

「ジオラマ」のための力学系入門

An introduction to **dynamical** systems theory
for “cellular ethological **dynamics**”



石本 健太
京都大学・数理解析研究所

はじめに

経緯

- (??) 「力学系」の話をしてほしい
- (石本) 2年後期(数学科向け)の授業で教えているので、その短縮版が良いですか？

※ 最近でも「力学系」の学部講義は数学系・物理系・機械系では珍しい(らしい)

※ それなのに「みんな知ってて当然」な感じになっている

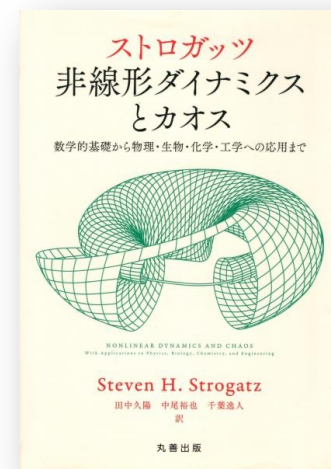
講義ノート

- 自身のwebサイトにスライドpdfをおいています



参考文献

- ストロガッツ「非線形ダイナミクスとカオス」(丸善, 2015)
- ハーシュ -- スメール -- デバニー「力学系入門」(共立, 2017)



力学系とは？

力学系(dynamical systems)

- 時間発展のルールが与えられた**数学的な対象**
- 状態： x
- 時刻： t
- 状態の時間発展ルール（アルゴリズム）

力学 (mechanics)

- 保存則に基づく運動に関する**物理学の理論体系**
- 物質のモデル（構成則）が必要
- 物質・力・運動の間の関係性を調べる

例：微分方程式（**連続**力学系）

$$\dot{x} = f(x, t)$$

時間微分はドットで表す $\dot{x} := \frac{dx}{dt}$

- ニュートン力学の運動方程式
- 多くの数理モデル

例：差分方程式（**離散**力学系）

$$x_{n+1} = f_n(x_n)$$

- 数値計算では連続系を離散化
- 細胞運動の実験ムービーデータ

力学系とは？

力学系の種類

- 連続力学系 vs 離散力学系
- 自励系 vs 非自励系
- ここで扱うのは自励系の連続力学系

$$\dot{x} = f(x, t) \quad \text{非自励系 (例: 外部の時間変動環境)}$$

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{自励系 (今回主に扱う)}$$

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{複数の状態変数を持つ場合}$$
$$\vec{x} =: x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

