Skinner-Wilesの底変換(base change)議論

加塩朋和 *

C. M. Skinner, A. J. Wiles, Base change and a problem of Serre (Duke Math. J., vol. 107, No 1, 2001, pp15-25) の解説を目的としている. また Kisin の保型性持ち上げ定理 (Modularity Lifting Theorem) で使われている補題等 ([K1, Lemmas (3.1.5), (3.5.2), (3.5.2), Corollary (3.1.6)]) が最後に追加してある. Kisin の仕事の全体像については本報告集の山下氏の記事 [Kisin の修正 Taylor-Wiles 系] を参照. なお [$R = T$ の最近の発展についての勉強会] での安田氏の講義, 及びその後の安田氏, 山下氏のアドバイスを参考にしました.

1 Skinner-Wiles のレベルの引き下げ定理.

ここでは Skinner-Wiles の結果 “Hilbert 保型形式に付随する剰余 Galois 表現のレベルの引き下げ (level-lowering)” を解説する. 元論文の概要にあるように, 底変換 (基礎体の可解拡大) を許すことで得られる結果は弱くなるが, レベルの引き下げのための議論が遥かに容易になるのは注目すべきアイデアである. また p 進表現の保型性への応用にはこの弱めた結果で十分である.

1.1 導入.

保型表現と Galois 表現の対応を考えるとき, それぞれのどんな “性質” が対応しているかというのも大きな問題である. 例えば類体論は Hecke 指標 (GL_1 の保型形式) の “法” と Galois 表現の “分岐” の対応を与えている. また Serre 予想 (Serre の保型性予想, [Se]) は, 既約奇表現 $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}_p})$ は全て保型的であると予言し, 更に対応する楕円保型形式のレベルと重さも明示的に表している. ここでは Hilbert 保型形式の “レベル” と保型的な剰余 Galois 表現の “分岐” の対応を明らかにすることを目的とする. 次の Ribet の結果 (Serre 予想の一部, [Ri]) を導入として紹介しよう.

定理 1. *レベル $\Gamma_0(N\ell)$ ($\ell \nmid Np$) の重さ 2 の (楕円的) 新形式に付随する標数 p の剰余 Galois 表現 ρ が有理素数 ℓ で不分岐であれば, レベル $\Gamma_0(N)$, 重さ 2 の別の新形式にも付随している.*

*Department of Mathematics, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan; kashio@math.kyoto-u.ac.jp

新形式に付随する Galois 表現の定義は §1.2 で行う．定理 1 がもたらすものは (ρ が ℓ で不分岐という条件下で) $N\ell$ から N への "レベルの引き下げ" である．このレベルの引き下げ定理を総実体 F 上の保型的剰余 Galois 表現へ拡張しようとするのは自然であろう．ただし我々は以下の様な命題を考える．

命題． *Hilbert* 保型形式 f に付随する剰余 *Galois* 表現 ρ は基礎体 F の総実な可解拡大体上へ制限すれば "適切なレベル" での保型性を持つ．

具体的な主張は §1.3 で記述するが, 実際に "適切なレベル" を定めるのがこのレベルの引き下げ定理に関して重要な点であることを注意しておく．また Galois 表現の制限を許す分, より弱い命題であることが元論文で注意されている．このことに関して以下のようにコメントがある; p 進 Galois 表現の保型性への応用にはこの弱い命題で充分である．なぜなら底変換の理論により p 進 Galois 表現 ρ の可解拡大体への制限が保型的であれば表現 ρ 自体も保型的であることが示せるし, また [SW1], [SW2], [F] などに見られるように, Taylor-Wiles 系, 肥田理論, $R=T$ 定理を用いた保型性の証明技術が総実体上の p 進 Galois 表現の場合にも拡張されているからである．

注意 1. 上記の, そして主定理の証明中で頻繁に使う底変換 *(base change)* とは, いわゆる *Langlands* 予想の一部である *base change lift* のことである．これは土井-長沼持ち上げ *[DN1, DN2]* の拡張であり, 齋藤裕氏 *[Sa1, Sa2]*, 新谷氏 *[Shin1, Shin2]*, *Langlands [L]* らによって以下のような場合に証明された．代数体 F のアデール環を $\mathbf{A}_F$ で表し, $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_F)$ の保型表現の全体を Π_F と書くことにする．また l を素数とし, F'/F を 代数体の l 次巡回拡大とする．このとき保型表現 $\pi\in\Pi_F$ に対してその底変換 $\pi'\in\Pi_{F'}$ が定義でき, 任意の指標 $\psi:\mathbf{A}_F^\times/F^\times\to\mathbf{C}^\times$ に対して

$$L(s,\pi\times(\psi\circ N_{F'/F}))=\prod_{\chi\in\widehat{\mathrm{Gal}(F'/F)}}L(s,\pi\times\chi\psi) \tag{1}$$

を満たす．*(*表現 π' を特徴付けるには更に ϵ 因子の関係式を要請する必要がある．*)* なお *Clozel-Labesse* の底変換に関する河村-今野-成田氏による記事が本報告集にあり, より一般の場合の理論や背景なども詳しく紹介されている．

注意 2. 定理 *1* の総実体への拡張に関する論文は他にも *[J], [Ra]* などがある．*Serre* 予想の証明に関する文献は *[Kh1], [KW2], [KW3], [Di]* など．また本報告集にも良い解説がある．

1.2 記号及び用語の説明.

主定理の記述に必要な記号と用語を説明する．以下 F は総実体, p は奇素数とする．

1.2.1 保型形式に付随する Galois 表現.

総実体 F 上の Hilbert 保型新形式 (Hilbert modular newform, 以下では単に新形式と呼ぶ) f を考える. ただし並列な重さ $k \geq 2$ を持つものとしレベルを $\mathfrak{n}_f$ で表す. 新形式 f に対し, 我々は以下のような Galois 表現を考える. (Galois 表現の構成に関しては [Sh], [De], [C], [W1], [T1], または本報告集の山上氏の記事を参照.) レベル $\mathfrak{n}_f$ を割らない F の有限素点 ℓ に対して, 通常の Hecke 作用素 $T(\ell), S(\ell)$ の固有値を

$$T(\ell)f = c(\ell, f)f, \quad S(\ell)f = \chi_f(\ell)\mathrm{Nm}(\ell)^{k-2}f \tag{2}$$

と置く. これらの Hecke 固有値全体で $\mathbf{Q}$ 上生成される体を $K_f := \mathbf{Q}(c(\ell, f), \chi_f(\ell))$ と置き, $\mathcal{O}_f$ はその整数環, λ は p 上の $\mathcal{O}_f$ の素点の一つとする. また $\mathcal{O}_{f,\lambda}$ で $\mathcal{O}_f$ の λ 進完備化を表す. このとき $p\mathfrak{n}_f$ の外不分岐な λ 進 Galois 表現

$$\rho_{f,\lambda} : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{f,\lambda}) \tag{3}$$

で F の有限素点 $\ell \nmid p\mathfrak{n}_f$ に対し

$$\begin{aligned} \mathrm{trace}\,\rho_{f,\lambda}(\mathrm{Frob}_\ell) &= c(\ell, f), \\ \det \rho_{f,\lambda}(\mathrm{Frob}_\ell) &= \chi_f(\ell)\mathrm{Nm}(\ell)^{k-1} \end{aligned} \tag{4}$$

満たすものを構成できる. ここでは更に埋め込み $\mathcal{O}_{f,\lambda}/\lambda \hookrightarrow \overline{\mathbf{F}}_p$ を固定し, 剰余 Galois 表現

$$\overline{\rho}_{f,\lambda} := \rho_{f,\lambda} \bmod \lambda : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_p) \tag{5}$$

を定義する. なおこの剰余 Galois 表現が既約であるとき, $\rho_{f,\lambda}, \overline{\rho}_{f,\lambda}$ は同型を除いて一意に定まる. 以後剰余 Galois 表現は (絶対) 既約なもののみ扱うこととする.

新たに既約な剰余 Galois 表現

$$\rho : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_p) \tag{6}$$

が与えられたとする. このとき ρ が f に付随する, もしくは f が ρ を引き起こす, とは F の素点 $\lambda \mid p$ があって $\rho \simeq \overline{\rho}_{f,\lambda}$ となることである.

1.2.2 通常形式の性質.

新形式 f が有限素点 $\lambda \mid p$ で通常形式 (ordinary form) であるとは, p 上の各素点 v に対して Hecke 作用素 $T(v)$ (素点 v が f のレベル $\mathfrak{n}_f$ を割るときは $U(v)$) の固有値が $\mathcal{O}_{f,\lambda}^\times$ に入ることであった. 新形式 f の生成する保型表現を $\pi_f = \otimes_v \pi_v$ (v は F の素点全体を走る) と書くことにする. 新形式 f が通常形式であれば全ての $v \mid p$ に対して

$$\begin{aligned} &\pi_v \simeq \pi(\mu_{1,v}|\cdot|_v^{-1/2}, \mu_{2,v}|\cdot|_v^{-1/2}) \quad \text{(主系列表現) または} \\ &\pi_v \simeq \pi(\mu_{2,v}|\cdot|_v^{-1/2}, \mu_{2,v}|\cdot|_v^{1/2}) \quad \text{(スペシャル表現)} \end{aligned} \tag{7}$$

と指標 $\mu_{1,v}, \mu_{2,v} : F_v^\times \to \mathbf{C}^\times$ を用いて書き表され, 更に $\mu_{2,v}$ は不分岐かつ $\mu_{2,v}(\mathrm{Frob}_v) \in \mathcal{O}_{\overline{K}_f} \cap \mathcal{O}_{\overline{K}_{f,\lambda}}^\times$ を満たすように取れる. ただし不分岐指標 $\mu_{2,v}$ に数論的 Frobenius 元 Frob_v を代入するのに局所類体論の相互写像を使っている. なお放物型誘導表現

$$I(\mu_1, \mu_2) := \left\{ f : \mathrm{GL}_2(F_v) \to \mathbf{C} \mid f(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ & d \end{smallmatrix}\right) g) = \mu_1(a)\mu_2(d)|\tfrac{a}{d}|_v^{1/2} f(g) \right\} \tag{8}$$

を用いれば主系列表現は $\pi(\mu_{1,v}|\cdot|_v^{-1/2}, \mu_{2,v}|\cdot|_v^{-1/2}) = I(\mu_{1,v}|\cdot|_v^{-1/2}, \mu_{2,v}|\cdot|_v^{-1/2})$ で実現され, スペシャル表現 $\pi(\mu_{2,v}|\cdot|_v^{-1/2}, \mu_{2,v}|\cdot|_v^{1/2})$ は $I(\mu_{2,v}|\cdot|_v^{-1/2}, \mu_{2,v}|\cdot|_v^{1/2})$ の唯一の既約部分空間として実現される.

