

APPENDIX A. 付録. DICKSON の分類について
安田 正大 (京都大学)

A.1. 目標.

A.1.1. k を標数 p の有限体とする. 群 $\mathrm{PGL}_2(k)$ の部分群を分類することがこの節の目標である.

A.1.2. G を群とするとき, 何をもって G の部分群を分類したとみなすかについて, 様々な見解がありうると思う. 有限群 G に対して, 本稿では次の見解をとる: 群 H に対し, H と同型な G の部分群の全体を $S_G(H)$ とおく. 集合 $S_G(H)$ には共役により群 G が作用するが,

- (1) G の部分群と同型な群のリストを得,
- (2) リストの各メンバー H について, 商集合 $S_G(H)/G$ の濃度を決定,

した時点で, G の部分群を分類したとみなす. 上記 (1) (2) に加えて,

- (3) 集合 $S_G(H)$ 中の各 G 軌道について, その濃度を決定

しないと完全な分類とはみなさない, という見解もあり得るが, [Y] への応用上必要ないので, 本稿では (3) についてほとんど考察しない.

A.1.3. 群 $\mathrm{PSL}_2(k)$ の部分群については, 上記 (1), (2), (3) の意味でほぼ¹ 完全な分類が 100 年以上前から知られており, 1901 年に出版された Dickson の本 [Di, Chapter XII] に詳細が書かれている. [Di, p. 260 の脚注] によると, この分類は Morris [Mo2] および Wiman [Wi] に基づくもののようであるが, 通常この分類のことを Dickson の分類とよぶ. 本稿では群 $\mathrm{PSL}_2(k)$ ではなく群 $G = \mathrm{PGL}_2(k)$ の部分群の分類について取り扱うが, 群 $G = \mathrm{PGL}_2(k)$ の部分群の分類を, $\mathrm{PSL}_2(k)$ の分類に関する結果に帰着させることは難しくない.

A.1.4. 謝辞. 本稿の内容を考えるきっかけを筆者に与えてくださった小松亨氏, 本稿を氏の書かれた記事 [Y] に付録として付け加えてほしいという筆者の依頼を快諾して下さった山内卓也氏, 原稿中の修正すべき点をいろいろとご指摘下さった山下剛氏, 筆者が本稿の内容について話をした際にいろいろとコメントを下さった玉川安騎男氏にこの場を借りて感謝申し上げます.

A.2. 歴史.

A.2.1. この分類に関する歴史について簡単に述べる.

¹[Di, Chapter XII] では後述の条件 (A.5.1.1) を満たさない一部の群 $H \subset \mathrm{PSL}_2(k)$ に対して, 上記 (2) の濃度を明記していないようである.

A.2.2. k が素体, つまり $k = \mathbb{F}_p$ の場合には, 群 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p)$ の部分群については, Galois, Mathieu の研究を経て Gierster [Gi] が分類を与えた. k が素体でない場合には, 群 $\mathrm{PSL}_2(k)$ の部分群については, Burnside [Bu], Morris [Mo1] の研究を経て, Morris [Mo2] および Wiman [Wi] が独立に分類を与えた. その分類について Dickson が [Di, Chapter XII] でわかりやすく解説したので, 現在ではこの分類を Dickson の分類とよぶようになっている.

A.2.3. $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ の有限部分群については 19 世紀にすでに分類が知られており (Klein [Klein1], Fuchs [Fu1], [Fu2], Jordan [J], Gordan [Gor]), Klein による教科書 [Klein2] (日本語訳² は [Klein3]) にも, この分類に関する話題が取りあげられている. §A.6.1 で少し触れるように, 群 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ の有限部分群の分類を $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ のそれに帰着することができるが, 後者の歴史はさらに古く, Hessel [He], Bravais [Bra], Gadolin [Ga] が分類を与えている.

A.2.4. $\mathrm{PSL}_3(k)$ の極大真部分群の分類は Mitchell [Mi] によって得られた. 20 世紀の後半には, Aschbacher [As] が, 古典型有限群の部分群の分類を (§A.1.2 の意味での完全な分類ではないが) 与えた. 筆者は専門家ではなく, きちんとフォローしていないが, Aschbacher [As] 以降にも, Lie 型の有限群の部分群の分類に関する仕事はいくつかあるようである ([Kleid-L], [L-S], [Ki]).

A.3. 手法. $\mathrm{PGL}_2(k)$ の部分群を分類する手法には, 少なくとも二通りある. 本稿では そのうちの一つである Hurwitz の種数公式を用いる方法について解説する.

A.4. 記号. 本稿では以下の記号を用いる.

A.4.1. 標数 p の有限体 k を固定する.

A.4.2. 体 k' に対し, $G_{k'} = \mathrm{PGL}_2(k')$ とおく. 上三角行列のクラス, 上三角巾単行列のクラスからなる $G_{k'}$ の部分群をそれぞれ $B_{k'}$, $N_{k'}$ とおく.

A.4.3. $k' = k$ のとき, 群 G_k , B_k , N_k をそれぞれ G , B , N で表す.

A.4.4. 2 行 2 列の可逆行列 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(k)$ に対し, γ の $\mathrm{PGL}_2(k)$ における類を, 記号 $\gamma = \left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right]$ で表す.

A.5. 結果.

²Slodowy による解説が付いた復刻版の日本語訳である.

A.5.1. Dickson [Di] の分類リストは, 15 (数え方によっては 20 以上) の項目から成り立っておりかなり複雑である. 本稿では簡単のため, 次の 2 条件をみたす G の部分群 H に対してのみ分類を与える.

(A.5.1.1) H が B_k の部分群と共役でない.

