［フォーラム］

大晦日の草稿

長谷川 真人

1996年の新年は，Princes Street (Edinburghの大通り) で迎えた．大晦日, 友人らと街に繰り出して，人混みのなかで新年のカウントダウンに加わり，スコットランドらしくAuld Lang Syneを合唱した．見知らぬ人達にビールをふるまわれたりキスされたり，騒ぎを満喫したあと，寮に戻って，出されたスープをすすった．やることはやったんだから，たとえ先んじられていたとしても仕方ない，そう思っていた．

1 はじめに：表示的意味論 ⇔ 不変量?

1998年のソフトウェア科学会大会 [7]および本誌上[8]で，再帰的プログラムの意味論をカテゴリ論的な構造を用いて展開した研究 [5] [6]を報告した．そこでは，絡み目の不変量という，プログラミング言語の意味論とはおおよそ無縁そうなものと，再帰的プログラムとの間に共通するカテゴリ論的構造 (トレース付きモノイダルカテゴリ [10]) に焦点があてられていた．その要旨は，おおまかにいって以下のようなものである．

幾何学では，絡み目に，空間内での変形に関して不変な数学的対象 (たとえば多項式) を対応させ，これを絡み目の不変量とよび，絡み目の分類に用いる．一方，プログラミング言語の表示的意味論では，プログラムにその計算の過程において不変な数学的対象 (たとえば完備半順序集合の要素) を対応させ，表示的意味とよんで，プログラムの性質について議論するのに役立ててきた．

報告した研究では，この「表示的意味論 ⇔ 不変量」という比喩を，単なる比喩にとどめず，実際に共通する数学的構造に着目し，応用したことに意義があったと思う．同時に，この比喩そのものにも，それなりのインパクトがあったようで，計算機科学者，数学者双方からおもしろがってもらえたようである．筆者自身は，この比喩がどれほど有効なものか，必ずしも確信を持っているわけではないけれども，少なくとも本研究に関しては良い展望を与えるものであったと感じている．

しかし，実際には，この研究は，はじめからそのような明確な見通しを持って行なわれたわけではなかった．現実には，暗中模索で，細い切れそうなもつれた糸を，幸運にもなんとか手繰り寄せられた，そんな感じの研究だったのである．そのような事情は，通常は出版された論文には出てこないものであるが，今回は自由に書いてよいとのことなので，この機会にまとめて書き記しておこうと思う．筆者の個人的な事情の告白にとどまらず，最近の計算の意味論の研究状況に関する参考資料となれば幸いである．なお，文中，敬称はすべて略した．

2 Milnerのアクション計算

筆者は1994年の秋から3年足らずの間，Edinburgh大学の計算機科学科の博士課程に在籍していた．指導教官はRod Burstallである．筆者は彼のもとで型理論のカテゴリ論的なモデルの研究をするつもりで渡英したのだが，着いて2ヶ月後には (はじめて書いたその方面の論文がrejectされたこともあって) もう気が変わっていた．Robin Milnerが精力的に進めていた，並列計算の一般的な体系である，アクション計算 (action calculi) [13]の研究に乗り換えてしまったのである．きっかけは，日本にいたころ行なった，変数のカテゴリ論的な解釈の研究 [4]に，アクション計算での名前の取り扱いにつながるものがあると気が付いたことであった．Milner

On New Year's Eve.

Masahito Hasegawa, 京都大学数理解析研究所, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University.

コンピュータソフトウェア, Vol.17, No.1 (2000), pp.15–18.
［フォーラム］1999年11月20日受付.

は当時 Edinburgh から Cambridge に異動したばかりで，両所を往復する暮しをしていたが，Burstall のとりなしで，何回か会う機会をもらい，未熟なアイデアを聞いてもらうことができた．John Power や Philippa Gardner らの助言もあり，アクション計算の勉強をはじめることにした．

実のところ，筆者は，1997年ごろからは (共著論文があるのを除いては) アクション計算の研究はやめてしまっている．Milner の，グラフ構造上の書き換えに基づいた並列計算のための一般的な枠組みという構想自体は間違ってはいないと思うのだが，並列計算の本当に意味のある結果を得るためには，アクション計算はあまりにも一般的すぎる (弱すぎる) 体系になってしまっている，と考えるからである．しかし，Milner はアクション計算に，非常に多くの魅力的なアイデアを盛り込んだ．そのいくつかは，今でも十分考察に値する，先駆的なものだと思う．