総実体 F の各有限素点 $v \mid p$ に対し, 分解群をひとつ固定して D_v と書くことにする. 新形式 f が通常形式であるとき, 付随する剰余 Galois 表現 $\overline{\rho}_{f,\lambda}$ は通常表現 (ordinary representation) である. 即ち $\overline{\rho}_{f,\lambda}$ の D_v への制限は可約で不分岐な一次元表現を商表現として持つ. 言い換えると, 二つの指標 $\chi_{f,1}^{(v)}, \chi_{f,2}^{(v)} : D_v \to \overline{\mathbf{F}}_p^\times$ を用いて

$$\overline{\rho}_{f,\lambda}|_{D_v} \simeq \begin{pmatrix} \chi_{f,1}^{(v)} & * \\ & \chi_{f,2}^{(v)} \end{pmatrix} \tag{9}$$

と書け, そのうち $\chi_{f,2}^{(v)}$ は不分岐で $\chi_{f,2}^{(v)}(\mathrm{Frob}_v)$ と $\mu_{2,v}^{-1}(\mathrm{Frob}_v)$ は $\overline{\mathbf{F}}_p$ の元として一致する. 新形式 f のある有限位数指標ひねりが通常形式となるとき, f は概通常 (nearly ordinary) であるという. この場合も $\overline{\rho}_{f,\lambda}$ の D_v への制限は (9) の形に書けるが, 指標 $\chi_{f,2}^{(v)}$ が不分岐とは限らない.

注意 3. 例えば $\mathbf{Q}_p$ 上の楕円曲線 E が通常還元 *(good ordinary reduction)* もしくは乗法的還元 *(multiplicative reduction)* を持つとき, 付随する p 進 *Galois* 表現 ρ_E 及び 剰余 *Galois* 表現 $\overline{\rho}_E$ は通常表現である. 実際, 円分指標 ϵ 及びある不分岐指標 $\chi : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p) \to \mathbf{Z}_p^\times$ を用いて

$$\rho_E \simeq \begin{pmatrix} \epsilon\chi^{-1} & * \\ & \chi \end{pmatrix} \tag{10}$$

と書ける.

以上のことから剰余 Galois 表現 ρ がある概通常新形式に付随するとき, F の各素点 $v \mid p$ に対し指標 $\chi_{1,v}, \chi_{2,v}$ があって

$$\rho|_{D_v} \simeq \begin{pmatrix} \chi_{1,v} & * \\ & \chi_{2,v} \end{pmatrix} \tag{11}$$

と書ける. この表記において ρ が新形式に付随している場合は $\chi_{2,v}$ に上記のような性質 (不分岐性, Frob_v での値) を要請する. また制限 $\rho|_{D_v}$ が分解してしまい $\chi_{1,v}, \chi_{2,v}$ が入れ替えられる場合でも, 順番を固定して入れ替えないと決めておく. 概通常新形式に付随する剰余 Galois 表現 ρ が D_v-特性的 (D_v-distinguished) であるとは, この表記で $\chi_{1,v} \neq \chi_{2,v}$ となることを意味する.

総実体 F の有限次総実拡大 F' と F' 上の概通常新形式 f' を考える．これまでの議論と同様に F' の素点 $v' \mid p$ に対して指標 $\chi_{f',2}^{(v')}$ が定義される．このとき指標からなるベクトル $\chi_2 := (\chi_{2,v_1}, \dots, \chi_{2,v_t})$ $(\{v_1, \dots, v_t\}$ は p 上の F の素点全体) に対して f' が χ_2-good であるとは, F' の p 上の各素点 v' に対しその F への制限 v を取れば $\chi_{f',2}^{(v')} = \chi_{2,v}|_{D_{v'}}$ となることである．

1.3 主定理.

導入で曖昧に書いた命題をここで定式化しておく．総実体 F 上の既約な剰余 Galois 表現 ρ がある新形式 f に付随しているとする．しかし実際には f のレベル $\mathfrak{n}_f$ より低いレベル $\mathfrak{n}_g$ の新形式 g が同じ ρ を引き起こしているかもしれない．このとき最も低いレベル $\mathfrak{n}_g$ はどう表記されるかという問題を考えてみよう．Ribet の結果 (定理 1) と比べると

$$\rho \text{ が } F \text{ の有限素点 } v \text{ で不分岐でかつ } v \nmid p \text{ であれば, } v \nmid \mathfrak{n}_g \text{ となる (？)}$$

新形式 g が存在しそうである．この疑問に対し, 少し弱めて基礎体 F の可解拡大により得られる (即ち ρ の制限で得られる) Galois 表現を引き起こす新形式 g まで許すと次の結果を得る．以下新形式 f のレベル $\mathfrak{n}_f$ を $\mathfrak{n}_f = \mathfrak{n}_f^{(p)}\mathfrak{n}'_f$, $\mathfrak{n}_f^{(p)} \mid p^\infty$, $(\mathfrak{n}'_f, p) = 1$ と分解して書く．

定理 2. *[元論文, Theorem.]* 総実体 F 上の絶対既約な剰余 *Galois* 表現 ρ が重さ *2*, レベル $\mathfrak{n}_f$ の F 上の新形式 f に付随しているとする．このとき次を満たす F の有限次総実可解拡大体 F' がとれる．

1. F'/F で p の上の素点は全て完全分解する．
2. $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F')}$ は既約．
3. $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F')}$ は重さ *2* の F' 上の新形式 g に付随しそのレベル $\mathfrak{n}_g$ は次を満たす．

$$\mathfrak{n}_g | \mathfrak{n}_f^{(p)} \prod_{\ell \in S} \ell. \tag{12}$$

   ただし S は $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{F}'/F')}$ が分岐している F' の有限素点で p を割らないもの全体とした．

条件 *3* の新形式 g は更に次を満たすように取れる．

4. 新形式 f が通常形式もしくは概通常形式であれば g も同様である．
5. 新形式 f が概通常形式であり χ_2*-good,* ρ が全ての素点 $v \mid p$ に対して D_v-特性的であれば g, $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F')}$ も同様である．

F の $p\mathfrak{n}_f$ を割らない有限素点からなる任意の有限集合を取る．このとき F' の取り方は *(*条件 *1* に加えて*)* 次のようにできる．

6. この集合に属するそれぞれの素点に対して F' で完全分解する，もしくは分岐すると予め決めておける．

注意 4. ここでは新形式 f の重さが *2* の場合のみを考えているが, 一般の並列な重さを持つ新形式に対してもこれから与える証明と同様の議論ができる. また f が通常形式の場合には一般の重さから重さ *2* の場合に帰着できる. このことに関して元論文では以下のような証明のレシピが書いてある. "通常形式の Λ-*adic family* の理論より, 剰余 *Galois* 表現 ρ を引き起こす重さ $k \geq 2$ の新形式 f が存在することと, 同様の重さ *2* の新形式 g が存在することは同値である. また $k \geq 2$ に対して二つの集合 $\{\mathfrak{n}'_f \mid f$ は重さ k で ρ を引き起こす$\}$, $\{\mathfrak{n}'_g \mid g$ は重さ 2 で ρ を引き起こす$\}$ は一致する. 更に f または g が χ_2-*good* であれば他方の χ_2-*good* も導かれる *[W1]*. 概通常形式でも同様のことが通常形式の場合に帰着することによって示される."

ここで使われている肥田氏の Λ-*adic family* の理論を大まかに説明しておこう. 形式的冪級数環 $\mathbf{Z}_p[[T]]$ の有限次拡大環 $\mathcal{O}$ を係数とする形式的 q 展開 $\mathcal{F}$ で以下のような性質を持つものが構成できる; 環 $\mathcal{O}$ の素イデアルからなる列 $\{\mathcal{P}_k\}_k$ と自然な埋め込み $\mathcal{O}/\mathcal{P}_k \hookrightarrow \overline{\mathbf{Q}_p}$ があり, この埋め込みで $\mathcal{F} \bmod \mathcal{P}_k$ は $\overline{\mathbf{Q}}$ 係数の q 展開だとみなせ, 総実体 F 上の通常形式を与えている. このような $\mathcal{F}$ を通常 Λ 進形式 *(ordinary* Λ-*adic form)* と呼ぶ. 更に任意の F 上の通常形式 f は, ある通常 Λ 進形式 $\mathcal{F}$ と素イデアル $\mathcal{P}_k$ を用いて $f = \mathcal{F} \bmod \mathcal{P}_k$ と書ける. ここで素イデアル $\mathcal{P}_k$ は通常形式 $f = \mathcal{F} \bmod \mathcal{P}_k$ の重さと対応しており, 更に同じ通常 Λ 進形式 $\mathcal{F}$ から得られる二つの通常形式 $f_1 := \mathcal{F} \bmod \mathcal{P}_{k_1}$, $f_2 := \mathcal{F} \bmod \mathcal{P}_{k_2}$ は合同となっている. 総実体上の Λ-*adic family* に関する文献は肥田氏の一連の論文や本 *[H1,H2,H3]* などがある.

1.4　主定理の証明の準備.

定理 2 の証明に向けていくつか記号, 用語, 補題を準備する.

1.4.1　基礎体の取り換えについて.

最初に基本となる次の補題を紹介する.

補題 1. *総実体 F 及びその有限素点からなる任意の有限集合を取る. 更にこの集合に属する各素点がそれぞれ完全分解する, もしくは分岐するという条件を自由に課しても, その条件を満たすように F 上の総実巡回拡大体 F' が取れる.*

今後特に言及しないが基礎体 F の取り換えにはこの補題を度々用いる. 特に定理 2 の条件 1, 2, 6 を満たす基礎体の拡大 F' が取れることを注意しておく.

1.4.2　四元数環上の保型形式.