ベクトルは**太字**で表記することが多い

状態空間（相空間） $\mathcal{M}$

状態 $x \in \mathbb{R}^n$ （一般には多様体上の点 $x \in \mathcal{M}$ ）

ベクトル場 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

状態の遷移のルールを定める
= 行動力学の（ある種の）アルゴリズム

力学系とは

時間変化を幾何学的に捉える学問

- 今日のtake home メッセージ

「ジオラマ」の例：1次元の力学系

重力走性を示す微細藻

- 重力中心と浮力中心が異なるため重力トルクを受ける
- 遊泳方向が鉛直上向きになる（ボトムヘビー）

$$\dot{\theta} = -\sin \theta$$

力学モデル

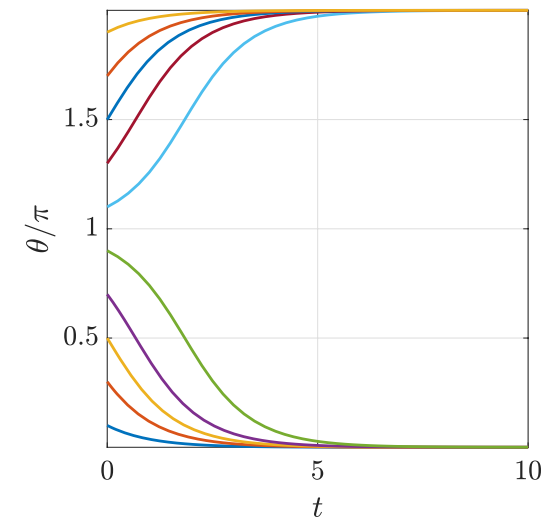
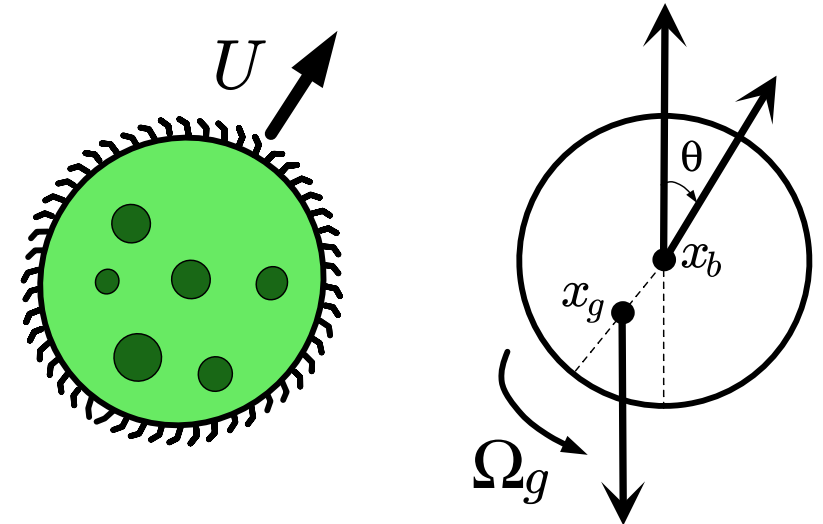
- 流体トルクと重力トルクの釣り合いの式
- 時間スケールを選ぶことでトルクに現れる係数=1とした
- 角度 θ に関する1次元力学系

数理解析

- 解析解は変数分離で得られる
- 解けてもあんまりよくわからない

$$\theta = 2 \cot^{-1}(C e^t)$$

c : 積分定数



固定点と安定性

固定点（不動点・平衡点・停留点）

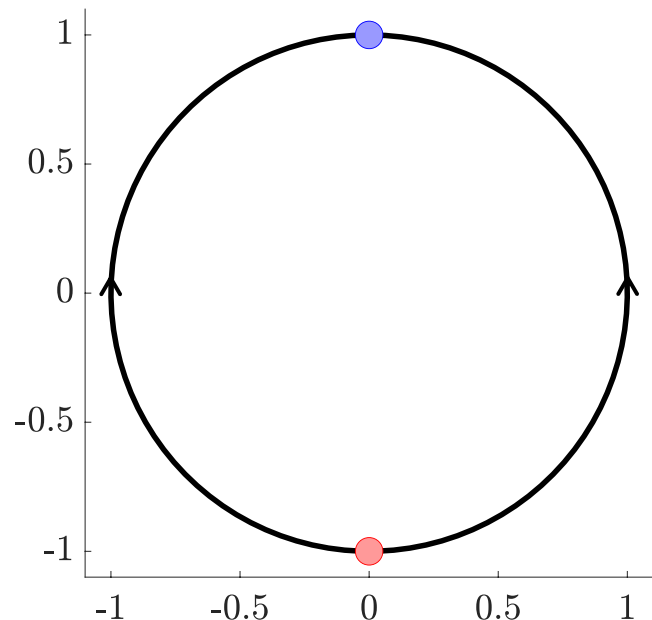
➤ 時間発展しても変化しない状態

$$\dot{\theta} = -\sin \theta$$

$$\dot{\theta} = 0 \quad \longrightarrow \quad \theta = 0, \pi$$

固定点の安定性

- 細かな説明は後です
- 漸近安定 「固定点のまわりから時間発展すると、固定点に近づく」
- 漸近不安定 「固定点のまわりから時間発展すると、固定点から離れる」



$$\dot{\theta} = -\theta + o(\theta) \quad |\theta| \ll 1$$

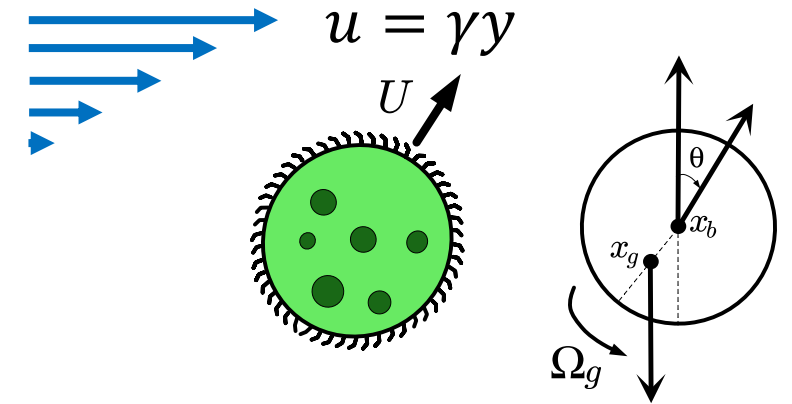
$$\dot{\theta} = +(\theta - \pi) + o(\theta - \pi) \quad |\theta - \pi| \ll 1$$

