレを補正する二次

$$\begin{array}{ccc}
& \longleftrightarrow & \\
\begin{array}{c} \text{MLT} \\ \text{DS at } v_{q'} \\ (I(\bar{\theta}_i) \otimes \delta'_i)|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')} \\ \cong V_{n_i}[\ell']_{t'_i}|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')} \\ \text{モジュラー} \end{array} & \begin{array}{c} V_{n_i, \ell', t'_i}|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')} \\ \text{モジュラー} \end{array} & \begin{array}{c} V_{n_i, \ell, t'_i}|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')} \\ \text{モジュラー} \\ \text{mod } \ell \\ (ii) \\ V_{n_i}[\ell]_{t'_i}|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')} \\ \cong (\bar{r}_i \otimes \delta'_i)|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')} \\ \text{モジュラー} \end{array}
\end{array}$$

図 8 定理 3.1 の初期の証明に於ける (ℓ, ℓ') トリック I

指標). モジュライ空間 $T_{W_i} \rightarrow \mathbb{P}^1$ (§ 2.2 参照) 及び以下のスコレム・データに対してモレ・バイイーの定理の変形版 (命題 2.1) を適用する:

$S_1 = \{ \text{無限素点} \} \cup \{v_q, v_{q'}\}$, $S_2 = \mathcal{L} \cup \{\ell\ell' \text{ 上の素点} \}$, $S_3 = \emptyset$ とする. 各素点 $w \in S (= S_1 \sqcup S_2)$ に於ける局所有理点の条件 $\Omega_{i,w}$ を

$$\begin{aligned}
\Omega_{i,w} &= (\{t \in T_0(F_w) \mid w(t) < 0\} \text{ の } T_{W_i}(F_w) \text{ での逆像}) \quad (w = v_q, w_{q'} \text{ のとき}), \\
\Omega_{i,w} &= T_{W_i}(F_w) \quad (w \mid \infty \text{ のとき}), \\
\Omega_{i,w} &= (\{t \in T_0(F_w^{\text{nr}}) \mid w(1 - t^{n_i+1}) = 0\} \text{ 上の } T_{W_i}(F_w^{\text{nr}}) \text{ の元全体}) \\
&\quad (w \in S_2 \text{ のとき}),
\end{aligned}$$

で定める (各 $\Omega_{i,w}$ が空でないことは定義から比較的簡単に分かる).

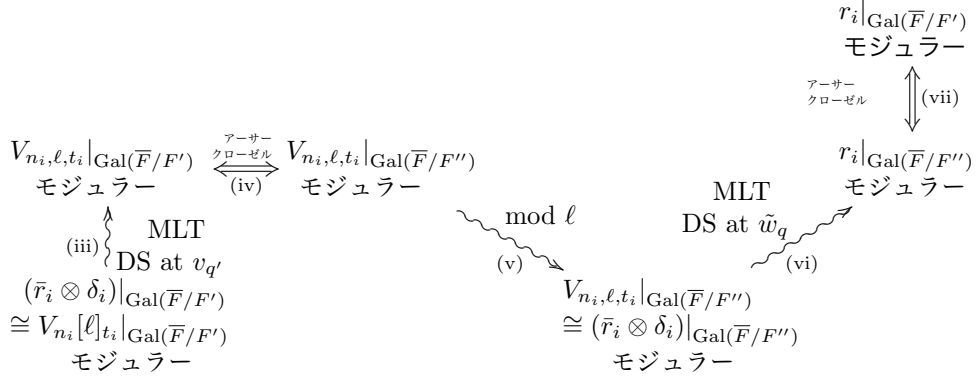
命題 2.1 を繰り返し用いることで, 漸進的に総実代数体 F_i/F 及び F_i 有理点 $\tilde{t}_i \in T_{W_i}(F_i)$ を