新形式は Jacquet-Langlands-清水の定理により四元数環上の保型形式と対応している. この対応を用いて主定理の証明の舞台は四元数環上へ移される. 我々が扱う四元数環上の保型形式は以下のように定義される. 補題 1 より, 必要なら基礎体を適切な二次拡大で取

り替えて $[F:\mathbf{Q}]$ は偶数だと仮定してよい. すると全ての無限素点で分岐し, 全ての有限素点で不分岐となる F 上の四元数環 D が同型を除いて一意に定まる. 更に F 上の代数群 G^D で $G^D(F)=D^\times$ を満たすものも同型を除いて一意に定まる. 記号 ν_D で G^D の被約ノルム, 記号 R_D で四元数環 D の極大整環, そして記号 $\mathbf{A}_f$ で総実体 F のアデール環の有限部分を表記する. 各有限素点 v についてそれぞれ同型 $R_D\otimes\mathcal{O}_{F,v}\simeq \mathrm{M}_2(\mathcal{O}_{F,v})$ を一つ選んで固定することで同一視 $G^D(\mathbf{A}_f)\simeq \mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_f)$ が定まる. 開コンパクト部分群 $U=\prod_v U_v\subset \mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_f)$ (v は F の有限素点全体を走り $U_v\subset \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,v})$) に対し以下のように四元数環 D 上の保型形式の空間 $S^D(U)$ が定義される;

$$\begin{aligned} X(U) &:= D^\times\backslash G^D(\mathbf{A}_f)/U,\\ \mathcal{F}^D(U) &:= \{f : X(U)\to \mathbf{C}\},\\ I^D(U) &:= \{f\in\mathcal{F}^D(U)\mid f \text{ は } \nu_D : X(U)\to(\mathbf{A}_f)^\times/\nu_D(D^\times U) \text{ を経由}\},\\ S^D(U) &:= \mathcal{F}^D(U)/I^D(U). \end{aligned} \tag{13}$$

開コンパクト部分群 U は次の様なものを考えればよい; F のある正イデアル $\mathfrak{n}$ に対し

$$U_0(\mathfrak{n})\supset U\supset U_1(\mathfrak{n}) \tag{14}$$

を満たす. ただし

$$\begin{aligned} U_0(\mathfrak{n}) &:= \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F\otimes\widehat{\mathbf{Z}})\mid c\equiv 0 \mod \mathfrak{n}\right\},\\ U_1(\mathfrak{n}) &:= \left\{\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in U_0(\mathfrak{n})\mid a\equiv 1 \mod \mathfrak{n}\right\} \end{aligned} \tag{15}$$

と置いた. 特に $X(U)$ は有限集合になることに注意しよう.

Jacquet-Langlands-清水対応とは Hecke 作用と可換な同型

$$S^D(U)\simeq S_2(U) \tag{16}$$

のことであった. ただし重さ 2, レベル U の GL_2 の尖点形式の全体を $S_2(U)$ と置いた. 空間 $S^D(U)$ への Hecke 作用の定義は次の §1.4.3 で行う.

$\mathbf{C}$-線形空間 $\mathcal{F}^D(U)$ は次の整構造を持つ;

$$\mathrm{H}^0(X(U),\mathbf{Z}) := \{f\in\mathcal{F}^D(U)\mid f \text{ は } \mathbf{Z} \text{ に値を取る}\}. \tag{17}$$

これは階数 $\#X(U)$ の自由 $\mathbf{Z}$-加群となる. また任意の $\mathbf{Z}$-加群 R に対して $\mathrm{H}^0(X(U),R):=\mathrm{H}^0(X(U),\mathbf{Z})\otimes R$ と置く. 特に $\mathrm{H}^0(X(U),\mathbf{C})=\mathcal{F}^D(U)$ となる.

1.4.3 Hecke 作用.

四元数環 D 上の保型形式の空間 $S^D(U)$ への Hecke 作用を次のように定義する. 開コンパクト部分群 $U,U'\subset \mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_f)$ を上記のように取る. 任意の元 $g\in\mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_f)$ に対し両側剰余類の左剰余分解 $UgU'=\sqcup_i Ug_i$ を考え, 写像

$$[UgU'] : \mathcal{F}^D(U)\to\mathcal{F}^D(U'),\qquad [UgU']f(x) := \sum_i f(xg_i^{-1}) \tag{18}$$

を定める. これは $\{g_i\}$ の選び方によらない. すると $[UgU']$ は写像 $I^D(U) \to I^D(U')$ 及び写像 $S^D(U) \to S^D(U')$ も定める. 空間 $\mathrm{H}^0(X(U), \mathbf{Z})$ 上にも Hecke 作用素 $[UgU]$ は作用し, よって任意の R に対して $\mathrm{H}^0(X(U), R)$ 上にも作用している.

以下 $\mathbf{A}_f$ の元 x の v 成分を x_v と書くことにする. 総実体 F の各有限素点 ℓ に対し次の条件 1 〜 3 を満たす元 $\lambda^{(\ell)} \in \mathbf{A}_f$ を一つ取り固定する;

1. $\lambda^{(\ell)}_\ell$ は $\mathcal{O}_{F,\ell}$ の素元.
2. $v \neq \ell$ に対し $\lambda^{(\ell)}_v = 1$.
3. ρ が $v \mid p$ に対して D_v-特性的であるとき $\chi_{1,v}(\lambda^{(v)}_v) \neq \chi_{2,v}(\lambda^{(v)}_v)$ となる.

この元を用いて次の Hecke 作用素を定義しておく.

$$
\begin{aligned}
T(\ell) &:= [U\left(\begin{smallmatrix}1 & \\ & \lambda^{(\ell)}\end{smallmatrix}\right)U], \\
T(\ell^{-1}) &:= [U\left(\begin{smallmatrix}1 & \\ & (\lambda^{(\ell)})^{-1}\end{smallmatrix}\right)U], \\
S(\ell) &:= [U\left(\begin{smallmatrix}\lambda^{(\ell)} & \\ & \lambda^{(\ell)}\end{smallmatrix}\right)U].
\end{aligned}
\tag{19}
$$

なお $U_\ell = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,\ell})$ ならこの定義は $\lambda^{(\ell)}$ の取り方によらない.

1.4.4 内積.

四元数環上の保型形式の空間にも以下のように内積が与えられる. 上記のように取った U に対して $\overline{U} := U/(U \cap \mathcal{O}_F^\times)$ と置き, 剰余集合 $D^\times \backslash G^D(\mathbf{A}_f)$ 上の自然数値関数 c_U を

$$
c_U(x) := \#\{u \in \overline{U} \mid xu = x\} \tag{20}
$$

で定める. 特にこれは有限の値を取り, $x = yu$, $u \in U$ なら $c_U(x) = c_U(y)$ である. 係数環 R が任意の $x \in D^\times \backslash G^D(\mathbf{A}_f)$ に対し $c_U(x) \in R^\times$ を満たすとき

$$
\begin{aligned}
&\langle , \rangle_U : \mathrm{H}^0(X(U), R) \times \mathrm{H}^0(X(U), R) \to R, \\
&\langle f, g \rangle_U := \sum_{x \in X(U)} \frac{1}{c_U(x)} f(x) g(x)
\end{aligned}
\tag{21}
$$

は非退化な双線形写像を定める. (同一視 $\mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_f) = G^D(\mathbf{A}_f)$ を使った.) これは Hecke 作用素に関して同変ではないが, 各 $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{A}_f)$ に対して

$$
\langle [UgU]f, h \rangle_U = \langle f, [Ug^{-1}U]h \rangle_U \tag{22}
$$

を満たす. また $f \mapsto \langle f, \cdot \rangle_U$ は R に関して函手的な同型

$$
\mathrm{H}^0(X(U), R) \simeq \mathrm{Hom}_R(\mathrm{H}^0(X(U), R), R) \tag{23}
$$

をもたらす.

1.4.5 跡写像.

部分群 $V \subset U$ があって剰余類分解が $\overline{U} = \sqcup_i \overline{V} y_i$ と書けるとき

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{tr}(V,U) : \mathrm{H}^0(X(V),R) \to \mathrm{H}^0(X(U),R), \\
&\mathrm{tr}(V,U)f(x) := \sum_i f(xy_i^{-1})
\end{aligned} \tag{24}
$$

で跡写像 $\mathrm{tr}(V,U)$ を定義する．この写像は次の意味で Hecke 作用と可換である．それぞれの剰余類分解が $VgV = \sqcup_i Vx_i$, $UgU = \sqcup_i Ux_i$ と同じ集合 $\{x_i\}$ で表せるとき

$$
\mathrm{tr}(V,U)([VgV]f) = [UgU](\mathrm{tr}(V,U)f) \tag{25}
$$

が成り立つ．また次の可換図式を満たす;

$$
\begin{array}{ccccccc}
\langle , \rangle_U & : & \mathrm{H}^0(X(U),R) & \times & \mathrm{H}^0(X(U),R) & \to & R \\
& & \downarrow & & \uparrow \mathrm{tr}(V,U) & & \| \\
\langle , \rangle_V & : & \mathrm{H}^0(X(V),R) & \times & \mathrm{H}^0(X(V),R) & \to & R.
\end{array} \tag{26}
$$

ただし下向きの矢印は $V \hookrightarrow U$ から導かれる自然な射である．

1.4.6 証明に使う補題.

主定理の証明に向けていくつかの補題を準備しておく．基礎体 F の素点 ℓ が $U_\ell = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F,\ell})$ を満たすとする．このとき任意の写像 $f : G^D(\mathbf{A}_f) \to R$ に対し, 作用 α を

$$
(\alpha f)(g) := f(g(^1 {}_{\lambda^{(\ell)}})) \tag{27}
$$

で定める．ただし $\lambda^{(\ell)}$ は §1.4.3 で Hecke 作用 $T(\ell)$ の定義に用いた元とした．また非負整数 r に対し $U^{(r)} := U \cap U_0(\ell^r)$ と置く．レベルのコントロールに直結するのは次で定義される写像 γ の性質である．

補題 2. *[元論文, Lemma 1.]* 任意の $r \geq 1$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{H}^0(X(U^{(r-1)}),R) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^0(X(U^{(r)}),R)^2 \xrightarrow{\gamma} \mathrm{H}^0(X(U^{(r+1)}),R), \\
&\delta(f) := (f, -\alpha f), \qquad \gamma(f_1,f_2) := \alpha f_1 + f_2
\end{aligned} \tag{28}
$$

は完全列となる．

補題 2 は直接計算で示される (詳しくは [SW1, Lemma 3.27] を参照). 次の補題は [W2, p.498 の最上段の式] の類似であり, こちらも直接計算で示される．

補題 3. *[元論文, Lemma 2.]* 任意の x に対して $c_U(x) \in R^\times$ を仮定する．γ は補題 *2* で定義した線形作用素, $\widehat{\gamma}$ は内積 $\langle , \rangle_U$ に関する γ の随伴作用素とする．このとき

$$
\widehat{\gamma} \circ \gamma = \begin{pmatrix} \mathrm{N}(\ell) & T(\ell^{-1}) \\ T(\ell) & \mathrm{N}(\ell) \end{pmatrix} \tag{29}
$$

が成り立つ．

最後に次の補題で Hecke 作用素 $T(\ell)$ と $T(\ell^{-1})$ の関係を表す式を与える.

