p進多重ゼータ値, p進多重L値, 次元予想

2005年3月

東京大学大学院数理科学研究科　山下　剛 (Go YAMASHITA)
Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo

0 Introduction

本稿は, 短期共同研究「多重ゼータ値の研究」(2004年11月8日~11日, RIMS) における講演「p進多重ゼータ値, p進多重L値, 次元予想」の報告である. 講演では古庄氏の理論をColemanのp進積分論の復習から解説し, 筆者の最近の研究について触れた.

自然数 $k_1, \dots, k_{d-1} \geq 1$, $k_d \geq 2$ に対して無限和

$$\zeta(k_1, \dots, k_d) := \sum_{n_1 < \dots < n_d} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_d^{k_d}} (= \lim_{\mathbb{C} \ni z \to 1} \mathrm{Li}_{k_1, \dots, k_d}(z)) \in \mathbb{R}$$

は絶対収束し, 多重ゼータ値と言われる. ここで, $\mathrm{Li}_{k_1, \dots, k_d}(z) := \sum_{n_1 < \dots < n_d} \frac{z^{n_d}}{n_1^{k_1} \cdots n_d^{k_d}}$ は多重ポリログ関数.

多重ゼータ値の研究はEulerに始まり, Zagierを経て現在も多くの研究者に活発に研究されている対象である.

$(k_d, \zeta_d) \neq (1, 1)$ を満たす自然数 $k_1, \dots, k_d \geq 1$ と1のN乗根 $\zeta_1, \dots, \zeta_d$ に対して多重ゼータ値の変種である多重L値も次の絶対収束する無限和で定義される.

$$L(k_1, \dots, k_d; \zeta_1, \dots, \zeta_d) := \sum_{n_1 < \dots < n_d} \frac{\zeta_1^{-n_1} \zeta_2^{n_1 - n_2} \cdots \zeta_d^{n_{d-1} - n_d}}{n_1^{k_1} \cdots n_d^{k_d}} (= \lim_{\mathbb{C} \ni z \to 1} \mathrm{Li}_{k_1, \dots, k_d; \zeta_1, \dots, \zeta_d}(z)) \in \mathbb{C}.$$

ここで, $\mathrm{Li}_{k_1, \dots, k_d; \zeta_1, \dots, \zeta_d}(z) := \sum_{n_1 < \dots < n_d} \frac{\zeta_1^{-n_1} \zeta_2^{n_1 - n_2} \dots \zeta_d^{n_{d-1} - n_d} z^{n_d}}{n_1^{k_1} \cdots n_d^{k_d}}$ は捻り多重ポリログ関数.

我々はここで多重ゼータ値や多重L値のp進類似を考えたい. 無限和

$$\zeta(k_1, \dots, k_d) := \sum_{n_1 < \dots < n_d} \frac{1}{n_1^{k_1} \cdots n_d^{k_d}}$$

は p 進では収束しない. 一方多重ポリログ $\mathrm{Li}_{k_1,\dots,k_d}(z)$ は反復積分表示

$$\frac{d\mathrm{Li}_{k_1,\dots,k_d}(z)}{dz} = \begin{cases} \frac{1}{z}\mathrm{Li}_{k_1,\dots,k_d-1}(z) & \text{if } k_d > 1, \\ \frac{1}{1-z}\mathrm{Li}_{k_1,\dots,k_{d-1}}(z) & \text{if } k_d = 1, \text{and } d > 1, \\ \frac{1}{1-z} & \text{if } k_d = 1, \text{and } d = 1 \end{cases}$$

を持つ. 古庄氏は Coleman の p 進反復積分論を用いて上の反復積分表示の p 進類似として p 進多重ポリログ関数 $\mathrm{Li}^a_{k_1,\dots,k_d}(z)$ (ここで a は枝パラメーターを表す, 詳しくは後で) を定義し, p 進多重ゼータ値

$$\zeta_p(k_1,\dots,k_d) := \lim_{\mathbb{C}_p \ni z \to 1}{}' \mathrm{Li}_{k_1,\dots,k_d}(z) \in \mathbb{Q}_p$$

をその極限値として定義してその性質を調べた (cf. [Fu1][Fu2]). (ここで $\mathbb{C}_p$ は $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包の p 進完備化 . $\lim'$ の意味は後で.) 同様に捻り p 進多重ポリログ関数 $\mathrm{Li}^a_{k_1,\dots,k_d;\zeta_1,\dots,\zeta_d}(z)$ を用いて p 進多重 L 値

$$L_p(k_1,\dots,k_d;\zeta_1,\dots,\zeta_d) := \lim_{\mathbb{C}_p \ni z \to 1}{}' \mathrm{Li}^a_{k_1,\dots,k_d;\zeta_1,\dots,\zeta_d}(z) \in \mathbb{Q}_p(\mu_N)$$

$(p \nmid N)$ も定義できる. これらについて現在知られている事をこの小文で報告する.

1 章では Coleman の p 進反復積分論を復習する. 2 章では (捻り)p 進多重ポリログと p 進多重ゼータ値 (L 値) を定義する. 3 章では p 進 KZ 方程式と p 進 Drinfel'd associator について解説する. 4 章では p 進多重ゼータ値について知られている関係式を紹介する. 5 章では多重ポリログと p 進多重ポリログ, それらの変種に対する淡中圏解釈を解説する. 6 章では p 進多重ゼータ値 (L 値) 空間の次元の上からの評価について述べる. なお, この小文では証明までは紹介しない.

1 Coleman の p 進反復積分論

Coleman は Bloch の二重ログ関数とレギュレーターについての結果の p 進類似を考える研究の中で (曲線に対しての)p 進反復積分論を構築して p 進ポリログ関数を定義した (cf. [C]). この章では Coleman の p 進反復積分論を最小限復習する. 大切なところなので多少長くなるがページを割くことにする.

p 進積分論に必要な性質は次の 2 つである.

A 「一致の定理」が成り立つ. したがって, 解析接続の概念がある.

B 微分形式が必ず積分でき, それは定数倍を除いて一意的である.

Coleman は Tate の rigid 解析を使って (曲線に対しての) p 進反復積分論を構成した. Tate の rigid 解析についてはここでは復習しない . affinoid U に対して, $A(U) := \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ と置く . Tate の rigid 解析では上の A は成り立つが, B は一般に成り立たない (例えば,

局所座標で $t=0$ の点が抜けている時, dt/t は積分できない) ので, 以下では $A(U)$ を膨らませた環を定義して, 積分が必ずできるようにする．

X を $O_{\mathbb{C}_p}$ 上固有滑らかな曲線, $D \subset X$ を $O_{\mathbb{C}_p}$ 上étale な閉部分スキーム, $Y := X \setminus D$, $j : Y_{\overline{\mathbb{F}_p}} \hookrightarrow X_{\overline{\mathbb{F}_p}}$ とする．(ここで $O_{\mathbb{C}_p}$ は $\mathbb{C}_p$ の付値環.) $X_{\overline{\mathbb{F}_p}} \setminus Y_{\overline{\mathbb{F}_p}} = \{e_1, \ldots, e_s\}$ とする. $0 \leq r < 1$ に対して, $U_r := X(\mathbb{C}_p)^{\mathrm{an}} \setminus \cup_{i=1}^{s} D^+(\widetilde{e}_i, r)$ とする. ここで, $\widetilde{e}_i \in X(\mathbb{C}_p)$ は e_i の適当な持ち上げ, $D^+(\widetilde{e}_i, r)$ は $\widetilde{e}_i$ を中心とする半径 r の閉円盤. (後では $r \to 1$ を考えるので持ち上げの取り方は気にしなくてよい.) $S \subset X(\overline{\mathbb{F}_p})$ に対し, そのチューブ近傍を $]S[:= \mathrm{sp}^{-1}(S) \subset X(\mathbb{C}_p)$ と置く. ここで sp は特殊化写像 $X(\mathbb{C}_p) = X(O_{\mathbb{C}_p}) \overset{\text{reduction}}{\longrightarrow} X(\overline{\mathbb{F}_p})$. $a \in \mathbb{C}_p$ を固定し, $\log^a : \mathbb{C}_p^{\times} \to \mathbb{C}_p$ を $\log^a p = a$ となる p 進対数関数とする. ($\log x + \log y = \log xy$ の要請から p 進対数関数は $\log p$ での値を決めるごとに定まる.) この a を log の枝と言う. Coleman の積分論は log の枝を決めるごとに定まる.