筆者の再帰的プログラムの意味論に関する研究も，[7] [8]に見られるようなかたちではアクション計算とはまったく関係がないのだが，そのはじまりは，以下に記すように，実はアクション計算 (に盛り込まれた Milner のアイデア) の分析だったのである．

3 アクション計算から巡回的ラムダ計算へ

1995年の6月頃，筆者は，博士課程の先輩である Alex Mifsud から，アクション計算で再帰的な計算を表現する方法について教えられた．アクション計算に巡回的な名前の束縛を許すよう拡張した反射的アクション計算 (reflexive action calculi) と，値呼びラムダ計算に類似した拡張である高階アクション計算 (higher-order action calculi) を組み合わせれば，任意のアクション (プロセス) の不動点が構成できるというのである．たとえば，任意のプロセス P について，$!P = P|!P$ をみたすプロセス $!P$ が Mifsud の方法で構成できる．

Mifsud の構成 [12] ([6]も参照) は，筆者には随分煩雑なものに思われた．はじめはそれがなぜうまくいくのかもわからなかった．しかし，まったく偶然なのだが，筆者は当時，Gardner のすすめで，共有構造を表現できるような種々のラムダ計算 (またはラムダグラフ書き換え系) についてサーベイをしており，Mifsud が見せてくれたものと巡回的ラムダ計算 [1]や lazy な関数型プログラミング言語 [11]での不動点演算子の構成に類似したものがあることに気が付いた．実際，反射的高階アクション計算も巡回的ラムダ計算も，いずれも巡回的なグラフ書き換え系であるという点で本質的に同じ構造を持っていたのである．

アクション計算の型付きラムダ計算ふうの表現というのは，もともと型理論の研究者だった Gardner の好みに合って，Gardner と筆者はこのあとしばらく，反射的および高階アクション計算と対応する型付きラムダ計算の構成に精を出すことになる [3]．

4 収穫：カテゴリ論的モデル

この構文的な試行錯誤は，筆者が反射的高階アクション計算のカテゴリ論的意味モデルを特定したことで報われることになる．すでに1995年の5月に，カテゴリ論の専門家である Power の示唆のもと，筆者は，反射的アクション計算の巡回構造がトレース付きモノイダルカテゴリのトレースと完全に対応することに気が付いていた (詳細は Mifsud の博士論文 [12]に報告されている)．

同年の9月になって，筆者は，高階アクション計算のカテゴリ論的モデルが，適切な随伴関手の言葉を用いて特徴付けられることに気が付いた [3]．それまでに得ていた結果から，ただちに以下のような結論が得られる：

1. 再帰的高階アクション計算のカテゴリ論的モデルは，トレース付きモノイダルカテゴリおよび随伴関手の概念を用いて与えられる．
2. 再帰的高階アクション計算はある種の型付き巡回的ラムダ計算と対応しているので，それらのモデルは，型付き巡回的ラムダ計算のモデルとしても用いることができる．
3. それらのモデルにおいて，Mifsud の構成または巡回的ラムダ計算における不動点演算子の構成を行なうことにより，ある種の不動点定理 ([8]の定理2) が得られる．

出版された論文 [5] [6] [8]では，まず特殊な場合の不動点定理 ([8]の定理1) を述べ，次により一般化された結果 (定理2) を報告しているが，実際はまったく反対で，アクション計算や巡回的ラムダ計算における再帰計算の研究の成果として，一般化された定理のほうが先に得られ

たのである．(参考のため，定理1および2を本稿の最後に再録しておく.)