補題 4. *[元論文, Lemma 3.]* 新形式 f の生成する保型表現の ℓ 成分 π_ℓ が ℓ を法とするスペシャル表現だと仮定する. このとき

$$T(\ell)T(\ell^{-1})f = T(\ell^{-1})T(\ell)f = f \tag{30}$$

が成り立つ.

補題 4 は π_ℓ の表示 (8) を用いた直接計算で示される.

1.5 主定理の証明.

定理 2 の証明を行う. 即ち総実体 F 上の新形式 f から出発して定理 2 の条件 1 から 6 を満たす総実体 F' 及び新形式 g を構成していく. 新形式 f のレベルを $\mathfrak{n}_f$, その p と互いに素な部分を $\mathfrak{n}'_f$, p ベキを割る部分を $\mathfrak{n}_f^{(p)}$ と書くことを思い出しておこう. また新形式 f が生成する保型表現を $\pi_f = \otimes_v \pi_v$ (v は F の素元全体を走る) と置いた.

1.5.1 底変換による局所保型表現の取り換え.

まずは底変換により新形式 f を取り替え, 局所保型表現を扱いやすいものにする. 補題 1 より $[F:\mathbf{Q}]$ が偶数の場合に帰着できる. また同様に F の有限素点 $\ell \mid \mathfrak{n}'_f$ に対し π_ℓ は ℓ を法とし, 不分岐中心指標を持つ局所保型表現だと仮定してよい. 特にこのような π_ℓ はスペシャル表現であり $\mathfrak{n}'_f$ は平方因子を持たず, そして χ_f は p を割らない素点で不分岐となっている. 更に基礎体を取り替えて F の有限素点 $\ell \mid \mathfrak{n}'_f$ 全てに対して

$$p \mid (\mathrm{N}(\ell) - 1) \tag{31}$$

を仮定してよい. これらの条件下で次の主張を示したい; イデアル $\mathfrak{n}'_f$ を割り $\rho = \overline{\rho}_{f,\lambda}$ が不分岐となる有限素点全体を Σ_f と置くとき

(∗) 各素点 $\ell \in \Sigma_f$ に対し, 重さ 2 の新形式 g でそのレベル $\mathfrak{n}_g$ が $\mathfrak{n}_g \mid (\mathfrak{n}_f/\ell)$ を満たし, K_g のある有限素点 $\mu \mid p$ で $\overline{\rho}_{f,\lambda} \simeq \overline{\rho}_{g,\mu}$ を満たすものが存在する.

ただし新形式 f が (概) 通常である場合には, 定理 2 の 条件 4, 5 も満たすように g を選ぶ必要がある.

1.5.2 保型形式の合同.

上記の主張 (∗) の中で $\overline{\rho}_{f,\lambda} \simeq \overline{\rho}_{g,\mu}$ の部分は新形式 f, g の Hecke 固有値の合同に言い換えられる. 更に Hecke 固有値の合同は以下の様に (新形式の零化イデアルを含む) Hecke 環の極大イデアルの一致に帰着される.

最初に f は概通常形式であるが通常形式でない場合を除外して考える．また技術的な理由で F の有限素点 $\mathfrak{r}$ で $\mathfrak{r} \nmid \mathfrak{n}_f p$, $p \mid (\mathrm{N}(\mathfrak{r})+1)$ を満たすものを一つ取る．このとき $U := U_0(\mathfrak{r}\mathfrak{n}'_f/\ell) \cap U_1(\mathfrak{n}^{(p)})$ と置けば任意の $x \in D^\times \backslash G^D(\mathbf{A}_f)$ に対して $(c_U(x), p) = 1$ であり, また $f \in S_2(U^{(1)})$ となる．我々は Hecke 環 $\mathbf{T}$ を次の記号で生成される $\mathbf{Z}$ 上の可換多項式環として定義する;

$$(32)\qquad \begin{array}{ll} \{t(\mathfrak{q}), s(\mathfrak{q}) : \mathfrak{q} \nmid \mathfrak{n}_f \mathfrak{r} \ell p\}, & f\text{ が通常形式でないとき}, \\ \{t(\mathfrak{q}), s(\mathfrak{q}), t(v) : \mathfrak{q} \nmid \mathfrak{n}_f \mathfrak{r} \ell p,\ v \mid p\}, & f\text{ が通常形式のとき}. \end{array}$$

記号 $t(\mathfrak{q}), s(\mathfrak{q})$ を $T(\mathfrak{q}), S(\mathfrak{q})$ と読み替えることにより $\mathbf{T} \otimes R$ は $\mathrm{H}^0(X(U^{(i)}), R)$ に作用する．特に $R \subset \mathbf{C}$ なら $\mathbf{T} \otimes R$ は $S_2(U^{(i)})$ に作用している．(i は任意の非負整数.)

注意 5. *付随する剰余 Galois 表現の一致だけを見るのであれば, p 上の素点での Hecke 作用, Hecke 固有値は見る必要がないが, 新形式 f が通常形式の場合は定理 2 の 条件 4, 5 (これは p 上の素点での Hecke 作用から分かる) も確かめなければならない.*

局所体 F_λ に f の Hecke 固有値全てを付加した局所体を考え, その整数環及び素元を $\mathcal{O}, \widetilde{\lambda}$ で表す．このとき $\mathbf{T} \otimes \mathcal{O}$ の極大イデアル $\mathbf{m}$ を次で生成されるものとする;

$$(33)\qquad \begin{array}{ll} \{\widetilde{\lambda}, t(\mathfrak{q}) - c(\mathfrak{q}, f), s(\mathfrak{q}) - \chi_f(\mathfrak{q}) : \mathfrak{q} \nmid \mathfrak{n}_f \mathfrak{r} \ell p\}, & f\text{ が通常形式でないとき}, \\ \{\widetilde{\lambda}, t(\mathfrak{q}) - c(\mathfrak{q}, f), s(\mathfrak{q}) - \chi_f(\mathfrak{q}), t(v) - \widetilde{\chi}^v_{f,2}(\mathrm{Frob}_v) : \mathfrak{q} \nmid \mathfrak{n}_f \mathfrak{r} \ell p,\ v \mid p\}, & \\ & f\text{ が通常形式のとき}. \end{array}$$

ただし $\overline{F}_p^\times$ の元 $\chi^v_{f,2}(\mathrm{Frob}_v)$ の $\mathcal{O}$ への持ち上げの一つを $\widetilde{\chi}^v_{f,2}(\mathrm{Frob}_v)$ と置いた.

総実体 F の有限素点 $\mathfrak{q} \nmid \mathfrak{n}_f \mathfrak{r} p$ で単項イデアルであるものを考えれば, 直接計算により Hecke 作用 $T(\mathfrak{q})$ は $I^D(U^{(i)})$ 上で $(1 + \mathrm{N}(\mathfrak{q}))$ 倍写像であることが示せ, $I^D(U^{(1)})_{\mathbf{m}} = 0$ が従う．よって (16) より $\mathbf{T} \otimes \mathcal{O}$-加群としての同型

$$(34)\qquad \mathrm{H}^0(X(U^{(i)}), \mathcal{O})_{\mathbf{m}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathbf{C} = \mathrm{H}^0(X(U^{(i)}), \mathbf{C})_{\mathbf{m}} \simeq S_2(U^{(i)})_{\mathbf{m}}$$

を得る．ただし埋め込み $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathbf{C}$ として f の Hecke 固有値上項等写像であるものを取った．更に $\mathbf{m}$ は f の零化イデアルを含むので

$$(35)\qquad S_2(U^{(1)})_{\mathbf{m}} \ni f \neq 0$$

となっている．非負整数 i に対し $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(\mathrm{H}^0(X(U^{(i)}), \mathcal{O})_{\mathbf{m}})$ の中での $\mathbf{T} \otimes \mathcal{O}$ の像を $\mathbf{T}'$, $\mathbf{m}$ の像を $\mathbf{m}'$ と書くことにする．すると $\mathbf{T}'$ はねじれ元を含まない有限生成 $\mathcal{O}$-代数となり, $\mathbf{m}'$ は $\mathbf{T}'$ の極大イデアルである．また一対一対応

$$(36)\quad \{\mathfrak{M} \subset \mathbf{m}' \mid \mathbf{T}'\text{の極小素イデアル}\} \leftrightarrow \{g \in \mathrm{H}^0(X(U^{(i)}), \mathbf{C})_{\mathbf{m}} \mid \text{Hecke 同時固有関数}\}$$

が $\mathfrak{M}g = 0$ で与えられる．特に $\mathfrak{M} \subset \mathbf{m}'$ より, このような g (と Jacquet-Langlands-清水の定理で対応する新形式) に付随する剰余 Galois 表現は $\rho = \overline{\rho}_{f,\lambda}$ と一致することに注意しよう.

1.5.3 主張 $(*)$ の証明.

まず $\mathrm{H}^0(X(U),\mathcal{O}/(\widetilde{\lambda}))_{\mathbf{m}} \neq 0$ と仮定しよう. 特に $\mathrm{H}^0(X(U),\mathcal{O})_{\mathbf{m}} \neq 0$ である. この場合は §1.5.2 での議論により, 一つ極小イデアル $\mathfrak{M} \subset \mathbf{m}'$ を取ることにより主張 $(*)$ を満たす g を得られる. また f が通常形式の場合の定理 2 の 条件 4, 5 も, 素点 $\mathfrak{p} \mid p$ での Hecke 作用素 $t(\mathfrak{p})$ に関する固有値の合同から示される.