[余談になるが, $\mathbb{C}$ 上での log は枝の数は可算 ($\mathbb{Z}$) だけであるが $\mathbb{C}_p$ では非可算 ($\mathbb{C}_p$) あるのでずいぶん事情が違うように思えるかもしれない. しかし, $\mathbb{C}_p$ での log の「枝」と呼んでいるものは「モノドロミー的なもの」から来ている枝ではないく, 「原点での接空間におけるベクトル」に対応して $\mathbb{C}_p$ だけあり, 今考えている意味では「モノドロミーはない」と考えられる. $\mathbb{C}$ 上でも接空間の 0 でないベクトルは $\mathbb{C}^{\times}$ だけあり, $\mathbb{C}_p$ 上でも $\mathbb{C}_p^{\times}$ が対応するが「モノドロミーはない」ことから $\mathbb{C}_p$ にまで延びている. log の枝が接ベクトルに対応していることは, $\mathbb{P}^1$ の 0 と 1 を結ぶ Besser の Frobenius 不変な道 (詳しくは後で) が log の枝のとり方に依らないが $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1\}$ の 0 と 1 を結ぶ Besser の Frobenius 不変な道が log の枝のとり方に依ることに対応している. また, 「モノドロミーがない」事は 3-cycle 関係式において「三角形」の各々の内角が「0 になる」ことや p 進では "円周率 π が 0 になる" ことに対応している. $\mathbb{C}_p$ ではなく Fontaine の p 進周期の環 B_{dR} を使えばきちんと「モノドロミー」を見ることができるようになるかもしれない (その時は枝の数は $\mathbb{Z}$ だけある事になる). p 進では良い還元を持つときには単連結になる (特に $\mathbb{P}^1$ 引く有限個の有理点は単連結である) 事とも比較せよ. (Coleman 積分論では良い還元を持つ時しか扱わない.)]

さて,

$$A^a_{\log}(U_x) := \begin{cases} A(]x[) & \text{if } x \in Y(\overline{\mathbb{F}_p}), \\ \lim_{r\to 1} A(]x[\cap U_r)[\log^a z_x] & \text{if } x \in \{e_1, \ldots, e_s\}, \end{cases}$$

$$\Omega^a_{\log}(U_x) := A^a_{\log}(U_x) dz_x$$

(ここで z_x は x の周りの局所座標 $z_x :]x[\cap Y(\mathbb{C}_p) \overset{\cong}{\longrightarrow} D^-(0,1)$) と置き,

$$A^a_{\mathrm{loc}} := \prod_{x \in X(\overline{\mathbb{F}_p})} A^a_{\log}(U_x),\ \Omega^a_{\mathrm{loc}} := \prod_{x \in X(\overline{\mathbb{F}_p})} \Omega^a_{\log}(U_x)$$

と定義する. これらは z_x の取り方には依存しない. 自然に微分 $d : A^a_{\mathrm{loc}} \to \Omega^a_{\mathrm{loc}}$ が定義される. 過収束関数のなす環を $A^{\dagger} := \Gamma(]Y_{\overline{\mathbb{F}_p}}[, j^{\dagger}\mathcal{O}_{]Y_{\overline{\mathbb{F}_p}}[})$ と置くと, A^a_{loc} と Ω^a_{loc} はそれぞれ $A^{\dagger}$ 代数, $A^{\dagger}$ 加群になる. $d : A^a_{\mathrm{loc}} \to \Omega^a_{\mathrm{loc}}$ は全射なので, 必ず積分はできるようになったが, 核は $\prod_{x \in X(\overline{\mathbb{F}_p})} \mathbb{C}_p$ であり, 解析接続もできない. そこで, 良い性質を持つように部

分代数 $A^a_{\mathrm{Col}} \subset A^a_{\mathrm{loc}}$ と部分加群 $\Omega^a_{\mathrm{Col}} \subset \Omega^a_{\mathrm{loc}}$ を以下で定義する. まず, 積分 $\int$ が満たして欲しい性質を述べる.

1. $d\int \omega = \omega$,
2. (Frobenius 不変性) $\int \phi^*\omega = \phi^* \int \omega$ (ϕ^* は Frobenius 準同型),
3. $\int dg = g + \text{const. for } g \in A^\dagger$.

従って, $P(t)$ を $\mathbb{C}_p$ 係数の多項式で $P(\phi^*)\omega$ が既に積分ができることが分かっている微分形式になれば, $P(\phi^*)\int\omega$ は定数を除いて定まる. さらに $P(t)$ が 1 の冪根を根に持たなければ, そこから $\int\omega$ も定数を除いて定まる. このように $d(A^\dagger)$ から出発して Frobenius 不変性を用いて積分できる微分形式を広げていくのが基本的なアイデアである. 積分が $\prod_{x\in X(\overline{\mathbb{F}_p})} \mathbb{C}_p$ を除いて定まるのではなく, 定数 $\mathbb{C}_p$ を除いて定まるように積分できる範囲を広げていくのに気をつける. $\int$ の範囲を広げていく詳しい議論は省略するが, 次のようにして **Coleman** 関数のなす環 A^a_{Col} と **Coleman**1 形式のなす加群 Ω^a_{Col} が定義される.

$$A^a_{\mathrm{Col}} := \cup_{n\geq 1} A^a_{\mathrm{Col}}(n),\ \Omega^a_{\mathrm{Col}} := \cup_{n\geq 0}\Omega^a_{\mathrm{Col}}(n),$$

$$A^a_{\mathrm{Col}}(n) := A^\dagger \int (\Omega^a_{\mathrm{Col}}(n-1)),$$

$$\Omega^a_{\mathrm{Col}}(n) := \begin{cases} A^a_{\mathrm{Col}}(n)\Omega^\dagger & \text{if } n \geq 1, \\ d(A^\dagger) & \text{if } n = 0. \end{cases}$$

ここで, $\Omega^\dagger := \Gamma(]Y_{\overline{\mathbb{F}_p}}[, j^\dagger\Omega_{]Y_{\overline{\mathbb{F}_p}}[})$. この時, 次の完全系列がある.

$$0 \to \mathbb{C}_p \to A^a_{\mathrm{Col}} \to \Omega^a_{\mathrm{Col}} \to 0.$$

つまり, Coleman 微分形式 $\omega \in \Omega^a_{\mathrm{Col}}$ は必ず積分でき, それは定数倍を除いて一意的である. このようにして, 最初の A と B を満たす p 進積分論が得られた.

2 (捻り)p進多重ポリログ, p進多重ゼータ値 (L値)

$a \in \mathbb{C}_p$ を固定する. この章では $\mathbb{U} := \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{0, 1, \infty\}$(多重ゼータ値の場合) あるいは $\mathbb{U}_N := \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{0, \infty\} \cup \mu_N$ ($p \nmid N$) (多重 L 値の場合) に対して Coleman 積分論を使って (捻り)p 進多重ポリログ, p 進多重ゼータ値 (L 値) を定義する. 多重 L 値の場合には p で割れない自然数 N と埋め込み $\mathbb{Q}_p(\mu_N) \hookrightarrow \mathbb{C}_p$ を固定する.

定義 2.1 *(古庄 [Fu1])* 自然数 $k_1, \ldots, k_d \geq 1$ に対して p 進多重ポリログ関数 $\mathrm{Li}^a_{k_1,\ldots,k_d}(z) \in A^a_{\mathrm{Col}} = A^a_{\mathrm{Col}}(\mathbb{U})$ を次のように定義する.

$$\mathrm{Li}^a_{k_1,\ldots,k_d}(z) := \begin{cases} \int_0^z \frac{1}{z}\mathrm{Li}^a_{k_1,\ldots,k_d-1}(z)dz & \textit{if } k_d > 1, \\ \int_0^z \frac{1}{1-z}\mathrm{Li}^a_{k_1,\ldots,k_{d-1}}(z)dz & \textit{if } k_d = 1, \textit{and } d > 1, \\ \int_0^z \frac{1}{1-z}dz := -\log^a(1-z) & \textit{if } k_d = 1, \textit{and } d = 1. \end{cases}$$

定義 2.2 同様に自然数 $k_1,\dots,k_d \geq 1$ と 1 の N 乗根 $\zeta_1,\dots,\zeta_d$ に対して捻り p 進多重ポリログ関数 $\mathrm{Li}^a_{k_1,\dots,k_d;\zeta_1,\dots,\zeta_d}(z) \in A^a_{\mathrm{Col}} = A^a_{\mathrm{Col}}(\mathbb{U}_N)$ を次のように定義する *([Y])*.