微分方程式から状態空間の幾何学（図形）へ

「ジオラマ」の例：1次元の力学系

次に微細藻を流れ（シア流）の中に入れてみる

- 海洋中の赤潮藻
- γ : シア（せん断）の強さ

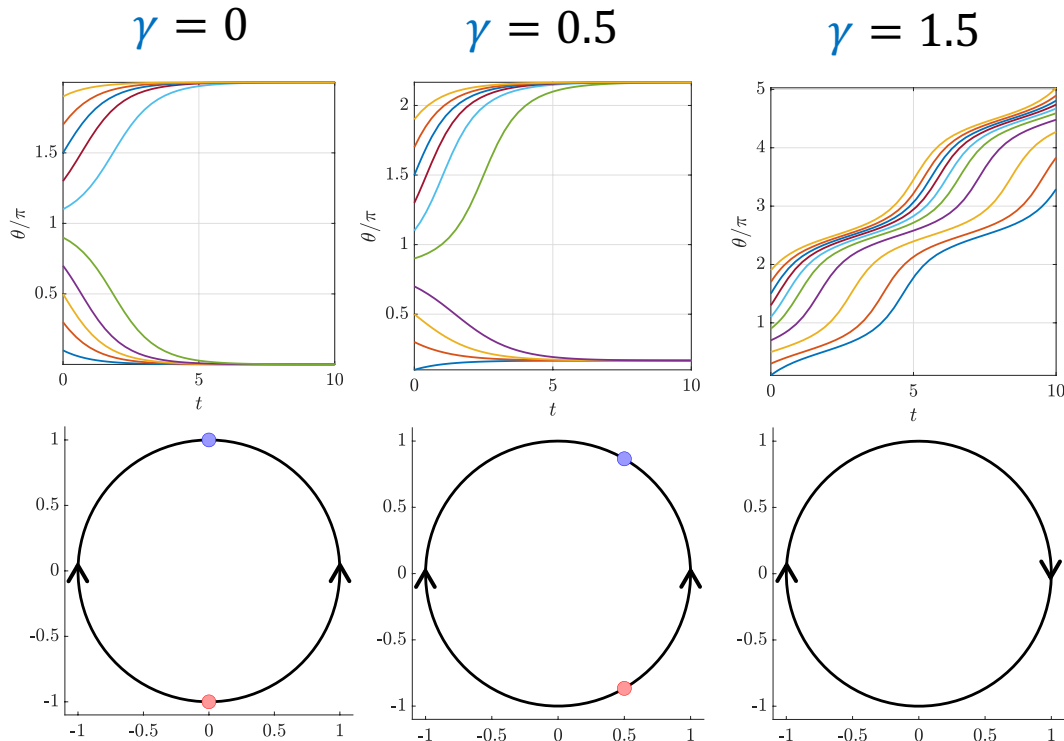


$$\dot{\theta} = \gamma - \sin \theta$$

数値シミュレーション（数値計算）

- 解析解は一応ある
- γ が大きくなると回転し出す

相空間で見れば、
定性的な振る舞いは一目瞭然

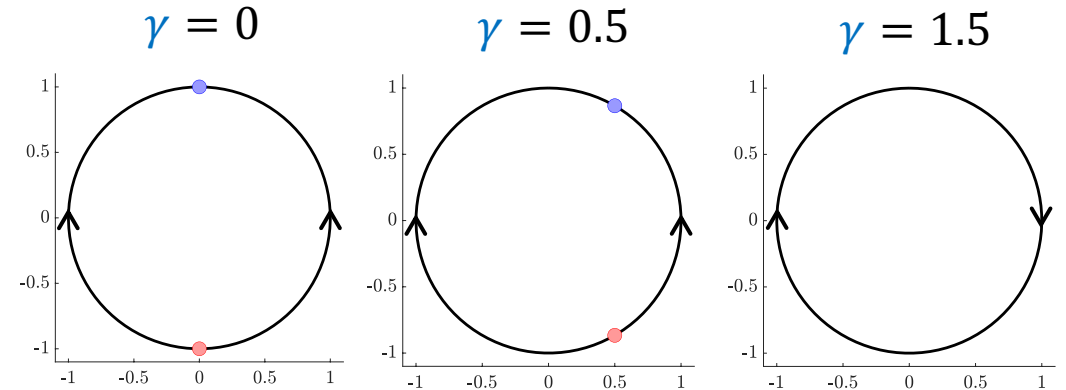


解の分岐

力学系の固定点

- $\gamma < 1$: 固定点は2つ (安定点と不安定点)
- $\gamma = 1$: 固定点は1つ
- $\gamma > 1$: 固定点無し (周期運動)

$$\dot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \gamma = \sin \theta \text{ を満たす } \theta$$



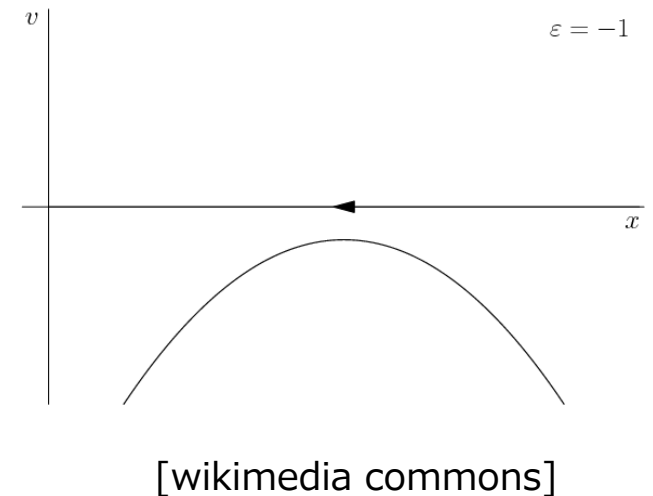
解の分岐(bifurcation)