次に $\mathrm{H}^0(X(U),\mathcal{O}/(\widetilde{\lambda}))_{\mathbf{m}} = 0$ の場合を考えよう. 完全列 (28) の $r=1$, $R=\mathcal{O}$ 及び $R=\mathcal{O}/(\widetilde{\lambda})$ の場合を考え, 更に $\mathbf{m}$ で局所化すると二つの完全列

$$\mathrm{H}^0(X(U),\mathcal{O})_{\mathbf{m}} \xrightarrow{\delta_1} \mathrm{H}^0(X(U^{(1)}),\mathcal{O})^2_{\mathbf{m}} \xrightarrow{\gamma_1} \mathrm{H}^0(X(U^{(2)}),\mathcal{O})_{\mathbf{m}}, \tag{37}$$

$$0 \to \mathrm{H}^0(X(U^{(1)}),\mathcal{O}/(\widetilde{\lambda}))^2_{\mathbf{m}} \xrightarrow{\gamma_2} \mathrm{H}^0(X(U^{(2)}),\mathcal{O}/(\widetilde{\lambda}))_{\mathbf{m}} \tag{38}$$

を得る. いかにもレベルの引き下げに使いそうな完全列であるが, 実際は一旦レベルを引き上げるための次の補題に使用する. もう一度レベルを引き下げるためにはまた別の議論が必要である.

補題 5. $\mathrm{H}^0(X(U^{(2)}),\mathcal{O})_{\mathbf{m}}/\mathrm{Im}(\gamma_1)$ は零でない自由 $\mathcal{O}$-加群である.

Proof. γ_2 は単射であった. もし γ_2 が全射だったとすると $A := \widehat{\gamma_2} \circ \gamma_2 = \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{N}(\ell) & T(\ell^{-1}) \\ T(\ell) & \mathrm{N}(\ell) \end{smallmatrix}\right)$ 及び $A^* := \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{N}(\ell) & -T(\ell) \\ -T(\ell^{-1}) & \mathrm{N}(\ell) \end{smallmatrix}\right)$, そして $A^* \circ A = \mathrm{N}(\ell)^2 - T(\ell)T(\ell^{-1})$ は $\mathrm{H}^0(X(U^{(1)}),\mathcal{O}/(\widetilde{\lambda}))^2_{\mathbf{m}}$ の自己同型となる. これは以下の議論により矛盾である; 同型 (34) より f と同じ Hecke 固有値を持つ Hecke 同時固有関数 $h \in \mathrm{H}^0(X(U^{(1)}),\mathcal{O})_{\mathbf{m}}, \neq 0$ が取れる. 必要なら定数倍して h の像 $\overline{h} \in \mathrm{H}^0(X(U^{(1)}),\mathcal{O}/(\widetilde{\lambda}))_{\mathbf{m}}$ も零でないとしてよい. ここで補題 4 と仮定 (31) により関係式

$$(\mathrm{N}(\ell)^2 - T(\ell)T(\ell^{-1}))\overline{h} = (\mathrm{N}(\ell)^2 - 1)\overline{h} = 0 \tag{39}$$

を得る. よって $A^* \circ A$ が同型に矛盾する. 以上より $\mathrm{H}^0(X(U^{(2)}),\mathcal{O}/(\widetilde{\lambda}))_{\mathbf{m}}/\mathrm{Im}(\gamma_2) \neq \{0\}$, よって $\mathrm{H}^0(X(U^{(2)}),\mathcal{O})_{\mathbf{m}}/\mathrm{Im}(\gamma_1) \neq \{0\}$ を得た. これが自由加群であるのは γ_2 の単射性より従う. □

この補題 5 により, 先の $\mathrm{H}^0(X(U),\mathcal{O})_{\mathbf{m}} \neq 0$ の場合と同様の議論で Hecke 同時固有関数 $f' \in \mathrm{H}^0(X(U^{(2)}),\mathcal{O})_{\mathbf{m}}, \notin \mathrm{Im}(\gamma_1)$ が構成でき, 対応する $S_2(U^{(2)})$ の Hecke 同時固有形式 g を考えれば g が ρ を引き起こすことや, 新形式 f が通常形式である場合の定理 2 条件 4,5 を g が満たすことが示せる. ただし $f' \notin \mathrm{Im}(\gamma_1)$ により g が 素点 ℓ に関して old でないことに注意しよう. (すなわち, レベルの引き下げどころか逆に上がってしまっている!) ただし g の保型表現 π_g の ℓ 成分 $\pi_{g,\ell}$ は分岐主系列表現である. これは $g \in S_2(U^{(2)})$ 及び (31) より従う. よって適切な奇数次巡回拡大による底変換により $\pi_{g,\ell}$ は不分岐主系列表現となり, 主張 $(*)$ を満たす g を得た.

今 $\mathfrak{n}_g^{(p)} | \mathfrak{n}_f^{(p)}$ であり, $\mathfrak{n}'_g$ は平方因子を持たず, $1 \leq \#\{\mathfrak{q} | \mathfrak{n}'_g\} < \#\{\mathfrak{q} | \mathfrak{n}'_f \mathfrak{r}\}$ であることに注意すれば同様の議論が $\Sigma_g = \emptyset$ もしくは $=\{\mathfrak{r}\}$ となるまで繰り返せる. もし $\Sigma_g = \emptyset$ なら

ば定理の証明は終了しているので $\Sigma_g = \{\mathfrak{r}\}$ としよう. 固有形式 g の $\mathfrak{r}$ での局所保型表現は自明指標を持つスペシャル表現である. よってこれまでの議論を ℓ を $\mathfrak{r}$ に取り換えて繰り返せば, 新たに Hecke 同時固有形式 g' で $\mathfrak{r}$ での局所保型表現が不分岐もしくは超尖点的 (supercuspidal) であるものが取れる. ($p \nmid (\mathrm{N}(\mathfrak{r}) - 1)$ に注意する.) もし後者であっても適切な底変換により定理の条件を満たす新形式を得る.

除外していた "f は概通常形式であるが通常形式でない場合" を最後に考えよう. これは以下のように f が通常形式の場合に帰着できる. 新形式 f は概通常形式なので有限位数の指標 ψ があって f の ψ ひねり ($:= f_1$ と置く) は通常形式である. 基礎体の取り換えにより ψ は p の上でのみ分岐していると仮定してよい. 定理 2 を $\rho \otimes \psi \simeq \overline{\rho}_{f_1,\lambda}$ に適応して得られる新形式を g_1 とする. 再び基礎体の取り換えと指標ひねりを g_1 に施すことで求める新形式が構成できる. これですべての場合で定理 2 の証明が完了した.

2　Kisin の論文中での類似の議論

2.1　四元数環上の保型形式

Kisin [K1] はある条件下で 2 次元 p 進 Galois 表現が保型的であることを示している. この目的のために [K1, §3.1] では四元数環上の保型形式に関するいくつかの補題を準備している. それらの中で特に山下氏の記事で用いられている部分 Lemma (3.1.5), Corollary (3.1.6) を解説する. この節でも p は 3 以上の素数で F は総実代数体とする. 総実体 F 上の四元数環 D は, ここでは全ての無限素点で分岐し p 上の全ての素点で不分岐なものとする. 有限素点上での分岐を許している部分が §1 で扱ったものとの違いであるが, 議論は並行して行える. 四元数環 D で分岐している F の有限素点の集合を Σ と置く. また D の極大整環 $\mathcal{O}_D$ を一つ固定し, 更に各有限素点 $v \notin \Sigma$ に対して同型 $(\mathcal{O}_D)_v \cong M_2(F_v)$ を選び同一視しておく. 総実体 F のアデール環の有限部分 $\mathbf{A}_F^f$ と書く. このとき $\mathbf{Z}_p$ 上の位相環 A を係数環とする D 上の保型形式の空間 $S_{\tau,\psi}(U, A)$ を以下の条件で定義する;

c1. 開コンパクト部分群 $U = \prod_v U_v \subset (D \otimes_F \mathbf{A}_F^f)^\times$ (ただし $U_v \subset (\mathcal{O}_D)_v{}^\times$) は 有限素点 $v \in \Sigma$ に対して $U_v = (\mathcal{O}_D)_v{}^\times$, 有限素点 $v \mid p$ に対して $U_v = GL_2(\mathcal{O}_{F_v})$ を満たす.

c2. 群 U の連続表現 $\tau = (\tau, W_\tau)$ は p と互いに素な部分は自明表現とする. 即ち $\tau = \otimes_{v|p} \tau_v$, $W_\tau = \otimes_{v|p,\ A} W_{\tau_v}$, $\tau_v : U_v \to \mathrm{Aut}(W_{\tau_v})$ と書ける. また各 W_{τ_v} は有限自由 A 加群とする.

c3. 連続な指標 $\psi : (\mathbf{A}_F^f)^\times / F \to A^\times$ があって, 各有限素点 v に対して制限 $\tau|_{U_v \cap (\mathcal{O}_{F_v})^\times}$ は ψ^{-1} の作用と一致する.

特に 3 番目の条件を満たす指標 ψ が常に存在しているとは限らないことに注意. ただし与えられた表現 τ に対して十分小さな U に取り換えれば 3 番目の条件を満たす指標 ψ が取れる. これらの条件のもとで四元数環 D 上の保型形式とは

$$S_{\tau,\psi}(U, A) := \{ f : D^\times \backslash (D \times \mathbf{A}_F^f)^\times \to W_\tau \mid f(guz) = \tau(u)^{-1} \psi(z) f(g), \\ \forall g \in (D \times \mathbf{A}_F^f)^\times,\ \forall u \in U,\ \forall z \in (\mathbf{A}_F^f)^\times \}$$

に属する関数として定義される. (§1 や古典的な定義とは異なっていることに注意.)

両側剰余類 $D^\times\backslash(D \times \mathbf{A}_F^f)^\times/U(\mathbf{A}_F^f)^\times$ は有限, 即ち $(D \times \mathbf{A}_F^f)^\times = \sqcup_{i\in I} D^\times t_i U(\mathbf{A}_F^f)^\times$, $\# I < \infty$ と書けるので $G_t := (U(\mathbf{A}_F^f)^\times \cap t^{-1}D^\times t)/F^\times$ (これは有限群, e.g., [T2, Lemma 1.1]) と置けば同型

$$S_{\tau,\psi}(U, A) \cong \oplus_{i\in I} W_\tau{}^{G_{t_i}},\ f \mapsto \{f(t_i)\}_{i\in I}$$

を得る. なお I, G_{t_i} は表現 τ によらないので, この式は関手 $W_\tau \mapsto S_{\tau,\psi}(U, A)$ を与えている. この関手は次の仮定の下で完全である;

(40) 全ての $t \in (D \times \mathbf{A}_F^f)^\times$ に対して G_t は p と素な位数の群となる.

以下この仮定の下で議論を進める. なお [T2, Lemma 1.1] と同様の議論で U が十分小さいとき G_t の位数は 2 冪になることが示され, この場合は仮定 (40) を満たす.