$$\mathrm{Li}^a_{k_1,\dots,k_d;\zeta_1,\dots,\zeta_d}(z) := \begin{cases} \int_0^z \frac{1}{z}\mathrm{Li}^a_{k_1,\dots,k_d-1;\zeta_1,\dots,\zeta_d}(z)dz & if\ k_d > 1, \\ \int_0^z \frac{1}{\zeta_d - z}\mathrm{Li}^a_{k_1,\dots,k_{d-1};\zeta_1,\dots,\zeta_{d-1}}(z)dz & if\ k_d = 1, and\ d > 1, \\ \int_0^z \frac{1}{\zeta_1 - z}dz := -\log^a(\zeta_1 - z) & if\ k_d = 1, and\ d = 1. \end{cases}$$

ここで d を深さ, $k_1 + \cdots + k_d$ を重さという. $\mathrm{Li}^a_{k_1,\dots,k_d;\zeta_1,\dots,\zeta_d}(z)$ が $\mathrm{Li}^a_{k_1,\dots,k_d;\zeta_1,\dots,\zeta_d}(z)|_{]0[} \in A(]0[)$, $\mathrm{Li}^a_{k_1,\dots,k_d;\zeta_1,\dots,\zeta_d}(z)|_{]\zeta[} \in A(]\zeta[)[\log^a(z-\zeta)]$ $(\zeta \in \mu_N)$, $\mathrm{Li}^a_{k_1,\dots,k_d;\zeta_1,\dots,\zeta_d}(z)|_{]\infty[} \in A(]\infty[)[\log^a(1/t)]$ を満たす事も定義からすぐに分かる.

定理 2.1 *(*古庄 *[Fu1])* $\lim'_{\mathbb{C}_p \ni z \to 1} \mathrm{Li}^a_{k_1,\dots,k_d}(z)$ が収束するか否かは a に依らない. さらに, 収束するときは収束値も a に依らない. ここで, a に収束する数列 $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ で $\mathbb{Q}_p(z_1, z_2, \dots)/\mathbb{Q}_p$ の分岐指数が有限になるような任意の数列に対して $\lim_{i\to\infty} f(z_i)$ が存在して $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ に依らない時, それを $\lim'_{z\to a} f(z)$ と書く.

$\lim_{\mathbb{C}_p \ni z \to 1}{}'\mathrm{Li}^a_{k_1,\dots,k_d}(z)$ についても同様の事が成立する ([Y]).

定義 2.3 *(*古庄 *[Fu1])* $\lim'_{\mathbb{C}_p \ni z \to 1} \mathrm{Li}^a_{k_1,\dots,k_d}(z)$ が収束する時, その値 $\zeta_p(k_1,\dots,k_d)$ を p 進多重ゼータ値と呼ぶ.

同様に, $\lim'_{\mathbb{C}_p \ni z \to 1} \mathrm{Li}^a_{k_1,\dots,k_d;\zeta_1,\dots,\zeta_d}(z)$ が収束する時, その値 $L_p(k_1,\dots,k_d)$ を p 進多重 L 値と呼ぶ ([Y]).

定理 2.2 *(*古庄 *[Fu1])* $k_d > 1$ の時, $\lim'_{\mathbb{C}_p \ni z \to 1} \mathrm{Li}^a_{k_1,\dots,k_d}(z)$ は収束する.

注意 $k_d = 1$ であっても収束する事もある. その時, 収束値は正規化された p 進多重ゼータ値 *(*後述*)* になる. 特に, それは同じ重さの p 進多重ゼータ値の線型和で表される *([Fu1])*.

p 進多重 L 値に対しても, $(k_d, \zeta_d) \neq (1,1)$ の時, $\lim'_{\mathbb{C}_p \ni z \to 1} \mathrm{Li}^a_{k_1,\dots,k_d;\zeta_1,\dots,\zeta_d}(z)$ は収束する ([Y]).

例 2.3 *(Coleman)* $n > 1$ に対して

$$\zeta_p(n) = \frac{p^n}{p^n - 1} L_p(n, \omega^{1-n}).$$

ここで L_p は久保田-*Leopoldt* の p 進 L 関数, ω は *Teichmuüller* 指標. 特に, $n \geq 1$ に対して, $\zeta_p(2n) = 0$. 久保田-*Leopoldt* の p 進 L 関数は負の整数点を p 進補間して得られる関数であり, 上の p 進ポリログと p 進 L 関数の比較は正の整数点でなので, これによる $\zeta_p(2n) = 0$ の証明はあまり直接的ではない. 古庄氏は 2-,3-*cycle* 関係式から $\zeta_p(2n) = 0$ を導き出してもいる. これは 3-*cycle* 関係式を導くときの「三角形の内角」が「0 になる」事からきている. またこの事実は *"*p 進では π^2 が 0 になる*"* とも言われる.

奇数での値は難しい. 実際, $n \geq 1$ に対して $\zeta_p(2n+1) \neq 0 \Leftrightarrow L_p(2n+1, \omega^{-2n}) \neq 0 \Leftrightarrow H^2(\mathbb{Z}[1/p], \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(-n)) = 0$ (高次 *Leopoldt* 予想). これは p が正則な素数の時か n が $p-1$ で割り切れる時には成立する事が知られているが, 一般には知られていない.

定理 2.4 (古庄 *[Fu1]*) $\zeta_p(k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Q}_p$.

同様に $L_p(k_1, \ldots, k_d; \zeta_1, \ldots, \zeta_d) \in \mathbb{Q}_p(\mu_N)$ ([Y]).

問い 2.5 (古庄) いつ $\zeta_p(k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}_p$ になるか？

この問いについては $\zeta_p(2n), \zeta_p(2n, \ldots, 2n), \zeta_p(3, 1, \ldots, 3, 1)$ などの 0 になる場合以外にまだ何も分かっていない. 同様にいつ $L_p(k_1, \ldots, k_d; \zeta_1, \ldots, \zeta_d) \in \mathbb{Z}_p[\mu_N]$ になるか？という問いも考えられる.

さて, $w > 0$ に対して $Z_w^p[N] \subset \mathbb{Q}_p$ を次のように定義する.

$$Z_w^p[N] := \left\langle L_p(k_1, \ldots, k_d; \zeta_1, \ldots, \zeta_d) \;\middle|\; \begin{array}{l} d \geq 1, k_i \geq 1, \zeta_i \in \mu_N \text{ for } i = 1, \ldots, d, \\ k_1 + \cdots + k_d = w, (k_d, \zeta_d) \neq (1,1) \end{array} \right\rangle_{\mathbb{Q}},$$

($L_p(k_1, \ldots, k_d; \zeta_1, \ldots, \zeta_d)$ たちで生成される $\mathbb{Q}$ ベクトル空間) とおき, $Z_0^p[N] := \mathbb{Q}$ とおく. $Z_\bullet^p[N] := \oplus_w Z_w^p[N]$(形式的直和) とおく. $Z_w^p := Z_w^p[1]$, $Z_\bullet^p := Z_\bullet^p[1]$ とおく. Z_w^p (resp. $Z_w^p[N]$) を重さ w の p 進多重ゼータ値空間 (resp. p 進多重 L 値空間) と呼ぶ. これらの空間の次元に関しては 6 章で述べる.

3 p 進 KZ 方程式, p 進 Drinfel'd associator

Drinfel'd associator は [Dr] において擬テンソル圏 (あるいは組み紐テンソル圏) の結合制限 (associativity constraint) を表すものとして導入され, Drinfel'd はすべての量子群の表現は KZ 方程式の解のモノドロミーから構成されるという河野の定理に見通しの良い証明を与えた。さらに Drinfel'd は単位元と結合制限と可換制限 (commutativity constraint) たちが満たすべき五角形公理, 六角形公理 $(+\alpha)$ から $\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群と深い関係のある Grothendieck-Teichmüller 群を定義して考察した. (五角形公理, 六角形公理 $(+\alpha)$ やこれらを見易く変形した形の関係式を associator 関係式, あるいは 2-,3-,5-cycle 関係式と呼ぶ.)

この章では p 進 KZ 方程式, p 進 Drinfel'd associator について述べる. 擬テンソル圏の話はここでは出さない.

A, B を変数に持つ $\mathbb{C}_p$ 係数の非可換形式的冪級数環を $\mathbb{C}_p\langle\langle A, B\rangle\rangle$ で表す.

定義 3.1 (古庄 *[Fu1]*) $\mathbb{C}_p\langle\langle A, B\rangle\rangle$ に値を持つ p 進解析関数 $G(z)$ についての次の p 進微分方程式を p 進 **KZ** 方程式とよぶ.

$$\frac{dG}{dz}(z) = \left(\frac{A}{z} + \frac{B}{z-1}\right) G(z),$$

$z \in \mathbb{U}$. ここで $\mathbb{C}_p\langle\langle A, B\rangle\rangle$ に値を持つ関数が p 進解析関数であるとは, A, B からなる任意の語の係数が p 進解析関数である時にいう.