- 力学系のパラメータ (今の例では γ) によって力学系の (位相的な/トポロジカルな) 構造が変化すること

サドルノード分岐

- 固定点の生成・消滅を起こす分岐
- トポロジカルな性質は標準形(normal form)で一般的に記述できる

$$\dot{x} = \varepsilon - x^2$$



ここまでの復習（2次元以上の力学系へ）

力学系のアイデア

- 微分方程式の幾何学的な構造に着目
- 固定点・安定性・分岐を調べる
- 大域的で定性的な特徴を抽出

行動力学の数理モデリング

- 個体間・個体内・実験条件などのバラツキは避けられない
- 定量的な数理モデルが意味をなさないことも少なくない
- 大域的で系の詳細によらない現象の本質を抽出する際に、力学系理論が力を発揮する

※ 解析解を使えばよいのでは？と思うが2次元以上では
求積法（変数分離）は一般には使えない

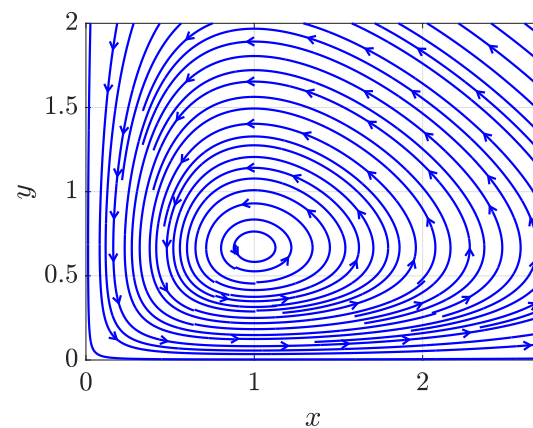
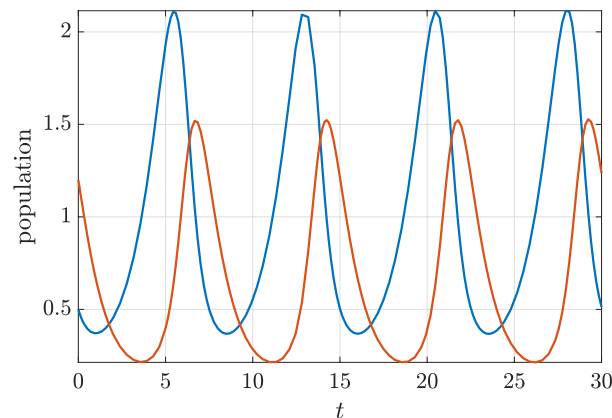
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