(A.5.1.2) H の位数が p で割り切れる.

本稿で紹介する主結果は以下の通りである:

A.5.2. 定理. 次のいずれかひとつ, かつそのひとつだけが成立する.

- k の部分体 k' が存在して, H は $G_{k'}$ と共役である.
- $p \neq 2$, かつ k の部分体 k' が存在して, H は $\mathrm{PSL}_2(k')$ と共役である.
- $p = 3$, $[k : \mathbb{F}_3]$ は偶数, かつ H は交代群 A_5 と同型である. このような G の部分群は互いに共役である.
- $p = 2$, かつ $\#k - 1$ または $\#k + 1$ を割る整数 $h > 3$ が存在して, H は 2 面体群 D_{2h} と同型になる. h を固定すると, このような G の部分群は互いに共役である.

逆に, 上記条件のいずれかをみたす群は, 条件 (A.5.1.1), (A.5.1.2) をみたす G の部分群と同型である. この定理の証明は §A.9 で与えられる.

A.5.3. 注. 「部分群 H 」, 「部分体 k' 」, 「 $[k : \mathbb{F}_3]$ は偶数」, 「 $\#k - 1$ または $\#k + 1$ を割る」をそれぞれ「有限部分群 H 」, 「有限部分体 k' 」, 「 k は \mathbb{F}_3 の 2 次拡大を含み」, 「 k またはその適当な 2 次拡大が 1 の原始 h 乗根をふくむような」と読みかえれば, 上の定理は, 有限体とは限らない一般の標数 p の体 k に対しても成立する. §A.9 に与える証明はこの場合にもほとんどそのまま通用する.

A.5.4. 注. 上の定理の主張には §A.1.2 の (3) に関する結果は含まれていない. (3) について結果だけを述べると以下ようになる: H を 2 条件 (A.5.1.1), (A.5.1.2) をみたす G の部分群とすると,

- $p \neq 2$, かつ k の部分体 k' が存在して H が $\mathrm{PSL}_2(k')$ と共役となるとき, H と共役な G の部分群は全部で $[G : G_{k'}]$ 個存在する.
- それ以外のとき, H と共役な G の部分群は全部で $[G : H]$ 個存在する.

本稿ではこれについては証明を与えない.

A.5.5. 条件 (A.5.1.1), (A.5.1.2) をみたさない場合を本稿で取り扱わない理由を, 以下の二小節で簡単に説明する.

A.5.6. 条件 (A.5.1.1) をみたさない部分群, すなわち B_k の部分群と共役な部分群を分類することは, 初等的な考察だけで可能である. また Serre 予想の証明には, 条件 (A.5.1.1) をみたさない場合の分類は使われない. 以上が本稿で条件 (A.5.1.1) をみたす部分群だけを取り扱う理由である.

A.5.7. 条件 (A.5.1.1) をみたすが, 条件 (A.5.1.2) をみたさない群 H の分類は, 標数 0 の体 K に対する $\mathrm{PGL}_2(K)$ の有限部分群の分類と同様の方法で, あるいは $\mathrm{PGL}_2(K)$ の有限部分群の分類に帰着させることによって得ることができる. 次の段落に分類結果だけを書く.

条件 (A.5.1.1) をみたすが, 条件 (A.5.1.2) をみたさない G の部分群 H について, 次のいずれかひとつ, かつそのひとつだけが成立する.

- $\#k + 1$ の約数 $h > 1$ が存在して, H は位数 h の巡回群と同型になる. このような部分群 H は h を決めると共役をのぞいて唯一つである.
- $p > 2$ かつ, $\#k - 1$ または $\#k + 1$ の約数 $h > 1$ が存在して, H は 2 面体群 D_{2h} と同型になる. このような部分群 H は, h を決めると, $2h$ が $\#k - 1$ または $\#k + 1$ の約数であれば共役をのぞいてちょうど二つあり, そうでなければ共役をのぞいて唯一つである.
- $p > 3$ かつ, H は 4 次交代群 A_4 と同型になる. このような部分群 H は共役をのぞいて唯一つである.
- $p > 3$ かつ, H は 4 次対称群 S_4 と同型になる. このような部分群 H は共役をのぞいて唯一つである.
- $p > 5$, $(\#k)^2 \bmod 5 = 1$ かつ, H は 5 次交代群 A_5 と同型になる. このような部分群 H は共役をのぞいて唯一つである.

逆に, 上記条件のいずれかをみたす群は, 条件 (A.5.1.1), (A.5.1.2) をみたす G の部分群と同型である. 分類を $\mathrm{PGL}_2(K)$ の場合に帰着できる理由は, $W(k)$ を k の Witt ベクトルのなす環とすると, H が $\mathrm{PGL}_2(W(k))$ の部分群に一意的にもち上がるからである. このことは, $\mathrm{GL}_2(k) \rightarrow \mathrm{PGL}_2(k)$ による H の逆像の k 上の標準的な 2 次元表現に対して, 有限群の表現論の結果 (Serre [Se, 15.5. Proposition 4.3]) を用いることによってわかる.³ 標数 0 の体 K に対する $\mathrm{PGL}_2(K)$ の有限部分群の分類は, $\mathrm{PGL}_2(k)$ の場合と比べてよく知られており, この話題を扱った文献も数多くある. また, 次節で分類を得る手法について簡単に触れる.

A.6. 標数 0 の場合. K を標数 0 の体とする. 群 $\mathrm{PGL}_2(K)$ の有限部分群の分類を得る方法はいくつか知られている.