同様に多重 L 値の時には $\mathbb{C}_p\langle\langle A, \{B_\zeta\}_\zeta\rangle\rangle$ に値を持つ関数 $G(z)$ $(z \in \mathbb{U}_N)$ に対して

$$\frac{dG}{dz}(z) = \left(\frac{A}{z} + \sum_{\zeta \in \mu_N} \frac{B_\zeta}{z - \zeta}\right) G(z),$$

を考える ([Y]).

定理 3.1 *(古庄 [Fu1])* p 進 KZ 方程式の解 $G_0^a(z)(resp.\ G_1^a(z)) \in A^a_{\mathrm{Col}}\langle\langle A, B\rangle\rangle$ で境界条件

$$G_0^a(z) \approx z^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\log^a zA)^n \quad (z \to 0),$$

$$(resp.\ G_1^a(z) \approx (1-z)^B \quad (z \to 1)\ ),$$

を満たすものがただ 1 つ存在する. ここで $G_0^a(z) \approx z^A$ $(z \to 0)$ は $G_0^a(z)z^{-A}|_{]0[}$ が $A(]0[)\langle\langle A, B\rangle\rangle A + A(]0[)\langle\langle A, B\rangle\rangle B$ に入り $z = 0$ で値が 1 になる事を意味する. *($G_1^a(z) \approx (1-z)^B$ $(z \to 1)$ も同様.)* *(ここで z^A は $\log$ の枝のとり方に依る事に注意.)*

p 進多重 L 値の場合も同様の結果が成立する ([Y]).

定理 3.2 *(古庄 [Fu1])* $\Phi^p_{\mathrm{KZ}}(A, B) := G_1^a(z)^{-1}G_0^a(z)$ は z, a に依らず, $\mathbb{C}_p\langle\langle A, B\rangle\rangle^\times$ の元を与える.

p 進多重 L 値の場合も同様の結果が成立する ([Y]).

定義 3.2 *(古庄 [Fu1])* $\Phi^p_{\mathrm{KZ}}(A, B) \in \mathbb{C}_p\langle\langle A, B\rangle\rangle^\times$ を p 進 **Drinfel'd associator** と呼ぶ.

p 進多重 L 値の場合も同様に p 進 Drinfel'd associator $\Phi^p_{\mathrm{KZ}}(A, \{B_\zeta\}_\zeta)$ を定義する ([Y]).

定理 3.3 *(明示公式, 古庄 [Fu1])* $\Phi^p_{\mathrm{KZ}}(A, B) = 1 + \sum_W I_p(W)W$ とおく. ここで W は A, B から作られる語全体を走る. $W = B^r V A^s$, $V \in A\mathbb{C}_p\langle\langle A, B\rangle\rangle B$ と書く時,

$$I_p(W) = (-1)^{\mathrm{depth}(W)} \sum_{0 \le a \le r, 0 \le b \le s} (-1)^{a+b} Z_p(f(B^a \circ B^{r-a} B A^{s-b} \circ A^b))$$

が成立する. ここで f は合成 $\mathbb{C}_p\langle\langle A, B\rangle\rangle \twoheadrightarrow \mathbb{C}_p\langle\langle A, B\rangle\rangle/(B\mathbb{C}_p\langle\langle A, B\rangle\rangle + \mathbb{C}_p\langle\langle A, B\rangle\rangle A) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}_p \cdot 1 + A\mathbb{C}_p\langle\langle A, B\rangle\rangle B \hookrightarrow \mathbb{C}_p\langle\langle A, B\rangle\rangle$ で定義され, $\circ$ はシャッフル積を意味し, $Z_p(W)$ は $Z_p(A^{k_d-1}B \cdots A^{k_1-1}B) = \zeta_p(k_1, \ldots, k_d)$ を線型に $\mathbb{C}_p \cdot 1 + A\mathbb{C}_p\langle\langle A, B\rangle\rangle B$ に延ばしたものである. 特に, $W \in A\mathbb{C}_p\langle\langle A, B\rangle\rangle B$ の時, $I_p(W) = (-1)^{\mathrm{depth}(W)} Z_p(W)$ が成立する.

p 進多重 L 値の場合も同様の結果が成立する ([Y]).

一般に $k_d = 1$ の時でも $(-1)^{\mathrm{depth}(W)} I_p(A^{k_d-1}B \cdots A^{k_1-1}B)$ は定義されていて, この値を正規化された p 進多重ゼータ値と呼ぶ. 特に, 正規化された p 進多重ゼータ値は同じ

重さの p 進多重ゼータ値による線型結合で表される ([Fu1]). また, $\lim'_{\mathbb{C}_p \ni z \to 1} \mathrm{Li}^a_{k_1,\dots,k_d}(z)$ は $k_d = 1$ でも収束する事があると前節で述べたが, 収束する時その値は正規化された p 進多重ゼータ値になることも知られている ([Fu1]). 特に, Z^p_w の定義を

$$Z^p_w := \langle \zeta_p(k_1,\dots,k_d) \mid d \geq 1, k_1,\dots,k_d \geq 1, \lim_{\mathbb{C}_p \ni z \to 1} {}'\mathrm{Li}^a_{k_1,\dots,k_d}(z) \text{ は収束する} \rangle_{\mathbb{Q}},$$

としても Z^p_w は以前と同じものになる. 同様の事は p 進多重 L 値の場合も成立する ([Y]).

$\mathbb{C}_p$ 代数射 $\Delta : \mathbb{C}_p\langle\langle A,B\rangle\rangle \to \mathbb{C}_p\langle\langle A,B\rangle\rangle \hat{\otimes} \mathbb{C}_p\langle\langle A,B\rangle\rangle$ を $\Delta(A) = A \otimes 1 + 1 \otimes A$, $\Delta(B) = B \otimes 1 + 1 \otimes B$ により定める.

定理 3.4 $\Delta(\Phi^p_{\mathrm{KZ}}) = \Phi^p_{\mathrm{KZ}} \hat{\otimes} \Phi^p_{\mathrm{KZ}}$ が成立する.

系 3.5 *(積分シャッフル積)* $W, W' \in A\mathbb{C}_p\langle\langle A,B\rangle\rangle B$ に対して

$$Z_p(W) \cdot Z_p(W') = Z_p(W \circ W')$$

が成立する. 特に, $Z^p_\bullet$ は次数付き代数になる, すなわち, $Z^p_w \cdot Z^p_{w'} \subset Z^p_{w+w'}$ が成立する.

p 進多重 L 値の場合も同様に $\Delta(\Phi^p_{\mathrm{KZ}}) = \Phi^p_{\mathrm{KZ}} \hat{\otimes} \Phi^p_{\mathrm{KZ}}$, $L_p(W) \cdot L_p(W') = L_p(W \circ W')$, $Z^p_w[N] \cdot Z^p_{w'}[N] \subset Z^p_{w+w'}[N]$ が成立する ([Y]).

$G^a_0(z)$ についての明示公式や $z \leftrightarrow 1-z$ についての関数等式もあるが, ここでは省略する (cf. [Fu1]).

4 p 進多重ゼータ値 (L 値) 間の関係式

多重ゼータ値には $\zeta(1,2) = \zeta(3)$ のような関係式が膨大にあり, 多重ゼータ値の研究はこのような関係式を中心になされているように思える. これらの関係式は超幾何微分方程式, 擬テンソル圏 (あるいは組み紐テンソル圏) と擬三角擬 Hopf 量子化普遍包絡代数 (quasi-triangular quasi-Hopf quantized universal envelopping algebra) の表現, 組み紐の量子不変量, 可解格子模型, 曲線のモヂュライ空間, 混合 Tate モティーフの圏などと関係して非常に面白い研究対象である.

この章では p 進多重ゼータ値について知られている関係式を紹介する.

定理 4.1 *(二重シャッフル関係式, Besser-古庄, [BF])* $W, W' \in A\mathbb{C}_p\langle\langle A,B\rangle\rangle B$ に対して $Z_p(W * W') = Z_p(W)Z_p(W') = Z_p(W \circ W')$ が成立する. ここで $*$ は級数 *(あるいは調和)* シャッフル積を意味する.

注意　積分シャッフル積については前節で触れた. 級数 *(あるいは調和)* シャッフル積については p 進多重ゼータ値では単純な無限級数表示がないので非自明である.