保存量に着目：2次元の力学系

例：ロトカ-ボルテラ方程式

➤ 捕食者(y)・非捕食者(x)の個体数変化の数理モデル

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = cxy - dy \end{cases} \quad a, b, c, d > 0$$

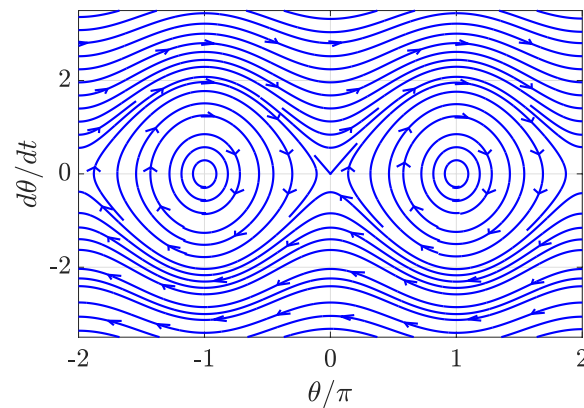
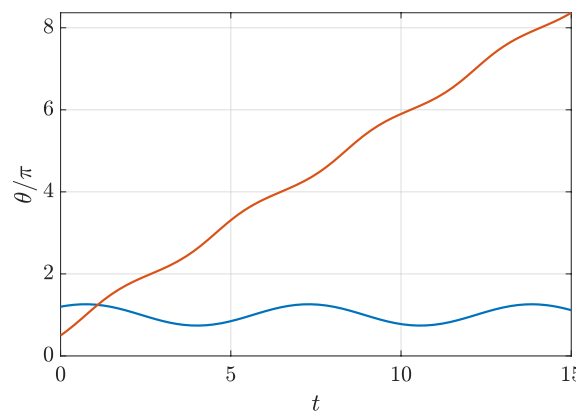


変数分離型なので積分定数が一つ得られる（時間保存量） $H = cx + by - d \log x - a \log y$

例：振り子の運動

➤ 解析解はない（解は楕円積分）

$$\ddot{\theta} = -\sin \theta \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\sin \theta \end{cases}$$



ハミルトン系

ハミルトン力学系

- 2次元の力学系（一般には2n次元）が $H(x, y)$ を用いて

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

と書けるとき、この系をハミルトン力学系という
 $H(x, y)$ はハミルトニアンと呼ばれる

例：振り子の運動

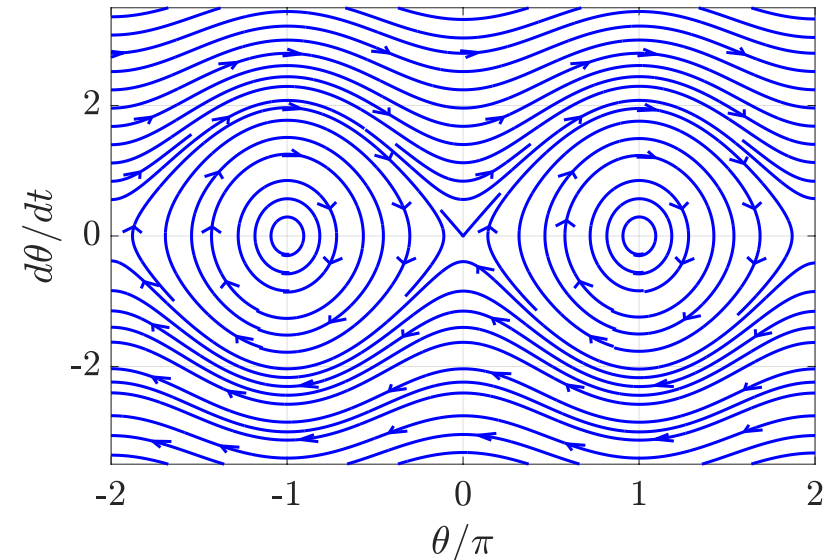
- エネルギーの保存則に対応（位置エネルギー + 運動エネルギー）

$$H(\theta, \omega) = \frac{\omega^2}{2} + \cos \theta \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\sin \theta \end{cases}$$