空間 $S_{\tau,\psi}(U, A)$ には次のように Hecke 作用が定義される. 総実体 F の有限素点からなる有限集合 S を, $S \supset \Sigma$, $v \mid p$ であれば $v \in S$, U_v が $D_v{}^\times$ の極大コンパクト群でなければ $v \in S$, となるように取る. このとき Hecke 環は

(41)
$$\mathbf{T}_{S,A}^{\mathrm{univ}} := A[T_v, S_v]_{v\notin S} \ (v \text{ は } S \text{ に含まれない有限素点全体を走る}),$$
$$S_v \leftrightarrow [U\left(\begin{smallmatrix}\pi_v & 0\\ 0 & \pi_v\end{smallmatrix}\right)U], \quad T_v \leftrightarrow [U\left(\begin{smallmatrix}\pi_v & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)U]$$

で定義する. 即ち各有限素点 v に対して F_v の素元 π_v を一つ固定し, 自然な埋め込み $F_v^\times \hookrightarrow (\mathbf{A}_F^f)^\times$ で π_v を $\mathbf{A}_F^f$ の元だとみなす. 両側剰余類の右剰余分解 $UgU = \sqcup_j g_j U$ が与えられたとき, $[UgU]$ の $f \in S_{\tau,\psi}(U, A)$ への作用は $[UgU]f(z) := \sum_j f(zg_i)$ で定義される. この節では元 $g \in (D \otimes_F \mathbf{A}_F^f)^\times$ の関数 $f : (D \otimes_F \mathbf{A}_F^f)^\times \to W_\tau$ への作用は右作用 $gf(z) := f(zg)$ で考えていることに注意しよう. 関数 $f \in S_{\tau,\psi}(U, A)$ が固有関数であるとは, この Hecke 環の作用について同時固有関数であることである.

Hecke 環 $\mathbf{T}_{S,A}^{\mathrm{univ}}$ の極大イデアル $\mathbf{m}$ で剰余体が標数 p の有限体となるものを考える. このとき $\mathbf{m}$ が (τ, ψ) の台 (support) に含まれるとは $S_{\tau,\psi}(U, A)_{\mathbf{m}} \neq \{0\}$ となることである. また $\mathbf{m}$ が Eisenstein であるとは $T_v - 2 \notin \mathbf{m}$ となる有限素点は高々有限個であり, それらはすべて F の有限次アーベル拡大 F' で分解していることを言う.

環 A は局所環であるとし, その極大イデアルを $\mathbf{m}_A$ で表す. また固有関数 $f \in S_{\tau,\psi}(U, A)$ はその像 $\bar{f} \in S_{\tau,\psi}(U, A) \otimes_A A/\mathbf{m}_A$ が 0 でないものとする. このとき f に付随する極大イデアル $\mathbf{m}$ とは $\mathbf{T}_{S,A}^{\mathrm{univ}}$ の $\bar{f}$ への作用の核のことである.

以下の補題は Khare [Kh] の結果を改編したものである.

補題 6. 記号は今まで通りとし, 真のイデアル $I \subset A$ に対して $\bar{\psi} : (\mathbf{A}_F^f)^\times/F \to (A/I)^\times$ は ψ から誘導された指標とする. また U の A/I 係数の表現 $(\tau', W_{\tau'})$ は $W_{\bar{\tau}} := W_\tau \otimes_A A/I$ のある部分商だとする. このとき $\mathbf{m}$ が $(\tau', \bar{\psi})$ の台に含まれれば (τ, ψ) の台にも含まれている.

Proof. 関手 $W_\tau \mapsto S_{\tau,\psi}(U, A/I)$ の完全性より, $S_{\tau',\bar{\psi}}(U, A)_{\mathbf{m}} \neq \{0\}$ は $S_{\bar{\tau},\bar{\psi}}(U, A)_{\mathbf{m}} \neq \{0\}$ を導く. 更に全射 $W_{\tau,\psi} \to W_{\bar{\tau},\bar{\psi}}$ は全射 $S_{\tau,\psi}(U, A)_{\mathbf{m}} \to S_{\bar{\tau},\bar{\psi}}(U, A)_{\mathbf{m}}$ をもたらすので題意が示せる. □

[K1, (3.1.14)] で説明してあるように, ここで定義した保型形式の空間 $S_{\tau,\psi}(U,A)$ は古典的な四元数環上の保型形式の空間と本質的に一致しており, 更に Jacquet-Langlands-清水の定理により Hilbert 保型形式のなす空間と対応する. この対応と下の系 1 を合わせると, 局所保型表現が p 上の全ての素点で不分岐もしくは導手 (の指数) 1 のスペシャル表現となる新形式 f と, 同じものが超尖点的な新形式 g との間の合同を与えることになる. 山下氏の記事 [Kisin の修正 Taylor-Wiles 系, 定理 4.2] でこの結果が使われる.

補題 7. *[K1, Lemma (3.1.5).]* 体 K, E を $\mathbf{Q}_p$ の有限次拡大体とし, それぞれの整数環を $\mathcal{O}_K$, $\mathcal{O}$, 剰余体を $\mathbf{F}_q$, $\mathbf{F}$ と書くことにする. $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_q)$ の上三角行列全体のなす部分群を B と置き, その $\mathbf{F}$ 係数の自明表現を $\mathbf{1}$ で表すこととする. また W_0 を $\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_q)}\mathbf{1}$ の部分空間で定数関数全体からなるものとし, W_1 はその商空間 $\mathrm{Ind}_B^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_q)}\mathbf{1}/W_0$ とする. もし E が十分大きければ, $i=0,1$ それぞれにおいて次を満たす $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)$ の表現 W が存在する.

1. W は有限自由 $\mathcal{O}$ 加群で, W_i は $W\otimes_{\mathcal{O}}\mathbf{F}$ のある部分商と同型である.
2. W は滑らかな表現 *(*即ち各軌道への自然な写像が局所定数写像となっている*)* であり, 尖点的 *K-type (cuspidal K-type)* である. 即ち $\mathrm{GL}_2(K)$ の尖点表現 α があって, その制限 $\alpha|_{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)}$ は $W\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathbf{Q}_p$ を部分表現として持つ. また同じ性質を持つ既約許容表現 α' は全て α を不分岐指標でひねったものである.
3. 制限 $W|_{\mathcal{O}_K^\times}$ は自明である.

Proof. 体 K の (唯一の) 不分岐二次拡大体を H と置き, その整数環及び極大イデアルを $\mathcal{O}_H$, $\mathfrak{p}_H$ と置く. 埋め込み $\mathcal{O}_H\hookrightarrow M_2(\mathcal{O}_K)$ を一つ固定し, 行列 $\sigma\in M_2(\mathcal{O}_K)$ でその共役作用が $\mathcal{O}_H/\mathcal{O}_K$ の非自明な自己同型を与え $\sigma^2=1$ となるものを一つ取る. このとき以下の条件を満たす指標 $\theta:\mathcal{O}_H^\times\to\mathcal{O}^\times$ が取れる;

1. 指標 θ の法 (の指数) は正偶数 $2m$ である.
2. 任意の指標 $\chi:\mathcal{O}_K^\times\to\mathcal{O}^\times$ で θ をひねったもの $\theta(\chi\circ N_{H/K})$ は $2m$ 以上の法を持つ. (E を十分大きく取ればこのような θ が取れる.)
3. 指標 $\theta_0:\mathbf{F}_{q^2}^\times\to\mathbf{F}^\times$ は θ から引き起こされたものだとする.
   (a) $i=0$ のとき, θ_0 は自明指標である.
   (b) $i=1$ のとき, θ_0 は非自明でその核が $\mathbf{F}_q^\times$ を含む.
4. 制限 $\theta|_{\mathcal{O}_K^\times}$ は自明写像. (今 $p>2$ なのでこう取れる.)

部分群 $K_\theta:=H^\times(1+\sigma\mathfrak{p}_H^m)\subset\mathrm{GL}_2(K)$ を考え, 指標 θ を $(1+\sigma\mathfrak{p}_H^m)$ 上自明に $\tilde{\theta}:K_\theta\to E^\times$ へ拡張したものを一つ取る. 更に $\alpha:=\mathrm{Ind}_{K_\theta}^{\mathrm{GL}_2(K)}$ と置けばこれは既約許容尖点的表現となる [GK]. これが補題 7 の条件 3 を満たすのは自明である. 条件 2 は [Kh, §3.2, Lemma 4] の議論を一般の基礎体に拡張して示せる. ($W'=\mathrm{Ind}_{K_\theta}^{K^\times\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)}\tilde{\theta}$ と置けばこれも既約表現であり, W は W' の $\mathcal{O}$ 格子となっている.) また $i=0$ の場合の条件 1 は $\mathcal{O}_\theta:=\mathcal{O}_H^\times(1+\sigma\mathfrak{p}_H^m)$ と置けば $W\otimes_{\mathcal{O}}\mathbf{F}=\mathrm{Ind}_{\mathcal{O}_\theta}^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_K)}\mathbf{1}$ が自明表現を含むことより従う. $i=1$ の場合の条件 1 を示すために誘導表現 $\mathrm{Ind}_{\mathbf{F}_{q^2}^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_q)}\theta_0$ を考えよう. ただし埋め込み $\mathbf{F}_{q^2}^\times\hookrightarrow\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_q)$ は上で固定した埋め込み $\mathcal{O}_H\hookrightarrow M_2(\mathcal{O}_K)$ から導かれるものとする. するとこれは $W\otimes_{\mathcal{O}}\mathbf{F}$ の部分商となっている. 制限 $W_1|_{\mathbf{F}_{q^2}^\times}$ を考えると, これは $F_{q^2}^\times/F_q^\times$ の全ての非自明指標の直和

である. よって非自明写像 $W_1 \to \mathrm{Ind}_{\mathbf{F}_{q^2}^\times}^{\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_q)}\theta_0$ が存在する. もし W_1 が既約であることを言えればこの写像が単射となり条件 1 を満たすが, この既約性は [CDT, Lemma 3.1.1] から従う. □

系 1. *[K1, Corollary (3.1.6).]* $\mathbf{Q}_p$ の有限次拡大 E を取りその整数環を $\mathcal{O}$ と置く. 下記のように取った U の表現 $\tau_0 = (\tau_0, W_{\tau_0})$ (及び *c1* 〜 *c3* を満たす ψ, U) に対して保型形式の空間 $S_{\tau_0,\psi}(U,\mathcal{O})$ を考える;

a. $W_{\tau_0} := W_{\tau_0^{\mathrm{alg}}} \otimes_{\mathcal{O}} W_{\tau_0^{\mathrm{sm}}}$, $W_{\tau_0^{\mathrm{sm}}} := \otimes_{v|p,\mathcal{O}} W_{\tau_{0,v}^{\mathrm{sm}}}$, $W_{\tau_0^{\mathrm{alg}}} := \otimes_{v|p,\mathcal{O}} W_{\tau_{0,v}^{\mathrm{alg}}}$ と書ける.

b. 各 $W_{\tau_{0,v}^{\mathrm{alg}}}$ は $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})$ の代数的表現である.

c. 各 $W_{\tau_{0,v}^{\mathrm{sm}}}$ は $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})$ の表現で以下の二つのうちのどちらかと一致する.