注意　寺杣氏の *[T2]* における主結果を p 進でも同様の手法で証明できるように思われる. その時, 次に紹介する *cycle* 関係式から二重シャッフル関係式が導かれ上の定理の別証明になるのではないかと思われる. またこの手法だと, 正規化された二重シャッフル関係式も証明されるのではないかと思われる.

p 進多重 L 値について同様の結果はまだ知られていない.

定理 4.2 *(古庄)* $\Phi^p_{\mathrm{KZ}}(A,B)$ は 2-,3-,5-$cycle$ 関係式を満たす. *(詳しい式はここでは触れないことにする.)*

注意 2-$cycle$ 関係式は $\mathbb{U}$ の $z \leftrightarrow 1-z$ の対称性, 3-$cycle$ 関係式は $\mathbb{U}$ の $z \mapsto \frac{1}{1-z} \mapsto 1-\frac{1}{z} \mapsto z$ の対称性 *(*前の 2 つの写像で 0,1,∞ はそれぞれ 1,∞,0 に移り ∞,0,1 に移る*)* からでてくる. $\mathbb{U}$ は 4 点付き種数 0 の曲線のモヂュライ空間であり, 5 点付き種数 0 の曲線のモヂュライ空間の境界に 10 通りの入り方をして 5 角形が 12 個できる. この 5 角形の対称性から 5-$cycle$ 関係式がでてくる.

注意 p 進多重 L 値については, $\mathbb{U}_N(N>1)$ には $z \leftrightarrow 1-z$ のような対称性や $z \mapsto \frac{1}{1-z} \mapsto 1-\frac{1}{z} \mapsto z$ のような対称性は無いので単純な意味の 2-,3-$cycle$ 関係式の類似は考えられない. $\mathbb{U}_N$ の $z \leftrightarrow \frac{1}{z}$ による対称性に対応する関係式なら示されている *([Y])*. $1 \mapsto \zeta_N \mapsto \zeta_N^2 \mapsto \cdots \mapsto \zeta_N^{N-1} \mapsto 1$ の対称性に対応する関係式もでてくると思われる. また $N=4$ の場合は $\{0,1,i,-1,-i,\infty\}$ が正 8 面体をなすという特殊な対称性をもつので, それに対応する $N=4$ に特有の関係式も出てくると思われる. これらはいい練習問題だと思う. また $\mathbb{U}_N(N>1)$ が曲線のモヂュライの解釈があるかどうか筆者は知らないので, 5-$cycle$ 関係式の類似の関係式の可能性も筆者はよく分からない.

上の定理により $\mathrm{Grothendieck\text{-}Teichm\ddot{u}ller}$ 群との関係で副有限側 $(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \overset{\widehat{\Phi}}{\hookrightarrow} \widehat{\mathrm{GT}})$ と ℓ 進 Galois 側 $(\underline{\mathrm{Gal}^{(\ell)}_{\mathbb{Q}}}(\mathbb{Q}) \overset{\Phi^{(\ell)}_{\mathbb{Q}}}{\hookrightarrow} \underline{\mathrm{GT}_1}(\mathbb{Q}))$ と Hodge 側 $(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\text{-alg.}}(Z_\bullet/\pi^2,\mathbb{Q}) \overset{\Phi_{\mathrm{KZ}}}{\hookrightarrow} \underline{\mathrm{GRT}_1}(\mathbb{Q}))$ に対して, crystalline 側 $(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}\text{-alg.}}(Z_\bullet,\mathbb{Q}) \overset{\Phi^p_{\mathrm{KZ}}}{\hookrightarrow} \underline{\mathrm{GRT}_1}(\mathbb{Q}))$ ができることになる (古庄). 詳しい説明はここではしない.

余談になるが 2-,3-,5-cycle 関係式は最初 $\mathrm{Drinfel'd}$ により擬テンソル圏の結合制限と可換制限 $(+\alpha)$ が満たすべき以下の可換図式 $(+\alpha)$ を変形したものであった.

$$\begin{array}{ccccc}
((V_1\otimes V_2)\otimes V_3)\otimes V_4 & \xrightarrow[\cong]{\Phi_{1,2,3}\otimes \mathrm{id}_4} & (V_1\otimes(V_2\otimes V_3))\otimes V_4 & \xrightarrow[\cong]{\Phi_{1,2\otimes 3,4}} & V_1\otimes((V_2\otimes V_3)\otimes V_4) \\
{\scriptstyle \Phi_{1\otimes 2,3,4}}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & & \nearrow{\scriptstyle \cong}{\scriptstyle \mathrm{id}_1\otimes\Phi_{2,3,4}} & \\
(V_1\otimes V_2)\otimes(V_3\otimes V_4) & & \xrightarrow[\Phi_{1,2,3\otimes 4}]{\cong} & & V_1\otimes(V_2\otimes(V_3\otimes V_4)),
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
(V_1\otimes V_2)\otimes V_3 & \xrightarrow[\cong]{R_{1,2}\otimes \mathrm{id}_3} & (V_2\otimes V_1)\otimes V_3 & \xrightarrow[\cong]{\Phi_{2,1,3}} & V_2\otimes(V_1\otimes V_3) \\
{\scriptstyle \Phi_{1,2,3}}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & & & {\scriptstyle \mathrm{id}_2\otimes R_{1,3}}\downarrow{\scriptstyle \cong} \\
V_1\otimes(V_2\otimes V_3) & \xrightarrow[R_{1,2\otimes 3}]{\cong} & (V_2\otimes V_3)\otimes V_1 & \xrightarrow[\Phi_{2,3,1}]{\cong} & V_2\otimes(V_3\otimes V_1),
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
(V_1\otimes V_2)\otimes V_3 & \xrightarrow[\cong]{R_{1\otimes 2,3}} & V_3\otimes(V_1\otimes V_2) & \xrightarrow[\cong]{\Phi^{-1}_{1,2,3}} & (V_3\otimes V_1)\otimes V_2 \\
{\scriptstyle \Phi^{-1}_{1,2,3}}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & & & {\scriptstyle \cong}\downarrow{\scriptstyle R_{3,1}\otimes \mathrm{id}_2} \\
V_1\otimes(V_2\otimes V_3) & \xrightarrow[\mathrm{id}_1\otimes R_{2,3}]{\cong} & V_1\otimes(V_3\otimes V_2) & \xrightarrow[\Phi^{-1}_{1,3,2}]{\cong} & (V_1\otimes V_3)\otimes V_2.
\end{array}$$

ここで R は可解格子模型における研究で R 行列として最初に発見された. また, これらの関係式から組み紐や可解格子模型における Yang-Baxter 方程式も出てくる. このような擬テンソル圏の視点も大切である. 詳しい説明はここではしない.

話を戻して, p 進多重ゼータ値の関係式について, 次の予想がある.

予想 **4.3** *(古庄)* p 進多重ゼータ値のすべての関係式は 2-,3-,5-$cycle$ 関係式から導かれるだろう.

予想 **4.4** *(等圧予想, 古庄)* p 進多重ゼータ値のすべての関係式は同じ重さの p 進多重ゼータ値の関係式の一次結合だろう. 特に, 形式的直和 $Z^p_\bullet := \oplus_w Z^p_w$ は $\mathbb{Q}_p$ の中で考えても直和になっているだろう.

p 進多重 L 値についてもすべての関係式は同じ重さの p 進多重 L 値の関係式の一次結合であるだろう (Y.) と予想されている ([Y]).

5 淡中圏解釈と多重ポリログ (p 進多重ポリログ) の変種

この章では多重ポリログと p 進多重ポリログの淡中圏解釈について述べる. この章の内容は古庄氏の報告集の記事 [Fu3] に多くを依拠している.

まず, Bloch-Zagier の $\mathbb{C}$ 上のポリログの変種について復習する. 奇数 (resp. 偶数)$k \geq 1$ に対して

$$P_k(z) := \mathrm{Re}(\text{resp. } \mathrm{Im}) \left(\sum_{a=0}^{k-1} \frac{B_a}{a!} (\log|z|^2)^a \mathrm{Li}_{k-a}(z) \right)$$

とおく. ここで B_a は Bernouilli 数, すなわち $\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$. 例えば, $P_1(z) = -\log|1-z|$, $P_2(z) = \mathrm{Im}(\mathrm{Li}_2(z)) + \log|z|\mathrm{arg}(1-z)$ である. これらはモノドロミーが無い. すなわち $\mathbb{U}(\mathbb{C})$ 上で単価関数である. (例えば, $P_2(z)$ は z が 1 の周りを反時計回りに 1 回まわると, 値は $\mathrm{Im}(\mathrm{Li}_2(z) + 2\pi i \log z) + \log|z|(\arg(1-z) - 2\pi) = \mathrm{Im}(\mathrm{Li}_2(z)) + \log|z|\mathrm{arg}(1-z)$ と変わらない.) このポリログの変種は二重ログ関数の時に Bloch によりレギュレーターの計算に使われ様々な性質が研究された. その後 Zagier による Zagier 予想の定式化にもこのポリログの変種が使われ. Beilinson-Deligne がポリログの変種の Hodge 理論的解釈を与えた.