例：2次元の非圧縮流れ

- 流れ関数がハミルトニアンになっている

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$



「ジオラマ」の例：2次元の力学系

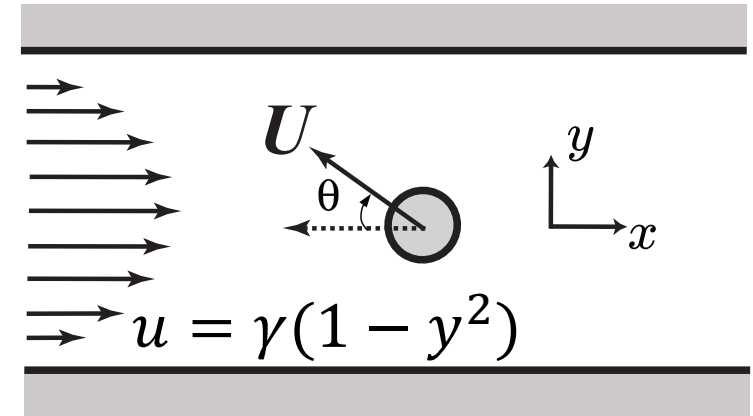
例：管の中の微生物運動 [Zöttl & Stark, 2012]

- 自走速度を $U = 1$ 、管の上下の位置を $y = \pm 1$
- (θ, y) 空間で見るとハミルトン力学系

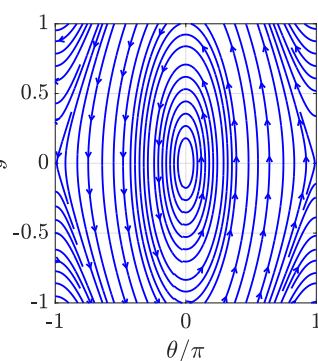
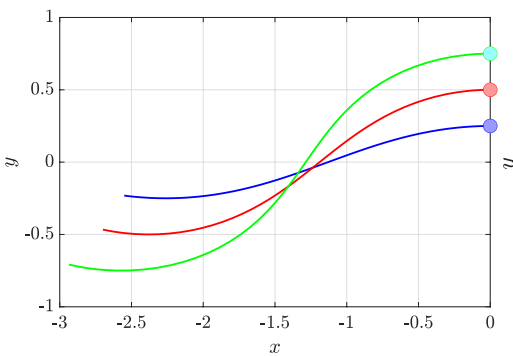
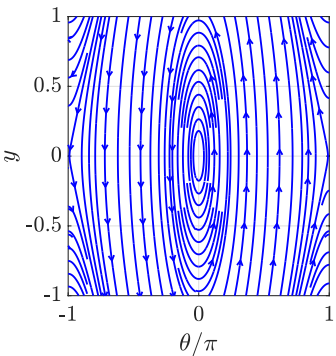
$$\begin{cases} \dot{x} &= -\cos \theta + \gamma(1 - y^2) \\ \dot{y} &= \sin \theta \\ \dot{\theta} &= -\gamma y \end{cases}$$

ハミルトニアンは

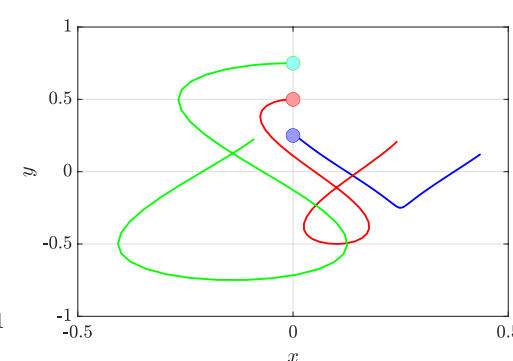
$$H(\theta, y) = -\frac{\gamma}{2}y^2 + \cos \theta$$



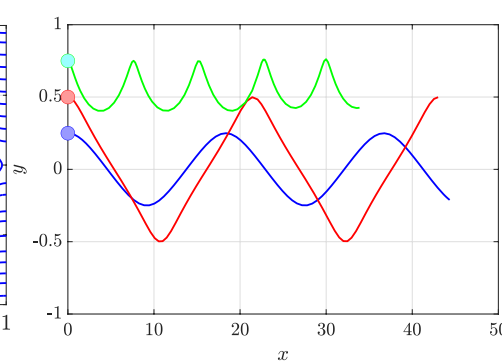
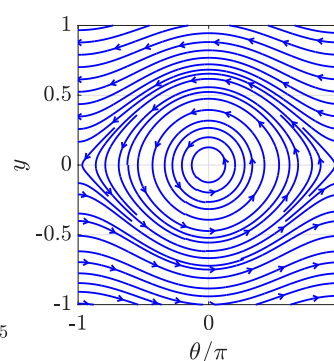
$\gamma = 0.5$