³§A.9.1 のように $\mathrm{PGL}_2(k)$ を射影直線 \mathbb{P}_k^1 に作用させて, Galois 被覆 $\mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^1/H$ を考え, 馴基本群の特殊化に関する結果 ([SGA1]) を用いることによっても, G を適当な標数 0 の体 K に対する $\mathrm{PGL}_2(K)$ の部分群にもち上げることができる.

A.6.1. $K = \mathbb{C}$ の場合には, $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ が作用するリーマン球面上に標準的な計量を入れることにより, $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ の極大コンパクト部分群を特殊直交群 $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ と同一視し, 3次元 Euclid 空間についての初等幾何的な考察, 特に正多面体の分類を用いて $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ の有限部分群の分類を得るという方法がある (§A.2.3 にあげた歴史的文献の他に, 例えば [We, Appendix A], [C, §3.8], [Sp, 4.4] で扱われている).

A.6.2. 一般の K に通用する方法として, 群 $\mathrm{PGL}_2(K)$ の有限部分群の分類を群 $\mathrm{SL}_2(K)$ の有限部分群 H' の分類に帰着させ, K 上の 2 次元代数多様体 \mathbb{A}_K^2/H' の特異点解消⁴ を考察することによって, 可能な H' のリストを得るという方法もある. 具体的には次のように議論すればよい⁵: [Bri, Satz 1.7] の議論より \mathbb{A}_K^2/H' の特異点は有理的である. また, [Is, 定理 6.5.1] の (xi) \Rightarrow (x) の議論より \mathbb{A}_K^2/H' の特異点は Gorenstein である. 同じ [Is, 定理 6.5.1] の (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (vi) \Rightarrow (vii) \Rightarrow (viii) の議論より⁶ 最小特異点解消の例外集合の重みつきグラフ (の候補) が ADE 型の Dynkin 図形になることがわかる. 最後に Grothendieck-Murre [GM, §9] の方法を用い, 少し議論を補う⁷ と, 各グラフから群 H' を計算できる.⁸ 群 H' と代数多様体 \mathbb{A}_K^2/H' の特異点解消との関係は, 群 H' の分類に用いられるだけにとどまらず, 大きな数学的広がりをもつ. 群 H' の自明でない既約表現と \mathbb{A}_K^2/H' の最小特異点解消に現れる例外因子の既約成分との間の McKay 対応については, 幾何学的解釈が与えられ ([GS-V], [I-N]), いろいろな一般化が研究されている.

A.6.3. §A.7 以降で Hurwitz の種数公式を用いて条件 (A.5.1.1), (A.5.1.2) をみたま $\mathrm{PGL}_2(k)$ の有限部分群 H を分類する方法を解説するが, 同様の手法は, 条件 (A.5.1.1) または条件 (A.5.1.2) をみたまない部分群 H や $\mathrm{PGL}_2(K)$ の有限部分群の分類にも適用可能であり, Klein [Klein2] は, $K = \mathbb{C}$ の場合にこの手法を用いていると解釈できる. この方法を用いると部分群の位数の決定までは容易にできるが, さらに部分群の群

⁴この形の特異点を単純特異点, Klein 特異点, du Val 特異点, 有理 2 重点などとよぶ ([Klein2], [DuV], [Bri], [Dur], [Sl], [Ma] を参照).

⁵ここに書く方法では, 途中で $\mathbb{P}_K^1 - \{0, 1, \infty\}$ のエタール基本群の構造を知る必要があり, その際に $K = \mathbb{C}$ の場合への帰着を行っている.

⁶(iii) \Rightarrow (iv) を示す際, [Is] の構成上一見使っているかのように見える Grauert-Riemenschneider の消滅定理は, \mathbb{A}_K^2/H' が Cohen-Macaulay であることがもともとわかっているため, 実際には使う必要がない.

⁷具体的には [GM, §7.2.3, case c] において, $r = 1, g = 0$ であり, さらに D_0 と D_1 とが 1 点で交わり, S_0 の自己交点数 d が負であると仮定したとき, D_1 での惰性群の定める準同型 $\mu^t \rightarrow \pi_1^D(\mathcal{S}, \xi^*) \cong \mu^t$ が $-d$ 倍写像に一致することを示す必要がある. このことは $d < 0$ より $\mathrm{Pic}(\mathcal{S}) \cong \mathrm{Pic}(S_0) \cong \mathbb{Z}$ であり, したがって $\mathrm{Pic}(\mathcal{S})$ における D_0 の類と dD_1 の類とが一致することに注意すればわかる.

⁸ここに書いた H' の計算法は, [Mu], [Hi], [La, Chapter IV, §15] の議論を形式幾何的な文脈に翻訳したものである.

構造を決定しようとする、本稿 §A.9.13 と類似の組み合わせ論的な考察、あるいはそれに代わる何らかの議論が必要となる。

A.7. Hurwitz の種数公式. この節では、Hurwitz の種数公式について復習する。

A.7.1. K を代数閉体、 X および Y を K 上の連結、滑らかかつ射影的な代数曲線とする。 $\phi: X \rightarrow Y$ を、 K 上の代数曲線の間で定数でない分離的な射とする。 $e(X)$, $e(Y)$ をそれぞれ X , Y の Euler-Poincaré 標数とする。すなわち X , Y の種数をそれぞれ g_X , g_Y とおくと $e(X) = 2 - 2g_X$, $e(Y) = 2 - 2g_Y$ である。このとき等式

$$(A.7.1.1) \quad e(X) = \deg(\phi)e(Y) - \text{length}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/Y}^1)$$