- F_i/F はガロワ拡大
- F_i/F は $\mathcal{L}$ 及び $\ell\ell'$ 上の素点で不分岐
- v_q と $v_{q'}$ は F_i で 完全分解
- F_i は $KF_1F_2 \dots F_{i-1}$ と F 上線形無関連. 但し, K は $\ker(\bar{r}_i)$, $\ker(I(\bar{\theta}_i))$, $\ker(\delta_i)$, $\ker(\delta'_i)$ に依る $\bar{F}$ の固定体を合成したもの
- 全ての $w \in S_1 \sqcup S_2$ に対して, $\tilde{t}_i$ は $\Omega_{i,w}$ に含まれる

を満たすように構成出来る. $\tilde{F} = F_1F_2 \dots F_r$ は F の総実ガロワ拡大となり, S_1 の素点は全て $\tilde{F}$ で完全分解し, S_2 の素点は全て $\tilde{F}$ で不分岐となり, $\tilde{F}$ は K と F 上線形無関連となる. また, $t_i \in T_0(\tilde{F})$ を $\tilde{t}_i$ の像とすると, 構成から $V_{n_i}[\ell]_{t_i} \cong (\bar{r}_i \otimes \delta_i)|_{\text{Gal}(\bar{F}/\tilde{F})}$ が成立する.

Step 3, (ℓ, ℓ') トリックの準備

Step 2, (及び 定理 3.1 の証明の Step 2,) と全く同様の議論を $W'_i = (\bar{r}_i \times I(\bar{\theta}_i)) \otimes \delta'_i$ (但し, δ'_i も矢張りフロベニウス固有値の符号のズレを補正する二次指標), $S'_1 =$

図9 定理 3.1 の初期の証明に於ける (ℓ, ℓ') トリック II-descent to F'

$\{\text{無限素点}\} \cup \{v_{q'}\}$, $S'_2 = \mathcal{L} \cup \{\ell' \text{ 上の素点}\}$, $S'_3 = \emptyset$ 及び

$$\Omega'_{i, v_{q'}} = (\{t \in T_0(F_{v_{q'}}) \mid v_{q'}(t) < 0\} \text{ の } T_{W'_i}(F_{v_{q'}}) \text{ での逆像}) \subseteq T_{W'_i}(F_{v_{q'}})$$

$$\Omega'_{i, w} = T_{W'_i}(F_w) \quad (w \mid \infty \text{ のとき}),$$

$$\Omega'_{i, w} = (\{t \in T_0(F_w^{\text{nr}}) \mid w(1 - t^{n_i+1}) = 0\} \text{ 上の } T_{W'_i}(F_w^{\text{nr}}) \text{ の元全体})$$

($w \in S'_2$ のとき),

に対して実行すると, 漸進的に総実代数体 F'_i/F 及び F'_i 有理点 $\tilde{t}'_i \in T_{W'_i}(F'_i)$ を

- F'_i/F はガロワ拡大
- F'_i/F は $\mathcal{L}$ 及び ℓ' 上の素点で不分岐
- $v_{q'}$ は F'_i で完全分解
- F'_i は $K\tilde{F}F'_1F'_2 \dots F'_{i-1}$ と F 上線形無関連
- 全ての $w \in S'_1 \sqcup S'_2$ に対して, $\tilde{t}'_i$ は $\Omega'_{i, w}$ に含まれる

を満たすように構成出来る. $\tilde{F}' = F'_1F'_2 \dots F'_r$ は F の総実ガロワ拡大となり, S'_1 の素点は全て $\tilde{F}'$ で完全分解し, S'_2 の素点は全て $\tilde{F}'$ で不分岐となり, $\tilde{F}'$ は $K\tilde{F}$ と F 上線形無関連となる. また, $t'_i \in T_0(\tilde{F}')$ を $\tilde{t}'_i$ の像とすると, 構成から $V_{n_i}[\ell]_{t'_i} \cong (\bar{r}_i \otimes \delta'_i) |_{\text{Gal}(\bar{F}/\tilde{F}')}$ 及び $V_{n_i}[\ell']_{t'_i} \cong (I(\bar{\theta}_i) \otimes \delta'_i) |_{\text{Gal}(\bar{F}/\tilde{F}')}$ が成立する.

Step 4, 証明の完成 ((ℓ, ℓ') トリック 及び descent)

F' を $\tilde{F}\tilde{F}'$ の F_0 上のガロワ閉包とする. F' は $\bar{F}^{\ker(\bar{r}_i)}$ 達の合成体と線形無関連である.