さて, 古庄氏は $\mathbb{C}$ 上の多重ポリログの単価な変種と p 進多重ポリログの過収束な変種を淡中圏解釈の考察から作った.

$\mathbb{U} := \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}} - \{0, 1, \infty\}$ とおく. 接基点 $\overrightarrow{01}$ についてはここでは復習しない.

まず $\mathbb{C}$ 上の話から始める. $z \in \mathbb{U}(\mathbb{C})$ を固定する. $\mathbb{U}(\mathbb{C})$ 上の冪単局所系のなす淡中圏に対し $\overrightarrow{01}, z$ に対応するファイバー関手間の同型のなす亜群を表現する $\mathbb{Q}$ 上の副冪単亜群を $\pi_1^{\mathrm{B}}(\mathbb{U}(\mathbb{C}); \overrightarrow{01}, z)$ と書き $\mathbb{U}(\mathbb{C})$ の**Betti** 冪単基本亜群という. 同様に, $\mathbb{U}$ 上の冪単可積分接続付き連接 $\mathcal{O}_{\mathbb{U}}$ 加群のなす淡中圏に対し $\overrightarrow{01}, z$ に対応するファイバー関手間の同型のなす亜群を表現する $\mathbb{Q}$ 上の副冪単亜群を $\pi_1^{\mathrm{dR}}(\mathbb{U}/\mathbb{Q}; \overrightarrow{01}, z)$ と書き $\mathbb{U}$ の**de Rham** 冪単基本亜群という. $\pi_1^{\mathrm{B}}(\mathbb{U}(\mathbb{C}), \overrightarrow{01}) := \pi_1^{\mathrm{B}}(\mathbb{U}(\mathbb{C}); \overrightarrow{01}, \overrightarrow{01})$, $\pi_1^{\mathrm{dR}}(\mathbb{U}/\mathbb{Q}, \overrightarrow{01}) := \pi_1^{\mathrm{dR}}(\mathbb{U}/\mathbb{Q}; \overrightarrow{01}, \overrightarrow{01})$

とおく. $\overrightarrow{01}$ と z をつなぐ $\mathbb{U}(\mathbb{C})$ 上の位相的な道 b_z を 1 つ選ぶ. b_z は $\pi_1^{\mathrm{B}}(\mathbb{U}(\mathbb{C});\overrightarrow{01},z)$ の元と思える. また, $H^1(\mathbb{U},\mathcal{O}_{\mathbb{U}})=0$ なので $\pi_1^{\mathrm{dR}}(\mathbb{U}/\mathbb{Q},\overrightarrow{01})$-torsor はすべて自明になるので $\pi_1^{\mathrm{dR}}(\mathbb{U}/\mathbb{Q};\overrightarrow{01},z)$ には標準的な単位元 d_z がある. 同様に $\pi_1^{\mathrm{dR}}(\mathbb{U}/\mathbb{Q};\overrightarrow{01},\overline{z})$ にも標準的な単位元 $d_{\overline{z}}$ がある. ここで $\overline{z}$ は z の複素共役.

複素共役が誘導する同型 $\pi_1^{\mathrm{B}}(\mathbb{U}(\mathbb{C});\overrightarrow{01},z)\xrightarrow{\cong}\pi_1^{\mathrm{B}}(\mathbb{U}(\mathbb{C});\overrightarrow{01},\overline{z})$ の逆写像を ϕ_∞ と書く. 今, 比較同型

$$\pi_1^{\mathrm{B}}(\mathbb{U}(\mathbb{C});\overrightarrow{01},z)(\mathbb{C})\cong\pi_1^{\mathrm{dR}}(\mathbb{U}/\mathbb{Q};\overrightarrow{01},z)(\mathbb{C})$$

により b_z を $\pi_1^{\mathrm{dR}}(\mathbb{U}/\mathbb{Q};\overrightarrow{01},z)(\mathbb{C})$ の元とみなす. また同様に比較同型により ϕ_∞ を同型

$$\phi_\infty:\pi_1^{\mathrm{dR}}(\mathbb{U}/\mathbb{Q};\overrightarrow{01},\overline{z})(\mathbb{C})\xrightarrow{\cong}\pi_1^{\mathrm{dR}}(\mathbb{U}/\mathbb{Q};\overrightarrow{01},z)(\mathbb{C})$$

と思うことにする. したがって, 今 $\pi_1^{\mathrm{dR}}(\mathbb{U}/\mathbb{Q};\overrightarrow{01},z)(\mathbb{C})$ は 3 つの特殊元

$$b_z,d_z,\phi_\infty(d_{\overline{z}})\in\pi_1^{\mathrm{dR}}(\mathbb{U}/\mathbb{Q};\overrightarrow{01},z)(\mathbb{C})$$

を持つ.

定理 5.1 $\pi_1^{\mathrm{dR}}(\mathbb{U}/\mathbb{Q},\overrightarrow{01})(\mathbb{C})$ を $\frac{dz}{z},\frac{dz}{z-1}$ に対応して $\mathbb{C}\langle\langle A,B\rangle\rangle$ に埋め込む.

1. *(Chen)* 埋め込み
$$\pi_1^{\mathrm{dR}}(\mathbb{U}/\mathbb{Q},\overrightarrow{01})(\mathbb{C})\hookrightarrow\mathbb{C}\langle\langle A,B\rangle\rangle$$
において $(d_z)^{-1}b_z$ の行き先は $G_0(z)=\sum_W(-1)^{\mathrm{depth}(W)}\mathrm{Li}_W(z)W$ になる. ここで $\mathrm{Li}_W(z)$ は語に対しても同様に定義された多重ポリログ. また, b_z の取り方は $\mathrm{Li}_W(z)$ の枝と対応している.

2. *(古庄)* 上の埋め込みにおいて $(d_z)^{-1}\phi_\infty(d_{\overline{z}})$ の行き先を $\exp(G_0^-(z))$ とし, $G_0^-(z)=\sum_W(-1)^{\mathrm{depth}(W)}\ell_W(z)W$ とおくと, $\ell_{A^{k-1}B}(z)$ は $P_k(z)$ と一致する. また, $\ell_W(z)$ は単価. これを多重ポリログの単価な変種という.

3. *(微分方程式, 古庄)* $G_0^-(z)$ は微分方程式
$$\frac{dG}{dz}=\left(\frac{A}{z}+\frac{B}{z-1}\right)G(z)-G(z)\left(\frac{d\overline{z}}{z}(-A)+\frac{d\overline{z}}{z-1}\Phi_{\mathrm{KZ}}^-(A,B)^{-1}(-B)\Phi_{\mathrm{KZ}}^-(A,B)\right)$$
を満たす. ここで $\Phi_{\mathrm{KZ}}^-(A,B)$ については詳しくは述べない *(cf. [Fu2])*.

4. *(関係, 古庄)*
$$G_0^-(z)=G_0(A,B)(z)\left[G_0(-A,\Phi_{\mathrm{KZ}}^-(A,B)^{-1}(-B)\Phi_{\mathrm{KZ}}^-(A,B))(\overline{z})\right]^{-1}$$
が成り立つ.

注意　もともと $z\in\mathbb{U}(\mathbb{C})$ を固定して話をしていたため, $\ell_W(z)$ は各点での値だけで z の関数としての繋がり具合は見ていなかったが, 上の 4 により多重ポリログを使って $\ell_W(z)$ が表されるので $\ell_W(z)$ は $\mathbb{U}(\mathbb{C})$ 上の実解析関数だと分かる. *($\overline{z}$ が出てくるので正則関数ではない.)*

注意　3 の微分方程式は複素共役と接続の整合性の式から来る.

注意　4 の関係式は

$$(d_z)^{-1}\phi_\infty(d_{\overline{z}}) = (d_z)^{-1}b_z[\phi_\infty((d_{\overline{z}})^{-1}\overline{b_z})]^{-1}$$

から来る.