が成り立つ。ここで $\deg(\phi)$ は ϕ の次数、つまり X の関数体の Y の関数体上の拡大次数、であり、右辺第二項の和は X の全ての閉点 x を動く。 $\Omega_{X/Y}^1$ は、相対微分加群の層、言い換えれば \mathcal{O}_X 加群の準同型 $\phi^*\Omega_{Y/k}^1 \rightarrow \Omega_{X/k}^1$ の余核である。 ϕ の条件からこれは長さ有限の \mathcal{O}_X 加群となる。等式 (A.7.1.1) を Hurwitz の種数公式、または Riemann-Hurwitz の公式とよぶ。⁹ 等式 (A.7.1.1) の証明については Hartshorne [Ha, Chapter IV, Corollary 2.4] を参照されたい。

A.7.2. $\Omega_{X/Y}^1$ の台に属する X の閉点を ϕ の分岐点 (ramification point) とよぶ。 $\phi_*\Omega_{X/Y}^1$ の台に属する Y の閉点を ϕ の臨界点 (branch point) とよぶ。等式 (A.7.1.1) の右辺に現れる量 $\text{length}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/Y}^1)$ は

$$(A.7.2.1) \quad \text{length}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/Y}^1) = \sum_x \text{length}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\Omega_{X/Y,x}^1)$$

と分解する。ここで x は ϕ の分岐点を動き、 $\Omega_{X/Y,x}^1$ は \mathcal{O}_X 加群 $\Omega_{X/Y}^1$ の点 x における茎である。 $x \in X$ が ϕ の分岐点のとき、 $y = \phi(x)$ は ϕ の臨界点となる。 X , Y の関数体の x , y における完備化をそれぞれ $K(X)_x$, $K(Y)_y$ とおくと、 $K(X)_x$ は $K(Y)_y$ の有限次分離拡大となる。拡大次数 $[K(X)_x : K(Y)_y]$ が K の標数で割れるとき、 x を ϕ の暴分岐点とよび、そうでないとき x を ϕ 馴分岐点とよぶ。とくに K の標数が 0 であれば ϕ のすべての分岐点は馴分岐点である。 x を ϕ の馴分岐点とすると、式 (A.7.2.1) 右辺における x の寄与について、等式

$$\text{length}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/Y}^1) = [K(X)_x : K(Y)_y] - 1$$

が成り立つ。 x を ϕ の暴分岐点とすると、式 (A.7.2.1) 右辺における x の寄与について、不等式

$$\text{length}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/Y}^1) \geq [K(X)_x : K(Y)_y]$$

⁹代数幾何学の研究者は前者の名称を、Riemann 面の研究者は後者の名称を用いる傾向があるように思う。 [Ha] では前者の、 [Fa-Kr] では後者の名称を用いている。

38

が成りたつ。

A.8. 有限 Galois 被覆の場合. 特に $\phi : X \rightarrow Y$ が有限 Galois 被覆となる場合を考える. ϕ の Galois 群を H とおく. X の閉点 x に対し, H の部分群 H_x を

$$H_x = \{h \in H \mid h(x) = x\}$$

と定める. $H_x \neq \{1\}$ であることと x が分岐点であることは同値である. ϕ の各臨界点 $y \in Y$ に対し, y の上にある X の閉点 x_y を選び, H の部分群 H_{x_y} のことを H_y と書く. x_y は X の分岐点であり, H_y は H における共役を除き, 点 x_y の選び方によらない. 以上の記号のもと, この ϕ に対する公式 (A.7.1.1) は次のように書ける:

$$(A.8.0.2) \quad e(Y) - \frac{e(X)}{\#H} = \sum_y \frac{\text{length}_{\mathcal{O}_{X,x_y}}(\Omega_{X/Y,x_y}^1)}{\#H_y}.$$

ここで y は ϕ の臨界点を動く.

A.8.1. 式 (A.8.0.2) に現れる量 $\text{length}_{\mathcal{O}_{X,x_y}}(\Omega_{X/Y,x_y}^1)$ は以下のようにして計算できる. X の関数体 $K(X)$ の x_y での完備化 $K(X)_{x_y}$ は, K を剰余体としてもつ完備離散付値体であり, 群 H_y が $K(X)_{x_y}$ に作用する. $K(X)_{x_y}$ の正規付値を $v : K(X)_{x_y}^\times \rightarrow \mathbb{Z}$ で表し, $K(X)_{x_y}$ の素元 π をひとつ選ぶ. このとき

$$(A.8.1.1) \quad \text{length}_{\mathcal{O}_{X,x_y}}(\Omega_{X/Y,x_y}^1) = \sum_h v(h(\pi) - \pi)$$

が成りたつ. ここで h は H_y の 1 でない元を動く.

A.8.2. H_y の位数が K の標数で割り切れるとき, y を暴臨界点, といい, そうでないとき y を馴臨界点という. とくに K の標数が 0 であれば ϕ のすべての臨界点は馴臨界点となる. y が馴臨界点のとき, H_y は巡回群となる. さらに式 (A.8.1.1) 右辺の和の中身は常に 1 であり, したがって式 (A.8.1.1) の値は $\#H_y - 1$ となる. y が暴臨界点のとき, 式 (A.8.1.1) の値は $\#H_y$ 以上である.

A.9. 定理 A.5.2 の証明. H を $G = \text{PGL}_2(k)$ の部分群とする.

A.9.1. \bar{k} を k の代数閉包とする. 群 G は \bar{k} 上の射影直線 $\mathbb{P}_{\bar{k}}^1$ に忠実に作用する. 商 $\mathbb{P}_{\bar{k}}^1/H$ は正規スキームであるから, \bar{k} 上の連結, 滑らかかつ固有な代数曲線となる. さらに, 標準射 $\mathbb{P}_{\bar{k}}^1 \rightarrow \mathbb{P}_{\bar{k}}^1/H$ は Galois 群を H とする, 有限次 Galois 被覆となる.