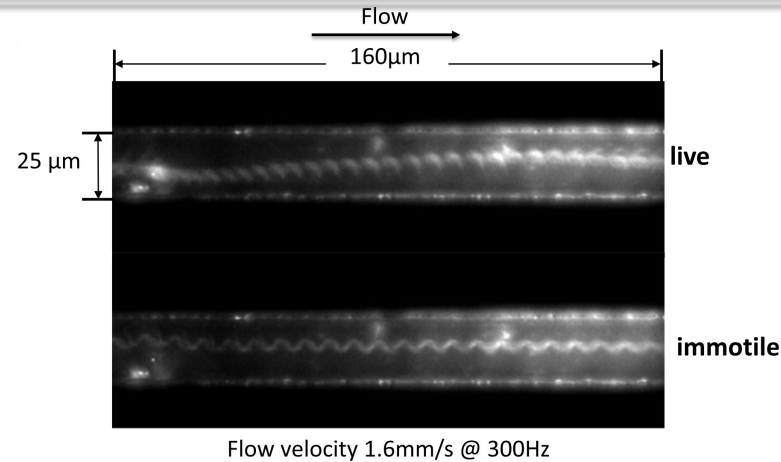
$\gamma = 1.1$



$\gamma = 10$



「ジオラマ」の例：2次元の力学系



トリパノソーマ（鞭毛虫）[Uppaluri et al. 2012]

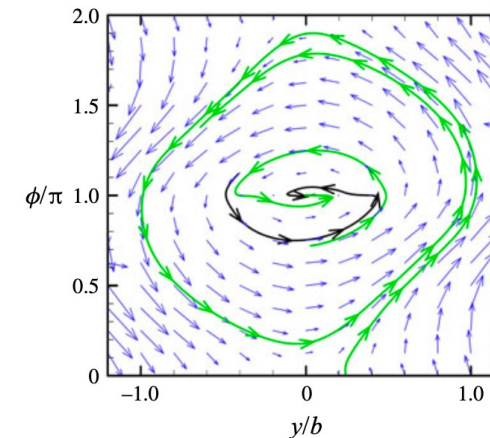
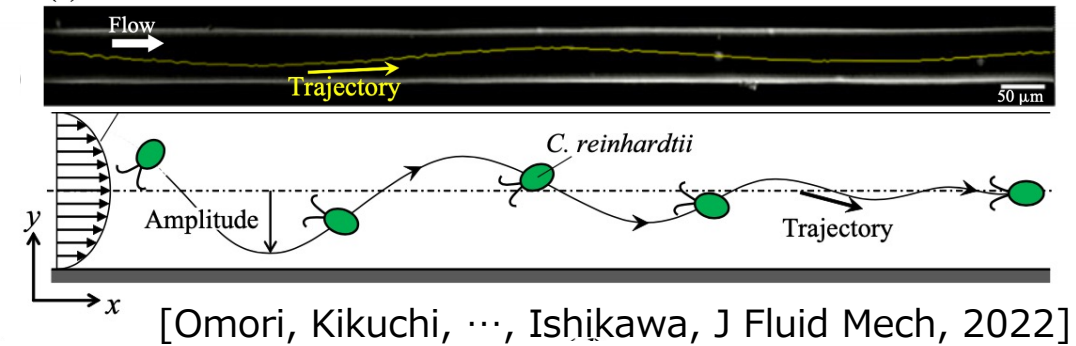
例：クラミドモナスの軸集中