次に p 進の話に進む. $z \in \mathbb{U}(\mathbb{Q}_p) \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{P}^1(\mathbb{Z}_p)$ で $z_0 := z \mod p \in \mathbb{U}(\mathbb{F}_p)$ となるものを固定する. $\mathbb{U}_{\mathbb{F}_p}$ 上の冪単過収束 isocrystal のなす淡中圏に対し $\overrightarrow{01}$, z_0 に対応するファイバー関手間の同型のなす亜群を表現する $\mathbb{Q}_p$ 上の副冪単亜群を $\pi_1^{\mathrm{rig}}(\mathbb{U}_{\mathbb{F}_p}/\mathbb{Q}_p; \overrightarrow{01}, z_0)$ と書き $\mathbb{U}_{\mathbb{F}_p}$ の **rigid 冪単基本亜群**という. $\pi_1^{\mathrm{rig}}(\mathbb{U}_{\mathbb{F}_p}/\mathbb{Q}_p, \overrightarrow{01}) := \pi_1^{\mathrm{rig}}(\mathbb{U}_{\mathbb{F}_p}/\mathbb{Q}_p; \overrightarrow{01}, \overrightarrow{01})$ とおく. Besser の定理 ([B]) により, $\overrightarrow{01}$ と z_0 をつなぐ Frobenius 不変な道 $c_{z_0} \in \pi_1^{\mathrm{rig}}(\mathbb{U}_{\mathbb{F}_p}/\mathbb{Q}_p; \overrightarrow{01}, z_0)$ が唯 1 つ存在する. また $\pi_1^{\mathrm{dR}}(\mathbb{U}/\mathbb{Q}; \overrightarrow{01}, z^p)$ にも標準的な単位元 d_{z^p} がある.

Frobenius が誘導する同型 $\pi_1^{\mathrm{rig}}(\mathbb{U}_{\mathbb{F}_p}/\mathbb{Q}_p; \overrightarrow{01}, z_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1^{\mathrm{rig}}(\mathbb{U}_{\mathbb{F}_p}/\mathbb{Q}_p; \overrightarrow{01}, z_0)$ の逆写像を ϕ_p と書く. 今, 比較同型

$$\pi_1^{\mathrm{rig}}(\mathbb{U}_{\mathbb{F}_p}/\mathbb{Q}_p; \overrightarrow{01}, z_0)(\mathbb{Q}_p) \cong \pi_1^{\mathrm{dR}}(\mathbb{U}/\mathbb{Q}; \overrightarrow{01}, z)(\mathbb{Q}_p)$$

により c_{z_0} を $\pi_1^{\mathrm{dR}}(\mathbb{U}/\mathbb{Q}; \overrightarrow{01}, z)(\mathbb{Q}_p)$ の元とみなす. また同様に比較同型により ϕ_p を同型

$$\phi_p : \pi_1^{\mathrm{dR}}(\mathbb{U}/\mathbb{Q}; \overrightarrow{01}, z^p)(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\cong} \pi_1^{\mathrm{dR}}(\mathbb{U}/\mathbb{Q}; \overrightarrow{01}, z)(\mathbb{Q}_p)$$

と思うことにする. したがって, 今 $\pi_1^{\mathrm{dR}}(\mathbb{U}/\mathbb{Q}; \overrightarrow{01}, z)(\mathbb{Q}_p)$ は 3 つの特殊元

$$c_{z_0}, d_z, \phi_p(d_{z^p}) \in \pi_1^{\mathrm{dR}}(\mathbb{U}/\mathbb{Q}; \overrightarrow{01}, z)(\mathbb{Q}_p)$$

を持つ.

定理 5.2 $\pi_1^{\mathrm{dR}}(\mathbb{U}/\mathbb{Q}, \overrightarrow{01})(\mathbb{Q}_p)$ を $\frac{dz}{z}, \frac{dz}{z-1}$ に対応して $\mathbb{Q}_p\langle\langle A, B\rangle\rangle$ に埋め込む.

1. *(古庄)* 埋め込み
$$\pi_1^{\mathrm{dR}}(\mathbb{U}/\mathbb{Q}, \overrightarrow{01})(\mathbb{Q}_p) \hookrightarrow \mathbb{Q}_p\langle\langle A, B\rangle\rangle$$
において $(d_z)^{-1}c_{z_0}$ の行き先は $G_0(z) = \sum_W (-1)^{\mathrm{depth}(W)}\mathrm{Li}_W^a(z)W$ になる. ここで $\mathrm{Li}_W^a(z)$ は語に対しても同様に定義された p 進多重ポリログ.

2. *(古庄)* 上の埋め込みにおいて $(d_z)^{-1}\phi_p(d_{z^p})$ の行き先を $\exp(G_0^\dagger(z))$ とし, $G_0^\dagger(z) = \sum_W (-1)^{\mathrm{depth}(W)}\ell_W^a(z)W$ とおく. ここで, $\ell_W^a(z)$ は $A^\dagger(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}_p})$ の元になる. これを p 進多重ポリログの過収束な変種という.

3. *(p 進微分方程式, 古庄-Y.)* $G_0^\dagger(z)$ は p 進微分方程式
$$\frac{dG}{dz} = \left(\frac{A}{z} + \frac{B}{z-1}\right)G(z) - G(z)\left(\frac{dz^p}{z}(p^{-1}A) + \frac{dz^p}{z^p-1}\Phi_{\mathrm{D}}^p(A,B)^{-1}(p^{-1}B)\Phi_{\mathrm{D}}^p(A,B)\right)$$
を満たす. ここで $\Phi_{\mathrm{D}}^p(A,B)$ については詳しくは述べない *(cf. [Y],[Fu2])*.

4. *(*関係, 古庄*)*

$$G_0^{\dagger}(z) = G_0(A,B)(z)\left[G_0(p^{-1}A, \Phi_{\mathrm{D}}^{p}(A,B)^{-1}(p^{-1}B)\Phi_{\mathrm{D}}^{p}(A,B))(z^p)\right]^{-1}$$

が成り立つ.

注意　もともと $z \in \mathbb{U}(\mathbb{Q}_p)$ を固定して話をしていたため, $\ell_W^a(z)$ は各点での値だけで z の関数としての繋がり具合は見ていなかったが, 上の 4 により p 進多重ポリログを使って $\ell_W^a(z)$ が表されるので $\ell_W^a(z)$ は $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)-]1,\infty[$ 上の p 進解析関数に延ばせる事が分かる. また $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)-]1,\infty[$ の範囲では c_{z_0}, $\mathrm{Li}_W^a(z)$, $\ell_W^a(z)$ は $\log$ の枝 a に依存しない.

注意　$\ell_W^a(z)$ は $A^{\dagger}(\mathbb{U}_{\mathbb{Q}_p})$ の元, すなわち過収束なので 1 や ∞ を中心とした単位開円盤より少し小さい半径の開円盤を除いた所まで p 進解析接続され, そこの範囲では $\log$ の枝 a には依存しない. しかし本当はもっと p 進解析接続され, そこまで範囲を延ばした所では $\log$ の枝 a に依存する.

注意　3 の p 進微分方程式は *Frobenius* と接続の整合性の式から来る. *(*筆者が *Frobenius* と接続の整合性から 3 の p 進微分方程式を導き出したが, 古庄氏が非可換性からくる共役の取り忘れを指摘し, そこから正しい p 進微分方程式を得た. ちなみに, このように *Frobenius* と接続の整合性から p 進微分方程式を導き出す手法は *Deligne* の論文 *[D]* から来ている.*)*

注意　4 の関係式は

$$(d_z)^{-1}\phi_p(d_{z^p}) = (d_z)^{-1}c_{z_0}[\phi_p((d_{z^p})^{-1}c_{z_0})]^{-1}$$

から来る.

捻り p 進多重ポリログについても淡中圏解釈と p 進微分方程式がある ([Y]).

6　p 進多重ゼータ値 (L 値) 空間の次元の上からの評価

この章では p 進多重ゼータ値空間, p 進多重 L 値空間の次元の評価について述べる.

まず, $\mathbb{C}$ 上の多重ゼータ値の空間については次の予想が知られている. Z_w^p, $Z_w^p[N]$ の時と同様に多重ゼータ値, 多重 L 値を使って Z_w, $Z_w[N]$ を定義する.

予想 6.1 *(*次元予想, *Zagier)* $D_0 = 1$, $D_1 = 0$, $D_2 = 1$, $D_{n+3} = D_{n+1} + D_n$ $(n \geq 0)$ により数列 $\{D_n\}_n$ を定義する. *(*母関数 $\sum_{n=0}^{\infty} D_n t^n = 1/(1-t^2-t^3)$ で定義されると言ってもよい.*)* この時, $w \geq 0$ に対して $\dim_{\mathbb{Q}} Z_w = D_w$ であろう.