A.9.2. §A.9.1 の状況に公式 (A.8.0.2) を適用する. 簡単な不等式評価により \mathbb{P}_k^1/H の種数が 0 であることがわかり, 公式 (A.8.0.2) は

$$2 - \frac{2}{\#H} = \sum_y \frac{\text{length}_{\mathcal{O}_{X,x_y}}(\Omega_{X/Y,x_y}^1)}{\#H_y}.$$

と書ける. 公式の左辺は 2 より小さく, §A.8.2 より暴臨界点 y に関する右辺の寄与は 1 以上, 馴分岐点に関する右辺の寄与は $1/2$ 以上である. したがって暴臨界点は存在したとしても高々ひとつであり, 暴臨界点が存在する場合は, 馴臨界点は存在したとしても高々ひとつである.

A.9.3. 更に群 H が条件 (A.5.1.1), (A.5.1.2) をみたすと仮定する. N の位数は p のべきで, $[G : N]$ が p と素であることは簡単な計算でわかる. したがって N は G の p Sylow 群である. $\gamma \in G$ の位数が p べきであれば, γ は N の元と共役になる. とくに $\gamma \neq 1$ であれば γ の位数は p である. G の部分群 G' で p 群となるものは N の部分群と共役である. G' が H の p Sylow 群の場合にこの主張を適用する. 必要ならば H を G の中での共役で取り替えることによって,

(A.9.3.1) $H \cap N$ が H の p Sylow 群である

と仮定できる. さらに N の 1 でない 2 元は B の中で互いに共役であるから, H を B の元での共役で取り替えて, 条件 (A.9.3.1) を保ったまま

(A.9.3.2) H が

$$\gamma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を元にもつ

と仮定できる.

$\gamma_0 \in H$ は無限遠点を固定点にもつ. 仮定 (A.9.3.2) から \mathbb{P}_k^1 の無限遠点は $\mathbb{P}_k^1 \rightarrow \mathbb{P}_k^1/H$ の唯一の暴臨界点 y の上にある. この y に対する $\text{length}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1, \infty}}(\Omega_{\mathbb{P}_k^1/(\mathbb{P}_k^1/H), \infty}^1)$ を §A.8.1 の方法で計算する. x_y として無限遠点を選ぶと, $H_y = B \cap H$ である. \mathbb{P}_k^1 の通常のパラメータを t とする. \mathbb{P}_k^1 の無限遠点での完備化は $\bar{k}((1/t))$ となり, その素元として $\pi = 1/t$ は $k((1/t))$ が選べる.

$$g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ に対し } g(\pi) = \frac{\pi}{a + b\pi}$$

であるから, $v(g(\pi) - \pi)$ は $g \in B \setminus N$ のとき 1, $g \in N \setminus \{1\}$ のとき 2 である. §A.8.1 の公式 (A.8.1.1) より, $B_H = H \cap B$, $N_H = H \cap N$ とおくと, 求める長さは $\#B_H - \#N_H + 2(\#N_H - 1)$ と書ける. したがって

40

この場合の Hurwitz の種数公式は次のように書ける:

$$(A.9.3.1) \quad 2 \left(1 - \frac{1}{\#H} \right) = \left(1 + \frac{\#N_H - 2}{\#B_H} \right) + \sum_{tame} \left(1 - \frac{1}{\#H_y} \right).$$

A.9.4. §A.9.2 で注意したように馴臨界点は存在するとしても高々ひとつである. この小節では馴臨界点が存在することを示す. 馴臨界点が存在しないと仮定する. 式 (A.9.3.1) より

$$2 \left(1 - \frac{1}{\#H} \right) = \left(1 + \frac{\#N_H - 2}{\#B_H} \right)$$

が成りたつ. 整理して

$$1 = \frac{2}{\#H} - \frac{2}{\#B_H} + \frac{1}{[B_H : N_H]}.$$

を得る. この等式から $H = B_H = N_H$ が分かる. したがって H が B の部分群となり条件 (A.5.1.1) に反する.

A.9.5. §A.9.4 より, 馴臨界点がちょうどひとつだけ存在する. その点を y とおく. 群 H_y の位数を h とおき, また, $g = \#H$, $n = \#N_H$, $m = [B_H : N_H]$ とおく. これらの記号の下, 式 (A.9.3.1) は

$$2 \left(1 - \frac{1}{g'} \right) = \left(1 + \frac{n-2}{mn} \right) + \left(1 - \frac{1}{h} \right)$$

と書ける. この式を整理すると

$$(A.9.5.1) \quad \frac{2}{mn} - \frac{2}{g} = \frac{1}{m} - \frac{1}{h}$$

となる.

A.9.6. この小節では, $n-1$ が m の倍数であることを示す. N は B の正規部分群であり, N はアーベル群であるから, 群 B/N はアーベル群 N に作用する. この作用は具体的に記述できる: 標準的な同型 $N \cong k$ および $B/N \cong k^\times$ のもと, B/N の N への作用は k^\times の乗算による k への作用と同一視される. 特に $N \setminus \{1\}$ は B/N 捻子 (torsor) となる. N_H は N の部分群であり, B_H/N_H は標準的に B/N の部分群とみなせるから, B_H/N_H は集合 $N_H \setminus \{1\}$ に自由に作用する. したがって $n-1$ は m の倍数である.

上の段落の議論, および仮定 (A.9.3.2) から, あとで必要となる次の二つの主張が従う.