5 不動点 ⇔ トレース

前節で述べたように，ある適切な条件のもとでは，トレースの存在から不動点の存在が導かれることがわかった．その逆はどうか，というと，これは一般には成り立たない．しかし，より構造を制限した状況(具体的にはテンソル積が直積であるような場合)では，トレースの存在と，あるよい性質を満たす不動点の存在が同値になるのではないか，ということに，定理2を得る過程でうすうす感付いていた．

その「よい性質」は，1995年の10月ごろにはだいたいはっきりしてきた．[8]の定理1である．$x = f(x,y), y = g(x,y)$ のような相互再帰の不動点を，各変数ごとの不動点に帰着させることができる，というのがその条件だった．ところが，勉強不足が祟って，この条件が知られているものなのかどうかもわからなかった．困って博士課程の同期の Ewen Denney に聞くと，これは Bekić property とよばれる有名なものであるという．おおよそ知られているすべての再帰計算のモデルは，Bekić property を満たすから，これはずいぶん良い結果である．そう確信して，11月頃インフォーマルなセミナーで話したら，Gordon Plotkin が興味を持ってくれて，それ以来よくトレースについて話すようになった(博士論文に出てくるいくつかの結果は，Plotkin との議論から得られたものである)．

6 Hyland と競争?

ところが，そのセミナーの後，困ったことになった．そのころよく面倒をみてくれていた Power が，同様の結果を Cambridge の Martin Hyland も得ているらしい，と知らせてきたのである．自分の結果に自信を持ちかけていた頃だっただけに，大変あわてた．Power のすすめで，Hyland に電子メールを書いた．返事は，なかなか来なかった．12月を，不安な気持で過ごした．

最後は開き直って，せめて完全な証明を論文のかたちで書き下しておこう，と，クリスマスから新年までの間，人気のない大学で毎日端末に向かった．1995年12月31日付のファイルが，今も残っている．大晦日，証明を仕上げたあと，友人と待ち合わせ街に出た．人混みのなかで新年を迎えたのは，冒頭に記したとおりである．

1月半ばになって，Hyland から返事が来た．体調を崩していて返事が遅れたとのことだった．肝心の結果については，定理1に相当するものを彼も得ていたが，論文にはしていなかった．どうやらほぼ同じ時期に同じ結果を得ていたようだった．定理2については，まったく考えたことがなかった，おもしろい結果だと思う，と書いてくれた．筆者が定理2を特殊化して定理1を得たのに対し，Hyland はもっと直接的に(いかにも数学者らしい直観によって)定理1に辿りついていた．

1月末，Cambridge の数学科に Hyland を訪ね，ずいぶん長い間話をした．それ以来，彼には何かと親切にしてもらうようになり，多くの助言と励ましをもらった — 博士論文の試験官にもなってもらった — 筆者の研究に関して，もっとも恩のある人の一人である．

なお，付け加えておくと，定理1に類似した結果は，巡回的な構造を代数的に公理化した様々な仕事のなかで，過去の文献にもあらわれている．しかし，トレースと不動点というふたつの概念の関係に関する問題として考察を行なったのは，筆者の知る限り我々が最初である．その意味で，定理1(と定理2)は，技術的な内容よりもその問題意識の新しさに重要性があると思う．

7 トレース付きモノイダルカテゴリ — その後の展開

以上に述べたように，[7] [8]に紹介した主要な結果は，1995年に得られたものである．ただ，その結果が意味することを自分なりに消化するのには，もう少し時間がかかった．巡回的ラムダ計算の意味論に関する論文 [5]を書き，あちこちで講演し，また博士論文 [6]を準備していくうちに，ちょっとずつ理解が進んできた．博士論文を書き終えたあとで気が付いたことも少なくない．表示的意味論と絡み目の不変量の間の対比も，トレース付きモノイダルカテゴリが考案されたもともとの動機についてサーベイしているうちに思いついたことである．

領域理論との関係は，Alex Simpson や Marcelo Fiore に助けてもらって理解できたことが多い．領域理論のすべてのモデルはトレースを持つ [6]，というのは，公理的領域理論 (Axiomatic Domain Theory)

[2]で妥当と考えられている algebraic compactness とよばれる(領域方程式を解くための)条件から得られる帰結である．たとえば，長谷川立は，組み合わせ論的なカテゴリ論的構造(ある種の形式的べき級数のなすカテゴリ)における不動点(逆公式)をトレースを用いて記述しているが [9]，実はこの構造は公理的領域理論のモデルになっているので，トレースの存在はこの一般論からただちにわかる．ただしこの議論から長谷川立が与えたような明示的にトレースを計算する方法が得られるかどうかはまだわかっていない．