  α. 階数 1 の自明表現 $\mathbf{1}$.

  β. $\mathrm{Ind}_I^{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})}\mathbf{1}/\{$ 定数関数 $\}$, $I := \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v}) \mid g \equiv \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right) \bmod \pi_v\}$.

同時固有関数 $f \in S_{\tau_0,\psi}(U,\mathcal{O})$ は $\otimes_{\mathcal{O}}\mathbf{F}$ しても 0 にならないものとし, 付随する極大イデアルを $\mathbf{m} \subset \mathbf{T}_{S,\mathcal{O}}^{\mathrm{univ}}$ と置く. このとき E を十分大きく取り換えれば, 下記のような条件を満たす表現 $\tau = (\tau, W_\tau)$ 及び零でない固有関数 $g \in S_{\tau,\psi}(U,\mathcal{O})_{\mathbf{m}}$ が存在する;

1. (τ, U, ψ) は *c1* 〜 *c3* を満たす.
2. $W_\tau = W_{\tau_0^{\mathrm{alg}}} \otimes_{\mathcal{O}} W_{\tau^{\mathrm{sm}}}$, $W_{\tau^{\mathrm{sm}}} = \otimes_{v|p,\mathcal{O}} W_{\tau_v^{\mathrm{sm}}}$ と書ける.
3. 各 $W_{\tau_v^{\mathrm{sm}}}$ は尖点的 *K-type* である.

Proof. $W_{\tau_v^{\mathrm{sm}}}$ の構成に補題 7 を使う. $W_{\tau_{0,v}^{\mathrm{sm}}}$ が条件 c-α のときは $i = 0$, 条件 c-β のときは $i = 1$ とすれば良い. 特に補題 7 の条件 3 より (τ, U, ψ) は c3 を満たす. 極大イデアル $\mathbf{m}$ は $S_{\tau_0,\psi}(U,\mathcal{O})$ の台に含まれているので補題 6 及び補題 7 の条件 1 より $S_{\tau,\psi}(U,\mathcal{O})$ の台にも含まれている. よって十分大きな E に取り換えれば $S_{\tau,\psi}(U,\mathcal{O})_{\mathbf{m}}$ は固有関数 g を含む. 各 $W_{\tau_v^{\mathrm{sm}}}$ が尖点的 K-type であるのは補題 7 の条件 2 より従う. □

2.2 底変換の議論の Kisin による修正

Kisin はある種の $R = T$ 定理を [K1, Theorem (3.4.11)] で示し, [K1, §3.5] で Galois 表現の保型性へ応用している. ここでは特に山下氏の記事 [Kisin の修正 Taylor-Wiles 系, 定理 4.1] で用いられている部分 [K1, Lemmas (3.5.2), (3.5.3)] を解説する. これは Skinner-Wiles の結果を適当に修正したものである.

まずは記号を復習しよう. §1.2.1 では総実体 F 上の新形式 f に付随する λ 進 Galois 表現 $\rho_{f,\lambda}$ を考えた. また $\bar{\rho}_{f,\lambda}$ でその剰余表現 $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{GL}_2(\overline{\mathbf{F}}_p)$ を表す. 新形式 f (に Jacquet-Langlands-清水の定理で対応する四元数環上の保型形式) が §2.1 で定義した空間 $S_{\tau,\psi}(U,\mathcal{O})$ に含まれているとする. ただし十分大きな p 進体 E の整数環を $\mathcal{O}$ と置いた. このとき F の素点からなる有限集合 S を, 無限素点, p を割る素点, 及び f のレベルを割る素点を全て含むように取れば, §2.1 で定義した Hecke 環 $\mathbf{T}_{S,\mathcal{O}}^{\mathrm{univ}}$ が $S_{\tau,\psi}(U,\mathcal{O})$ に作用している. ここでは更に f のレベルが p と互いに素だと仮定して, 拡大した Hecke 環 $\mathbf{T}_{S^p,\mathcal{O}}^{\mathrm{univ}} := \mathbf{T}_{S,\mathcal{O}}^{\mathrm{univ}}[T_v, S_v]_{v|p}$ を考えよう. なお §2 で使っている記号では p 上の素点 v に対す

る Hecke 作用素 T_v, S_v は次のように書ける; 今 $U = \prod_v U_v$ の $v \mid p$ 成分は $U_v = \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{F_v})$ であり, τ は $\prod_{v|p} U_v$ の W_τ への作用であった. これを自然に $\prod_{v|p} \mathrm{GL}_2(F_v)$ の $W_\tau \otimes_{\mathcal{O}} E$ への作用 $\tilde{\tau}$ へ拡張し, $u \in \mathrm{GL}_2(F_v) \cap M_2(\mathcal{O}_{F_v})$ の $f \in S_{\tau,\psi}(U,\mathcal{O})$ への滑らかな作用 u^{sm} を $u^{\mathrm{sm}}(f)(g) := \tilde{\tau}(u)f(gu)$ で定める. 特にこれは U_v $(v \mid p)$ 上自明な作用である. よって S_v, T_v に両側剰余類 $U\left(\begin{smallmatrix} \pi_v & 0 \\ 0 & \pi_v \end{smallmatrix}\right)U$, $U\left(\begin{smallmatrix} \pi_v & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)U$ を対応させ, それぞれの右剰余分解を用いて $S_{\tau,\psi}(U,\mathcal{O})$ への作用が定まる.

この拡大された Hecke 環 $\mathbf{T}^{\mathrm{univ}}_{S^p,\mathcal{O}}$ に対しても, §2.1 と同様に新形式 f に付随する極大イデアル $\mathbf{m}$ を定義する. 二つの新形式 f, g のレベルがともに p と互いに素で, なおかつ付随する $\mathbf{T}^{\mathrm{univ}}_{S^p,\mathcal{O}}$ の極大イデアルが一致するとき $f \sim g$ と書くことにする. なお $f \sim g$ であれば $\bar{\rho}_{f,\lambda} \sim \bar{\rho}_{g,\lambda}$, 即ちそれぞれの表現の半単純化 (semi-simplification) が同型であることが従う.

次の二つの補題は Skinner-Wiles の底変換の議論を少し修正して示される.

補題 8. *[K1, Lemma (3.5.2).]* 総実体 F 上の重さ 2 の尖点的 *Hilbert* 固有形式 f のレベルが p と互いに素であるとする. また f のレベルを割らない素点からなる有限集合 T を取る. このとき次の条件を満たす F の有限次総実可解拡大体 F' と F' 上の重さ 2 の尖点的 *Hilbert* 固有形式 g が存在する.

1. 全ての素点 $v \in T$ は F'/F で完全分解する.
2. 総実体 F の素点 v が f のレベルを割らなければ, 拡大体 F' の素点 $v' \mid v$ も g のレベルを割らない.
3. 固有形式 f を F' に底変換したものを f' と置くと $f' \sim g$ となる.
4. p を割らない F' の有限素点 v' で $\bar{\rho}_{f,\lambda}$ が不分岐であれば, 素点 v' は g のレベルを割らない.

Proof. Skinner-Wiles の主定理 (この記事の定理 2) より, 条件 1, 2, 4 及び $\bar{\rho}_{f,\lambda} \sim \bar{\rho}_{g,\lambda}$ を満たす F', g が得られる. 加えて条件 3 を保証するためには以下のように証明を修正すればよい; 記号は定理 2 の証明中に使ったものとする. まず Hecke 環 $\mathbf{T}$ は定義式 (32) 中の "f が通常形式のとき" で定める. 即ち p 上の Hecke 作用素 $t(v)$ $(v \mid p)$ まで考える. (なぜなら補題 8 の条件 3 は p 上の素点まで含めて Hecke 固有値の合同を意味するからである.) このとき f に付随する極大イデアル $\mathbf{m} \subset \mathbf{T} \otimes \mathcal{O}$ の生成元は

$$\{\widetilde{\lambda}, t(\mathfrak{q}) - c(\mathfrak{q}, f), s(\mathfrak{q}) - \chi_f(\mathfrak{q}), t(v) - c(v, f) : \mathfrak{q} \nmid \mathfrak{n}_f \mathfrak{r} \ell p,\ v|p\} \tag{42}$$

で与えられる. その他の部分は変更せずに証明できる. □

補題 9. *[K1, Lemma (3.5.3).]* 総実体 F は偶数次数とする. また F 上の重さ 2 の尖点的 *Hilbert* 固有形式 f を取り, そのレベルは p と互いに素であるとする. 総実体 F 上の有限素点で p 及び f のレベルを割らないものからなる有限集合 $\Sigma = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ を取り, 総実体からなる拡大の塔 $F = F_0 \subset F_1 \cdots \subset F_r$ が次の条件を満たしているとする;

a. 各 $i = 1, 2, \ldots, r$ に対して F_i/F_{i-1} は二次拡大であり, 更に $j = 1, 2, \ldots, r$ に対して

$$F_{i-1} \text{ の任意の素点 } w \mid v_j \text{ は } F_i/F_{i-1} \text{ で } \begin{cases} \text{惰性的 (inert) である} & i \neq j \text{ のとき}, \\ \text{完全分解している} & i = j \text{ のとき}. \end{cases}$$

b. 各 $v \in \Sigma$ に対して不分岐指標 $\bar{\gamma} : \mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v) \to \overline{\mathbf{F}}_p^\times$ が存在して $\bar{\rho}_{f,\lambda}|_{\mathrm{Gal}(\overline{F}_v/F_v)}$ は $\bar{\gamma}$ の $\bar{\gamma}(1)$ による拡大となっている.