- $m = n-1$ のとき, 標準的な同型 $N \cong k$ は N_H と k のとある部分体 k' との同型を導く. さらに, 必要ならば H を N の元による共役で取り替えると, $B_H = B_{k'}$ が成りたつ.

- $2m = n - 1$ のとき, $p \neq 2$ であり, 標準的な同型 $N \cong k$ は N' と k のとある部分体 k' との同型を導く. さらに, 必要ならば H を N の元による共役で取り替えると, $B_H = \mathrm{PSL}_2(k') \cap B$ が成りたつ.

A.9.7. 定理 A.5.2 の証明に戻る. 仮定より $H \neq B_H$ であるから $g \geq 2mn$ である. 式 (A.9.5.1) の左辺は 0 より大きく $2/mn$ より小さい値である. これより $m < h$ であり, 式 (A.9.5.1) の右辺は $1/m - 1/(m+1) = 1/m(m+1)$ 以上の値となる. したがって不等式

$$\frac{2}{mn} > \frac{1}{m(m+1)}$$

を得る. m は $n - 1$ の約数だから, この不等式より $m = n - 1$ または $2m = n - 1$ となる. §A.9.6 の議論により k の部分体 k' が存在して, $m = n - 1$ のときには $B_H = B_{k'}$ が成りたち, $2m = n - 1$ のときには $p \neq 2$ かつ $B_H = \mathrm{PSL}_2(k') \cap B$ が成りたつと仮定してよい.

A.9.8. この小節では $2m = n - 1$ の場合を扱う. 式 (A.9.5.1) より $m = (n - 1)/2$, $h = (n + 1)/2$, $g = n(n + 1)(n - 1)/2$ となる. 群 B_H の集合 $\mathbb{P}^1(\bar{k})$ への作用による軌道について考察する. ∞ は固定点であり, この一点だけでひとつの軌道をなす. $\mathbb{A}^1(k')$ が 1 つの軌道をなし, これは濃度 n である. 残りの $\mathbb{P}^1(\bar{k}) \setminus \mathbb{P}^1(k')$ には B_H は自由に作用する.

暴分岐点の集合は ∞ を含む $\mathbb{P}^1(\bar{k})$ 中の H 軌道に一致する. この軌道は集合 $\mathbb{P}^1(k)$ に含まれ, 濃度は $[H : B_H] = n + 1$ である. この軌道はいくつかの B_H 軌道に分かれるが, 点の個数を数えると, $n > 3$ ならば暴分岐点の集合はちょうど $\{\infty\} \cup \mathbb{A}^1(k') = \mathbb{P}^1(k')$ に一致しなければならない. 除外した $n = 3$ の場合は, ある $a \in k$ が存在して, 暴分岐点の集合はちょうど $\{\infty\} \cup \{a + b \mid b \in k'\}$ に一致する. したがって $n = 3$ の場合にも, H を N の元での共役に取り替えることによって, 暴分岐点の集合がちょうど $\{\infty\} \cup \mathbb{A}^1(k') = \mathbb{P}^1(k')$ に一致すると仮定できる. H の $\mathbb{P}^1(\bar{\mathbb{F}}_p)$ への作用は暴分岐点の集合を保つから, H は $G_{k'}$ の部分群であることがわかり, さらに位数の計算から指数 $[G_{k'} : H]$ が 2 となる. これより $n > 3$ のときには $H = \mathrm{PSL}_2(k')$ がわかり, 除外した $n = 3$ の場合には, H は G の中で $\mathrm{PSL}_2(k')$ と共役であることがわかる.

A.9.9. 本稿の残りの部分で $2m = n - 1$ の場合を考察する. $h \leq m + 2$ のときと $h > m + 2$ のときとに場合分けをする.

A.9.10. まず $h \leq m + 2$ の場合を考察する. このとき $m < h \leq m + 2$ であるが, $m + 1 = n$ が p 巾で, h は p と素だから $h = m + 1$ にはならない. したがって $m = n - 1$, $h = n + 1$ であり, 式 (A.9.5.1) から $g = n(n + 1)(n - 1)$ がわかる. あとは §A.9.8 と同様に $\mathbb{P}^1(\bar{k})$ への B_H の作用を考えることにより, $n > 2$ のときには H が $G_{k'}$ に等しくなり, $n = 2$ の場合には, H は G の中で $G_{k'}$ と共役であることがわかる.

A.9.11. 最後に $h > m + 2$ の場合を考察する. 式 (A.9.5.1) より不等式

$$\frac{2}{m(m+1)} > \frac{1}{m} - \frac{1}{m+3}$$

を得る. したがって $m = 1$ または $m = 2$ となる.

A.9.12. $m = 1$ のときは $n = 2$ であり, 従って $p = 2$ である. y を唯一つの馴臨界点とする. このとき H_y は奇数位数 $h > 3$ の巡回群であり, 式 (A.9.5.1) から $g = 2h$ となる. H_y は H の指数 2 の部分群となるので, とくに H の正規部分群である. また, $\mathrm{PGL}_2(\bar{k})$ のすべての元は $\mathbb{P}^1(\bar{k})$ に固定点をもつことから, H の任意の元は, γ_0 または H_y の元と共役である. したがって, $H \setminus H_y$ の元はすべて位数が 2 となり, このことから H は 2 面体群 D_{2h} と同型である. H_y の $\mathbb{P}^1(\bar{k})$ への作用は固定点を 2 つもち, γ_0 の作用はこの 2 つの固定点を入れ替える. $t^{\#k} = t + 1$ の根 $\alpha \in \bar{k}$ をひとつとる. H を N の適当な元による共役に置き換えて, この 2 つの固定点が $\{0, 1\}$ もしくは $\{\alpha, \alpha + 1\}$ であるとしてよい. 固定点が $\{0, 1\}$ の場合は, H_y は群