定理 6.2 *(Goncharov,* 寺杣, *Deligne-Goncharov [G1][T1][DG])* $w \geq 0$ に対して $\dim_{\mathbb{Q}} Z_w \leq D_w$ が成立する.

この定理は多重ゼータ値間に膨大な関係式が存在する事を言っている. 逆向きの不等式は超越数論的な問題になり, 代数幾何的に取り組めるか疑問である. 多重 L 値については次の定理がある.

定理 6.3 *(Deligne-Goncharov[DG])* $N=2$ *(resp.* $N>2$*)* の時は数列 $\{D_n[N]\}_n$ を母関数 $1/(1-t-t^2)$ *(resp.* $1/(1-(\frac{\varphi(N)}{2}+\nu)t+(\nu-1)t^2)$*)* で定める. ここで φ は *Euler* 関数, ν は N を割る素数の数を表す. この時, $w\geq 0$ に対して $\dim_{\mathbb{Q}} Z_w[N]\leq D_w[N]$ が成立する.

注意　$N>4$ の時, 一般に等号は成立しない事が知られている *(Goncharov[G2])*. そのギャップには N が素数の時重さ 2 の $\Gamma_1(N)$ の尖点形式の空間が関与している *(loc. cit.)*.

さて, p 進の話に移る. Zagier の予想の類似の予想も定式化されている.

予想 6.4 *(*次元予想, 古庄-*Y.)* $d_0=1$, $d_1=0$, $d_2=0$, $d_{n+3}=d_{n+1}+d_n$ $(n\geq 0)$ により数列 $\{d_n\}_n$ を定義する. *(*母関数 $\sum_{n=0}^{\infty} d_n t^n=(1-t^2)/(1-t^2-t^3)$ で定義されると言ってもよい.*)* この時, $w\geq 0$ に対して $\dim_{\mathbb{Q}} Z^p_w=d_w$ であろう.

定理 6.5 *(Y.[Y])* $N=2$ *(resp.* $N>2$*)* の時は数列 $\{d_n[N]\}_n$ を母関数 $(1-t^2)/(1-t-t^2)$ *(resp.* $(1-t)/(1-(\frac{\varphi(N)}{2}+\nu)t+(\nu-1)t^2)$*)* で定める. ここで φ は *Euler* 関数, ν は N を割る素数の数を表す. この時, $w\geq 0$ に対して $\dim_{\mathbb{Q}} Z^p_w[N]\leq d_w[N]$ が成立する.

この定理も同様に p 進多重ゼータ値間に膨大な関係式が存在する事を言っている. 逆向きの不等式も p 進超越数論的な問題になり, やはり代数幾何的に取り組めるか疑問である.

注意　$\dim_{\mathbb{Q}} Z^p_w[N]$ が p に依らない事も分かっておらず, 難しい問題のように思える *(cf.* 例 *2.3* での高次 *Leopoldt* 予想*)*.

注意　$N>4$ の時, $\mathbb{C}$ 上の時と同様の理由で一般に等号は成立しない事が知られている. そのギャップにはやはり N が素数の時重さ 2 の $\Gamma_1(N)$ の尖点形式の空間が関与している.

これらの数列には K 理論的意味があり, 証明も K 理論と関係させる事でなされる. 例えば,

$$\frac{1}{1-t^2-t^3}=\frac{1}{1-t^2}\frac{1}{1-\frac{t^3}{1-t^2}}=\frac{1}{1-t^2}\frac{1}{1-(t^3+t^5+t^7+\cdots)}$$

であり, $1/(1-t^2)$ の項は π^2 が重さ 2 の部分にある事と対応しており, $t^3+t^5+t^7+\cdots$ は

$$\mathrm{rank} K_{2n-1}(\mathbb{Z})=\begin{cases}0 & \text{for } n: \text{偶数 or } n=1\\ 1 & \text{for } n: \text{奇数かつ } n\neq 1\end{cases}$$

に対応している. p 進では母関数が $(1-t^2)/(1-t^2-t^3)$ と $1/(1-t^2)$ の因子がなくなるのは "p 進では $\pi^2=0$" である事と対応している. $N>2$ では $\mathbb{C}$ 上と p 進のズレが $1/(1-t^2)$

ではなく $1/(1-t)$ であるのは, 重さ 1 の部分が $\mathbb{C}$ 上では $-\log(1-\zeta)+\log(1-\zeta^{-1}) = -\log(-\zeta) =$ (有理数)$\cdot\pi$ であったのが "p 進では $\pi=0$" であるためにそれが消えてしまうのと対応している.

定理の証明は Deligne-Goncharov([DG]) の $\mathbb{Z}[\mu_N, \{\frac{1}{1-\zeta_w}\}_{w|N}]$ 上の混合 Tate モティーフの圏, $\mathbb{U}_N$ のモティーフ的冪単基本亜群, 前節の淡中圏解釈を使う. 要点だけを手短に述べる. K 理論と深く関係した副冪単群 U_ω の $\mathbb{Q}_p(\mu_N)$ 値点に p 進多重 L 値と深く関係した元 φ_p をつくる (この φ_p は大雑把に言って "de Rham と rigid のズレ" を表す). $\varphi_p \in U_\omega(\mathbb{Q}_p(\mu_N))$ から φ_p は U_ω の定義方程式を満たさなくてはいけない (具体的な定義方程式は筆者は知らない). U_ω が K 理論との関係で "十分小さい" 事で φ_p が満たすべき定義方程式から p 進多重 L 値の豊富な関係式が導出され, 次元の上からの評価が得られる. この証明は Deligne-Goncharov による, 多重 L 値と深く関係した元 a^0_σ (この a^0_σ は大雑把に言って "de Rham と Betti のズレ" を表す) を K 理論と深く関係した副冪単群 U_ω(上と同じもの) の $\mathbb{C}$ 値点に作ることで多重 L 値空間の次元を上から評価する証明の p 進類似になっている. この元 a^0_σ については次の予想がある.

予想 6.6 *(Grothendieck, [DG])* $a^0_\sigma \in U_\omega(\mathbb{C})$ は $\mathbb{Q}$-*Zariski dense* だろう.

$N=1$ の時, ($+\alpha$ を加えれば) この予想から Zagier の予想 6.1 と多重ゼータ値のすべての関係式は同じ重さの多重ゼータ値の関係式の一次結合だろう, という等圧予想 (cf. p 進での等圧予想 4.4) が従う. p 進でも同様のことが考えられる.

予想 6.7 *(Y., [Y])* $\varphi_p \in U_\omega(\mathbb{Q}(\mu_N))$ は $\mathbb{Q}$-*Zariski dense* だろう.

$N=1$ の時, ($+\alpha$ を加えれば) この予想から p 進の次元予想 6.4 と p 進の等圧予想 4.4 が従う.

参考文献

[B] Besser, A. *Coleman integration using the Tannakian formalism.* Math. Ann. **322** (2002), no. 1, 19–48.

[BF] Besser, A.; Furusho, H. *The double shuffle relation for p-adic multiple zeta values.* preprint.

[C] Coleman, R. F. *Dilogarithms, regulators and p-adic L-functions.* Invent. Math. **69** (1982), no. 2, 171–208.

[D] Deligne, P. *Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points.* Galois groups over $\mathbb{Q}$ (Berkeley, CA, 1987), 79–297, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **16**,

[Dr] Drinfel'd, V. G. *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected woth* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Leningrad Math. J. **2**(1991), no. 4, 829–860.

[DG] Deligne, P., Goncharov, B. *Groupes fondamentaux motiviques Tate mixte.* preprint NT/0302267

[Fu1] Furusho, H. *p-adic multiple zeta values. I. p-adic multiple polylogarithms and the p-dic KZ equation.* Invent. Math. **155**(2004) , no. 2, 253–286.

[Fu2] Furusho, H. *p-adic multiple zeta values. II. Tannakian interpretations.* preprint.

[Fu3] Furusho, H. ポリログとフロベニウス. 第 49 回代数学シンポジウム報告集.

[G1] Goncharov, B. *Multiple ζ-Values, Galois Groupes, and Geometry of Modular Varieties.* preprint AG/0005069

[G2] Goncharov, B. *The dihedral Lie algebras and Galois symmetries of* $\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{0, \infty\} \cup \mu_N)$. Duke. Math. J. **110**, (2001), 397–487.

[T1] Terasoma, T. *Mixed Tate motives and multiple zeta values.* Invent. Math. **149**(2002) 339–369.

[T2] Terasoma, T. *Harmonic shuffle relation for associators.* preprint.

[Y] Yamashita, G. *bounds for the dimensions of p-adic multiple L-value spaces.* preprint.