- (i) すると, $V_{n_i, \ell', t'_i} |_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ は $v_{q'}$ に於いて DS 条件を満たすから ($v_{q'}$ は F' で完全分解するので, 非合同性条件 (DS-2) を満たすことを改めて注意しておこう), テイラーのモジュラー性持ち上げ定理 ([Taylor4], 定理 5.4) に依って,

- $V_{n_i, \ell', t'_i}|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ は重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w|v_{q'}\}}$ 型で保型的となる.
- (ii) $V_{n_i, \ell, t'_i}|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ のレベルは ℓ と素なので, 法 ℓ で考えて $V_{n_i}[\ell]_{t'_i}|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')} \cong (\bar{r}_i \otimes \delta'_i)|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ も重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w|v_{q'}\}}$ 型で保型的となる. したがって $\bar{r}_i|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ 及び $(\bar{r}_i \otimes \delta_i)|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')} \cong V_{n_i}[\ell]_{t_i}|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ も重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w|v_{q'}\}}$ 型で保型的.
- (iii) 同様に $V_{n_i, \ell, t_i}|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ は $v_{q'}$ に於いて DS 条件を満たすから, 矢張りテイラーのモジュラー性持ち上げ定理に拠り, $V_{n_i, \ell, t_i}|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ が重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w|v_{q'}\}}$ 型で保型的となるが, より強く重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w|v_q v_{q'}\}}$ 型で保型的ともなる (注意 17 及び 定理 3.2 の証明の Step 3, (ii) と同様の議論から従う).
- (iv) v_q 上の F' の素点 w_q を適当に取り, F'' を F'/F に於ける w_q の分解体とする. さらに, w_q の下にある F'' の (唯一の) 素点を $\tilde{w}_q$ とすると, F'/F'' が可解拡大なので, アーサー-クローゼルの可解底変換定理 ([AC] 定理 4.2 及び [CHT] 補題 4.3.2) に依って, $V_{n_i, \ell, t_i}|_{\text{Gal}(\bar{F}/F'')}$ は重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{\tilde{w}_q\}}$ 型で保型的.
- (v) レベルが ℓ と素だから, 法 ℓ で考えて, $V_{n_i}[\ell]_{t_i}|_{\text{Gal}(\bar{F}/F'')} \cong (\bar{r}_i \otimes \delta_i)|_{\text{Gal}(\bar{F}/F'')}$ も重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{\tilde{w}_q\}}$ 型で保型的.
- (vi) v_q は F'' で完全分解するので, $r|_{\text{Gal}(\bar{F}_{\tilde{w}_q}/F''_{\tilde{w}_q})}(\text{Frob}_{w_q})$ の固有値は $r|_{\text{Gal}(\bar{F}_{v_q}/F_{v_q})}(\text{Frob}_{v_q})$ と等しくなる (DS-1). さらに $\sharp\kappa(\tilde{w}_q) = \sharp\kappa(v_q)$ であることから (b) と合わせて $\tilde{w}_q$ も非合同性条件 (DS-2) を満たす. つまり, $r|_{\text{Gal}(\bar{F}/F'')}$ は $\tilde{w}_q$ に於いて DS 条件を満たすので, モジュラー性持ち上げ定理から, $r|_{\text{Gal}(\bar{F}/F'')}$ は重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{\tilde{w}_q\}}$ で保型的.
- (vii) 再び アーサー-クローゼルの可解底変換定理に拠り, $r|_{\text{Gal}(\bar{F}/F')}$ は重さ 0, $\{\text{Sp}_{n_i}(\mathbb{1})\}_{\{w_q\}}$ 型で保型的.

□

図 8 及び 図 9 に Step 4, の大筋の流れを示した. モレ-バイイーの定理を適用する際に v_q や $v_{q'}$ を S_1 乃至 S'_1 (完全分解する素点の集合) に含め, 適当に分解体をとる等の操作を行うことで非合同性条件 (b) を崩さないよう巧く議論を進めている点が最大のポイントと言えよう.