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 1-a & 1 \end{bmatrix} \mid a \in k^\times \right\}$$

の位数 h の (唯一の) 部分群となるから, h は $\#k - 1$ の約数であり, 群 H は共役を除いて唯ひとつに定まる. 同様に固定点が $\{\alpha, \alpha + 1\}$ の場合は, H_y は群

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & \alpha(\alpha+1)c \\ c & a \end{bmatrix} \mid a, c \in k, (a, c) \neq (0, 0) \right\}$$

の位数 h の (唯一の) 部分群となるから, h は $\#k + 1$ の約数であり, 群 H は共役を除いて唯ひとつに定まる.

A.9.13. $m = 2$ のときは $n = 3$ であり, したがって $p = 3$ である. $h > 4$ であるから, 式 (A.9.5.1) より $h = 5$, $g = 60$ がわかる. H に位数 5 の元が存在することから, $[k : \mathbb{F}_3]$ は偶数である.

暴分岐点は全部で $60/6 = 10$ 個ある. $\gamma \in H$ を位数 2 の元とすると, γ は H の中で

$$\gamma_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と共役であり, γ の $\mathbb{P}^1(\bar{k})$ への作用はちょうど 2 つの暴分岐点を固定点にもつ. したがって H の位数 2 の元は全部で $10 \times 3/2 = 15$ 個存在する. 特に γ の中心化群 $C_H(\gamma)$ は位数 4 であり, したがって H の 2 Sylow 群となる. H に位数 4 の元は存在しないので, $C_H(\gamma)$ は Klein の四元群と同型である. $\gamma' \in H$ を別の位数 2 の元とすると, $C_H(\gamma) = C_H(\gamma')$ であるかまたは $C_H(\gamma) \cap C_H(\gamma') = \{1\}$ である. 実際そのどちらでもないとし, $\gamma'' \in C_H(\gamma) \cap C_H(\gamma')$ を 1 でない元とすると,

$C_H(\gamma) \cup C_H(\gamma') \subset C_H(\gamma'')$ となり, $C_H(\gamma'')$ の位数が 4 であることに矛盾する.

S を H の 2 Sylow 群のなす集合とすると, S の濃度は $15/3 = 5$ である. 群 H の S への共役による作用は忠実である. 実際 $\gamma \in H$ を 1 でない元とすると, γ は B_H の元と共役であるか, または γ の位数が 5 であるかのいずれかである. γ が B_H の元と共役のとき, 位数 2 の元 $\gamma' \in B_H$ であって, $\gamma\gamma'\gamma^{-1}$ が γ' と可換でないものが存在する. $C_H(\gamma') \neq C(\gamma\gamma'\gamma^{-1})$ であるから, γ の S への作用は非自明である. γ が位数 5 であり, $\gamma C_H(\gamma_1)\gamma^{-1} = C_H(\gamma_1)$ であるとする, $C_H(\gamma_1)$ の位数が 5 より小さいため, $C_H(\gamma_1)$ の各元は γ と可換となる. 特に $\gamma \in C_H(\gamma_1)$ となるがこれは矛盾である. したがって H は 5 次交代群 A_5 と同型である.

群 H は γ_1 を元にもち, さらに γ_1 と可換で B に属さない位数 2 の元を 2 つもつから, H は $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $a \in k^\times$ の形の元 γ_2 をもつ. 積 $\gamma_2\gamma_0$ が位数 2, 3, 5 のいずれかであることから $a = -1$ または $a^2 + 1 = 0$ がわかり, $\gamma_2\gamma_1\gamma_0$ が位数 2, 3, 5 のいずれかであることから $a = 1$ または $a^2 + 1 = 0$ がわかる. したがって $a^2 + 1 = 0$ である. 群 H は 3 元 $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ で生成されるから, 共役を除いて一意的に定まる.

REFERENCES

- [As] Aschbacher, M.: *On the maximal subgroups of the finite classical groups.* Invent. Math. **76**, 469–514 (1984).
- [Bra] Bravais, A.: *Note et Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique.* J. de Math. Pure et Appl. **14**, 137–140, 141–180 (1849).
- [Bri] Brieskorn, E.: *Rationale Singularitäten komplexer Flächen.* Invent. Math. **4**, 336–358 (1968).
- [Bu] Burnside, W.: *On a class of groups defined by Congruences.* Lond. M. S. Proc. XXV, 113–139 (1894).
- [C] Coxeter, H. S. M.: *Regular polytopes. Third edition.* Dover Publications Inc., New York, NY (1973).
- [Di] Dickson, L. E.: *Linear groups with an exposition of the Galois field theory.* B. G. Teubner, Leipzig (1901).
- [DuV] Du Val, P.: *On isolated singularities of surfaces which do not affect the conditions of adjunction, I,II,III.* Proc. Camb. Philos. Soc. **30**, 453–459, 460–465, 483–491 (1934).
- [Dur] Durfee, A. H.: *Fifteen characterizations of rational double points and simple critical points.* Enseign. Math., II. Sér. **25**, 131–163 (1979).
- [Fa-Kr] Farkas, H. M., Kra, I.: *Riemann surfaces.* 2nd ed. Graduate Texts in Mathematics. 71. New York etc.: Springer-Verlag. xvi, 363 p. (1992).
- [Ful] Fuchs, L.: *Über die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie.* Gött. Nachr. 1875. 568–581, 612–613. Borchardt J. LXXXI, 97–142 (1875).