このとき F の任意の有限素点 $\ell \notin \Sigma, \nmid p$ に対して以下の条件を満たす F_r 上の重さ 2 の尖点的 *Hilbert* 固有形式 g が存在する*;*

1. 固有形式 f のレベルを割らない F の 有限素点 $v \neq \ell$ 及び総実体 F_r の素点 $v' \mid v$ を取る. このとき g の生成する保型表現 π_g の v' 成分 $\pi_{g,v'}$ は

$$\begin{cases} \text{スペシャル表現であり, その法 (の指数) は 1 である.} & (v \in \Sigma \text{ のとき.}) \\ \text{不分岐表現である.} & (v \notin \Sigma \text{ のとき.}) \end{cases}$$

2. 固有形式 f を F_r に底変換したものを f' と置くと $f' \sim g$ となる.

Proof. 自然数 r に関する帰納法を使う. 即ち F の有限素点 $\ell \notin \Sigma, \nmid p$ を一つ取り $\Sigma_{r-1} := \{v_1, v_2, \ldots, v_{r-1}\}$ と置き, F_{r-1} 上のある尖点的 Hilbert 固有形式 g_{r-1} が 条件 1, 2 の (Σ, F_r) を (Σ_{r-1}, F_{r-1}) に取り換えたものを満たしていると仮定する. 試しに g_{r-1} をそのまま F_r 上に底変換したものを g' と置いてみる. F_r の素点 v', F_{r-1} の素点 v が $v' \mid v \mid v_r$ となっているとき $\pi_{g_{r-1},v}$ は不分岐表現であり, その底変換で得られる $\pi_{g',v'}$ がスペシャル表現である保証はない. よってこの素点 $v \mid v_r$ に関して議論し, 固有形式 g_{r-1} を取り替えなければならない. このための議論にはこれまでと同様に四元数環上の保型形式の合同を用いる. 特に補題 5 を用いたレベル上げの議論を修正して使えばよい. まず Jacquet-Langlands-清水対応で g_{r-1} と対応する関数 h_{r-1} が含まれる空間 $S_{\tau,\psi}(U,\mathcal{O})$ は以下のように得られる;

1. 総実体 F_{r-1} 上の四元数環 D は, 無限素点及び Σ_{r-1} の各元を割る素点でのみ分解するものを取る. また D の極大整環をひとつ固定して $\mathcal{O}_D$ と置く.
2. $(D \otimes_{F_{r-1}} \mathbf{A}_{F_{r-1}}^f)^\times$ の開コンパクト部分群 $U = \prod_v U_v$ は, F_{r-1} の有限素点 v が Σ_{r-1} の元の上にある場合, もしくは $v \nmid \ell$ で v が g_{r-1} のレベルを割らない場合には $U_v = (\mathcal{O}_D)_v^\times$ となるものを取る. 仮定 (40) を満たすように他の有限素点 v で U_v を十分小さくし, そして十分大きな p 進体 E の整数環 $\mathcal{O}$ を取れば (適切に τ, ψ を選ぶことによって) $h_{r-1} \in S_{\tau,\psi}(U,\mathcal{O})$ が得られる.

仮定 a より素点 v_r の上にある F_{r-1} の素点はただ一つである. これを $\tilde{v}_r$ と書くことにする. 今は固有形式 g_{r-1} の素点 $\tilde{v}_r$ におけるレベル上げの議論中であった. このために補題 2 の γ に相当する写像

$$i_{\tilde{v}_r} : S_{\tau,\psi}(U,A)^2 \to S_{\tau,\psi}(U',A), \qquad (f_1(z), f_2(z)) \mapsto f_1(z) + f_2(z\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi_{\tilde{v}_r} \end{smallmatrix}\right)) \tag{43}$$

を定義する. (A は $\mathcal{O}$ またはその剰余体 $\mathbf{F}$.) ただし新たに開コンパクト群 $U' := \prod_v U'_v$ を $v \neq \tilde{v}_r$ に対して $U'_v := U_v$, $v = \tilde{v}_r$ に対しては同一視 $(\mathcal{O}_D)_{\tilde{v}_r} = M_2(\mathcal{O}_{(F_{r-1})_{\tilde{v}_r}})$ を使って $U'_{\tilde{v}_r} := \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_{(F_{r-1})_{\tilde{v}_r}}) \mid g \equiv \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right) \bmod (\pi_{\tilde{v}_r})\}$ と定義する.

総実体 F_{r-1} の有限素点からなる有限集合 S を, 全ての無限素点, p を割る素点, 及び U_v が 極大コンパクト部分群とならない素点 v 全体の和集合とする. 更に g_{r-1} に付随す

る Hecke 環 $\mathbf{T}^{\text{univ}}_{S^p,\mathcal{O}}$ の極大イデアルを $\mathbf{m}$ と置く．このとき (38) と同様に次は単射となる [K1, Lemma 3.1.8];

$$i_{\tilde{v}_r} : S_{\tau,\psi}(U,\mathbf{F})^2_{\mathbf{m}} \hookrightarrow S_{\tau,\psi}(U',\mathbf{F})_{\mathbf{m}}. \tag{44}$$

よって補題 5 と同様の議論により [K1, Lemma 3.1.10, Corollary 3.1.11],

$$S_{\tau,\psi}(U',\mathcal{O})_{\mathbf{m}}/i_{\tilde{v}_r}(S_{\tau,\psi}(U,\mathcal{O})^2_{\mathbf{m}}) \tag{45}$$

は零でない自由 $\mathcal{O}$ 加群であることが証明できる．なおこの証明には仮定 b の局所・大域 Langlands 対応の互換性を使った言い換え

$$(T^2_{\tilde{v}_r} - (N(\tilde{v}_r)+1)^2\psi(\pi_{\tilde{v}_r}))S_{\tau,\psi}(U,\mathcal{O}) \subset \mathbf{m}S_{\tau,\psi}(U,\mathcal{O}) \tag{46}$$

を用いる．以上のことから固有関数 $h_r \in S_{\tau,\psi}(U',\mathcal{O})_{\mathbf{m}}$ で $i_{\tilde{v}_r}$ の像に入らないものが取れる．対応する F_{r-1} 上の固有形式を F_r に底変換したものを g と置けば, 条件を全て満たす固有形式を得る． □

参考文献

[C] H. Carayol, Sur les représentations l-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 19 (1986), 409-468.

[DN1] K. Doi, H. Naganuma, On the algebraic curves uniformized by arithmetical automorphic functions, Ann. of Math. 86, 449-460 (1967).

[DN2] K. Doi, H. Naganuma, On the functional equation of certain Dirichlet series, Inventiones Math. 9, 1-14 (1969).

[CDT] B. Conrad, F. Diamond, R. Taylor, Modularity of certain potentially Barsotti-Tate Galois representations, J. Amer. Math. Soc. 12(2) (1999), 521-567.

[De] P. Deligne, Formes modulaires et représentations de l-adiques, Seminaire Bourbaki, 1969, exp. no. 355, Lecture Notes in Math. 179, Springer, Berlin, 1971, 139-172.

[Di] F. Diamond, “The refined conjecture of Serre” in Elliptic Curves, Modular Forms, and Fermat’s Last Theorem (Hong Kong, 1993), Internat. Press, Cambridge, Mass., 1995, 22-37.

[F] K. Fujiwara, Deformation rings and Hecke rings in the totally real case, preprint.

[GK] P. Gérardin, P. Kutzko, Facteurs locaux pour $GL(2)$, Ann. Scient. de l’E.N.S. 13 (1980), 349-384.

[H1] H. Hida, On p-adic Hecke algebras for $GL2$ over totally real fields, Ann. of Math. (2) 128(2) (1988), 295-384

[H2] H. Hida, Control theorems for coherent sheaves on Shimura varieties of PEL-type, Journal of the Inst. of Math. Jussieu 1, 1-76, 2002.

[H3] H. Hida, p-adic Automorphic Forms on Shimura varieties, Springer Monographs in Mathematics (2004).

[J] F. Jarvis, Level lowering for modular mod l representations over totally real fields, Math. Ann. 313 (1999), 141-160.

[Kh] C. Khare, A local analysis of congruences in the $(p;p)$ case II, Invent. Math. 143 (2001), 129-155.

[Kh1] C. Khare, Serre's modularity conjecture: the level one case, Duke Math. J. 134 (2006), 534-567.

[KW2] C. Khare, Wintenberger, J.-P. Serre's modularity conjecture (I), preprint.

[KW3] C. Khare, Wintenberger, J.-P. Serre's modularity conjecture (II), preprint.

[K1] M. Kisin, Moduli of finite flat group schemes and modularity, to appear in Ann. of Math.

[L] R. Langlands. Base change for $GL(2)$, Ann. Math. Studies 96, Princeton (1980).

[Ra] A. Rajaei, On lowering the levels in modular mod l Galois representations of totally real fields, Ph.D. dissertation, Princeton Univ., Princeton, 1998.

[Ri] K. Ribet, On modular representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ arising from modular forms, Invent. Math. 100 (1990), 431-476.

[Sa1] H. Saito, Automorphic forms and algebraic extensions of number fields, Lectures in Math. 8, Kyoto Univ. (1975).

[Sa2] H. Saito, Automorphic forms and algebraic extensions of number fields II, J. Math. Kyoto Univ., 19, pp105-123 (1979).

[Se] J.-P. Serre, Sur les représentations modulaires de degré 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, Duke Math. J. 54 (1987), 179-230.

[Sh] G. Shimura, Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Forms, Kanô Memorial Lectures 1, Iwanami Shoten, Tokyo, Publ. Math. Soc. Japan 11, Princeton Univ. Press, Princeton, 1971.

[Shin1] T. Shintani, Two remarks on irreducible characters of finite general linear groups, J. Math. Society of Japan 28, pp396–414 (1976).

[Shin2] T. Shintani, On liftings of holomorphic cusp forms, Proc. Sympos. Pure Math., 33 part 2, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., pp97-110 (1979).

[SW1] C. Skinner, A. Wiles, Residually reducible representations and modular forms, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 89 (1999), 5-126.

[SW2] C. Skinner, A. Wiles, Nearly ordinary deformations of irreducible residual representations, Annales de la faculté des sciences de Toulouse Sér. 6, 10 no. 1 (2001), 185-215.

[T1] R. Taylor, On Galois representations associated to Hilbert modular forms, Invent. Math. 98 (1989), 265-280.

[T2] R. Taylor, On the meromorphic continuation of degree 2 L-functions, Documenta John Coates' Sixtieth Birthday (2006), 729-779.

[W1] A. Wiles, On ordinary λ-adic representations associated to modular forms, Invent. Math. 94 (1988), 529-573.

[W2] A. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's last theorem, Ann. of Math. (2) 141 (1995), 443-551.