その他にも，博士論文 [6]には，トレースに関して重要だと考えたことを，不完全なことでも書き記している．そのなかで，最近，もう一度考察する価値があると思っていることに，トレースの uniformity の概念がある．これは，領域理論における最小不動点演算子の，strict map に関する uniformity (Plotkin's principle ともよばれる) に対応するものを，一般のトレース付きモノイダルカテゴリについて定式化したもので，非常に簡潔なかたちをしており，トレース付きモノイダルカテゴリのなんらかの性質を反映する条件になると考えていたが，結局良い結果が出せないままに終わっていた．ところが，最近になって Peter Selinger が，uniformity を，並列計算のモデルになるようなトレース付きモノイダルカテゴリの特徴付けに用いることを示唆し [14]，驚かされた．この，並列計算との関係はいろいろおもしろい結果が得られる可能性があり，大変興味深い方向だと思っている．

参考文献

[1] Ariola, Z. M. and Blom, S. : Cyclic Lambda Calculi, *Proc. 3rd International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Software*, Springer LNCS 1281 (1997), pp. 77–106.

[2] Fiore, M. : *Axiomatic Domain Theory in Categories of Partial Maps*, PhD thesis, University of Edinburgh, 1994; Distinguished Dissertations in Computer Science, Cambridge University Press, 1996.

[3] Gardner, P. and Hasegawa, M. : Types and Models for Higher-Order Action Calculi, *Proc. 3rd International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Software*, Springer LNCS 1281 (1997), pp. 583–603.

[4] Hasegawa, M. : Decomposing Typed Lambda Calculus into a Couple of Programming Languages, *Proc. 6th International Conference on Category Theory and Computer Science*, Springer LNCS 953 (1995), pp. 200–219.

[5] Hasegawa, M. : Recursion from Cyclic Sharing, *Proc. 3rd International Conference on Typed Lambda Calculi and Applications*, Springer LNCS 1210 (1997), pp. 196–213.

[6] Hasegawa, M. : *Models of Sharing Graphs: A Categorical Semantics of* let *and* letrec, PhD thesis, University of Edinburgh, 1997; Distinguished Dissertation Series, Springer-Verlag, 1999.

[7] 長谷川真人：再帰的プログラムの意味論と絡み目の不変量，日本ソフトウェア科学会第 15 回大会論文集 (1998), pp. 193–196.

[8] 長谷川真人：再帰的プログラムの意味論とトレース付きモノイダルカテゴリ，コンピュータソフトウェア，Vol. 16, No. 2 (1999), pp. 62–66.

[9] Hasegawa, R. : Two Applications of Analytic Functors, submitted for publication.

[10] Joyal, A., Street, R. and Verity, D. : Traced Monoidal Categories, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* Vol. 119, No. 3 (1996), pp. 447–468.

[11] Launchbury, J. : A Natural Semantics for Lazy Evalation, *Proc. 21st ACM Symposium on Principles of Programming Languages* (1993), pp. 144–154.

[12] Mifsud, A. : *Control Structures*, PhD thesis, University of Edinburgh, 1996.

[13] Milner, R. : Calculi for Interaction, *Acta Informatica* Vol. 33, No. 8 (1996), pp. 707–737.

[14] Selinger, P. : Categorical Structure of Asynchrony, *Proc. 15th Conference on Mathematical Foundations of Programming Semantics, Electron. Notes Theor. Comput. Sci.* 20 (1999).

定理 1 (**Hyland/長谷川**) テンソル積が直積であるようなモノイダルカテゴリ **C** においては，以下の条件は同値である．

1. **C** はトレースを持つ．
2. **C** は dinaturality と diagonal property を満たす不動点演算子を持つ．
3. **C** は naturality と Bekić property を満たす不動点演算子を持つ．

定理 2 (**長谷川**) テンソル積が直積であるようなモノイダルカテゴリから，トレース付きモノイダルカテゴリへのシンメトリックモノイダル随伴が存在するとき，このトレース付きモノイダルカテゴリは dinatural な不動点演算子を持つ．