- [Fu2] Fuchs, L.: *Über die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche abelsche Integrale besitzen. Zweite Abhandlung.* Borchardt J. LXXXV, 1–26 (1878).
- [Ga] Gadolin, A. V.: *Deduction of all crystallographic systems and their subdivisions by means of a single general principle (Russian).* Zap. Peterburg. Mineralog. **4**, 112–200 (1867). French translation: *Mémoire sur la déduction d'un seule principe de tous les systèmes cristallographiques avec leur subdivisions.* Acta Soc. Sci. Fenn. Helsigfors **9**, 1–71 (1871).
- [Gi] Gierster, J.: *Die Untergruppen der Galois'schen Gruppe der Modulargleichungen für den Fall eines primzahligen Transformationsgrades.* Diss. Leipzig. B. G. Teubner Klein Ann. XVIII, 319–365 (1881).
- [GS-V] Gonzalez-Sprinberg, G., Verdier J.-L.: *Construction géométrique de la correspondance de McKay.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **16**, 409–449 (1983).
- [Gor] Jordan, P.: *Über endliche Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen.* Clebsch Ann. XII, 23–46 (1877).
- [GM] Grothendieck, A., Murre, J. P.: *The tame fundamental groups of a formal neighbourhood of a divisor with normal crossings on a scheme.* Lect. Notes Math. **208**. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1971).
- [Ha] Hartshorne, R.: *Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics. **52**. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin (1977).
- [He] Hessel, J. F. Ch.: *Krystall.* Gehler's Physikalische Wörterbuch **5**, II, 1023–1360. Schwickert, Leipzig (1830). Also published under the title *Krystallometrie oder Krystallonomie und Krystallographie.* Schwickert, Leipzig (1831). In Oswald's Klassiker der exacten Wissensch. **88**, **89**, 41–124. Engelmann, Leipzig (1897).
- [Hi] Hirzebruch, F.: *The topology of normal singularities of an algebraic surface.* Semin. Bourbaki **15** (1962/63), Exp. 250, (1964).
- [Is] 石井, S.: 特異点入門. シュプリンガー現代数学シリーズ. シュプリンガー・フェアラーク東京, Tokyo (1997).
- [I-N] Ito, Y., Nakamura, I.: *McKay correspondence and Hilbert schemes.* Proc. Japan Acad. Ser. A **72**, 135–138 (1996).
- [J] Jordan, C.: *Mémoire sur les equations différentielle linéaire á intégrale algébrique.* Borchardt J. LXXXIV, 89–215 (1878).
- [Ki] King, O. H.: *The subgroup structure of finite classical groups in terms of geometric configurations.* In Surveys in combinatorics 2005, London Math. Soc. Lect. Note Ser. **327**, 29–56. Cambridge University Press, Cambridge, UK (2005).
- [Kleid-L] Kleidman, P., Liebeck, M.: *The subgroup structure of the finite classical groups.* London Math. Soc. Lect. Note Ser. **129**. Cambridge University Press, Cambridge, UK (1990).
- [Klein1] Klein, F.: *Über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst.* Clebsch Ann. IX. 183–208 (1875).
- [Klein2] Klein, F.: *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade.* Teubner, Leipzig (1884).
- [Klein3] クライン, F.: 正 20 面体と 5 次方程式. 改定新版. 関口次郎, 前田博信 訳. シュプリンガー・フェアラーク東京, Tokyo (2005).

- [La] Lamotke, K.: *Regular solids and isolated singularities*. Advanced Lectures in Mathematics. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, Wiesbaden (1986).
- [L-S] Liebeck, M. W., Seitz, G. M.: *A survey of maximal subgroups of exceptional groups of Lie type*. In Groups, combinatorics & geometry (Durham, 2001), 139–146. World Sci. Publ., River Edge, NJ (2003).
- [Ma] 松澤, J.: *特異点とルート系. すうがくの風景 6*. 朝倉書店, Tokyo (2002).
- [Mi] Mitchell, H. H.: *Determination of the ordinary and modular ternary linear groups*. American M. S. Trans. **12**, 207–242 (1911).
- [Mo1] Moore, E. H.: *A doubly infinite system of simple groups*. Chicago Congress, Mathem. papers. 208–242 (1896).
- [Mo2] Moore, E. H.: *The subgroups of the generalized finite modular group*. Chicago, the decennial publications. 52 S (1903).
- [Mu] Mumford, D.: *The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity*. Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **9**, 5–22 (1961).
- [SGA1] *Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960/61 (SGA1), dirigé par Alexander Grothendieck. Augmenté de deux exposés de M. Raynaud. Revêtements étales et groupe fondamental*. Lect. Notes Math. **224**. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1971).
- [Se] Serre, J.-P.: *Représentations linéaires des groupes finis*. 5ième éd., corr. et augm. de nouveaux exercices. Collection Méthodes. Hermann, Paris (1998).
- [Sl] Slodowy, P. J.: *Simple singularities and simple algebraic groups*. Lect. Notes Math. **815** Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1980).
- [Sp] Springer, T. A.: *Invariant theory*. Lect. Notes Math. **585**. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1977).
- [We] Weyl, H.: *Symmetry*. Princeton University Press, Princeton NJ (1952).
- [Wi] Wiman, A.: *Bestimmung aller Untergruppen einer doppelt unendlichen Reihe von einfachen Gruppen*, Stockh. Akad. Bihang **25_1**, no. 2, 47 S (1899)
- [Y] 山内, T.: *Serre 予想の証明: 一般の場合*. 本報告集 (2009).