- トリパノソーマは振動遊泳
- 遊泳速度と形状の時間変化があれば軸集中する
- もはやハミルトニアンは時間保存量ではない

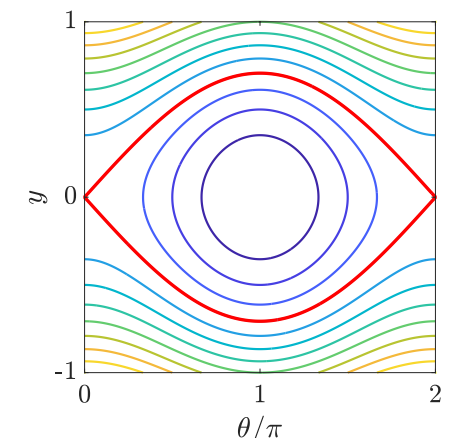
$$\frac{dH}{dt} < 0$$

- 安定性を保証している（**リャプノフ関数**）

[Walker, Ishimoto et al., J Fluid Mech, 2022]



数値計算



H の等高線

さまざまな安定性

さまざまな（固定点の）安定性

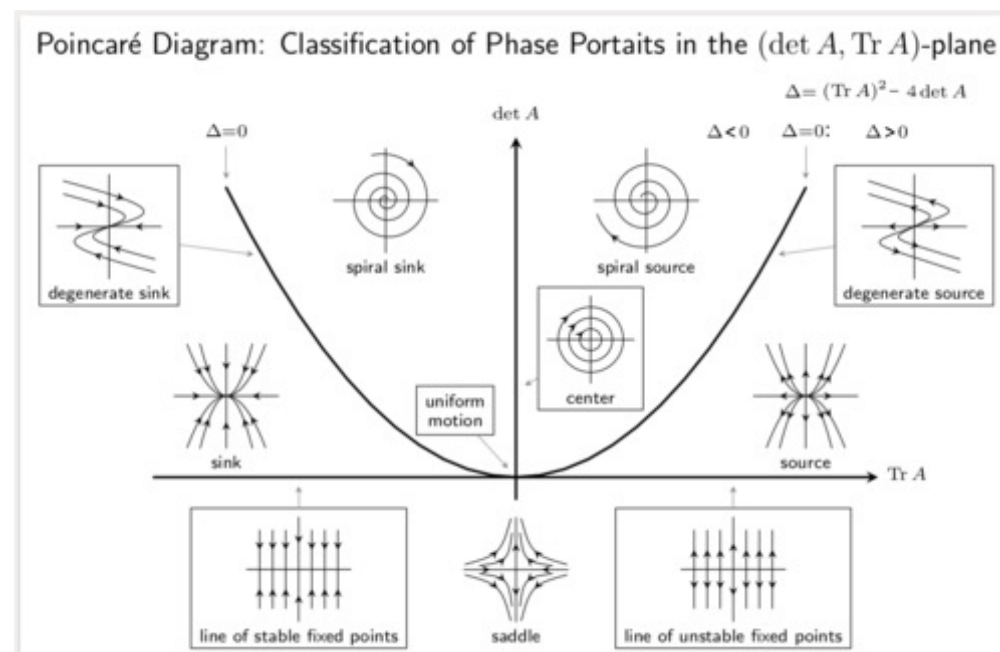
- 漸近安定： $t \rightarrow \infty$ でその点に近づく（漸近不安定： $t \rightarrow -\infty$ で近づく）
- リャプノフ安定： いくらでもその点の近くに留めておける
- 中立安定： 漸近安定ではないがリャプノフ安定（例：ハミルトン系）
- 線形安定： 線形化した方程式におけるヤコビ行列の固有値の実部が全て負（線形不安定： 実部に正のものがある）

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad f(x_0) = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{J} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|)$$

ハートマン–グロブマンの定理

- 線形化後の力学系が実部がゼロの固有値を含まない（双曲型力学系）とき、元の力学系と線形化方程式の力学系は局所的に位相同値（トポロジカルな性質は等しい）
- 力学系の構造を知りたいければ、まずは固定点を探してその周りの線形安定性を調べよ！



リミットサイクルとホップ分岐

例：管の中の微生物運動 [Zöttl & Stark, 2012]

➤ 壁面との流体相互作用 (p : ストークス二重極の強さ)

$$\begin{cases} \dot{x} = -\cos \theta + \gamma(1 - y^2) \\ \dot{y} = \sin \theta - p(3 \sin^2 \theta - 1) \left[\frac{1}{(1 - y)^2} - \frac{1}{(1 + y)^2} \right] \\ \dot{\theta} = -\gamma y - p \sin \theta \cos \theta \left[\frac{1}{(1 - y)^3} - \frac{1}{(1 + y)^3} \right] \end{cases}$$

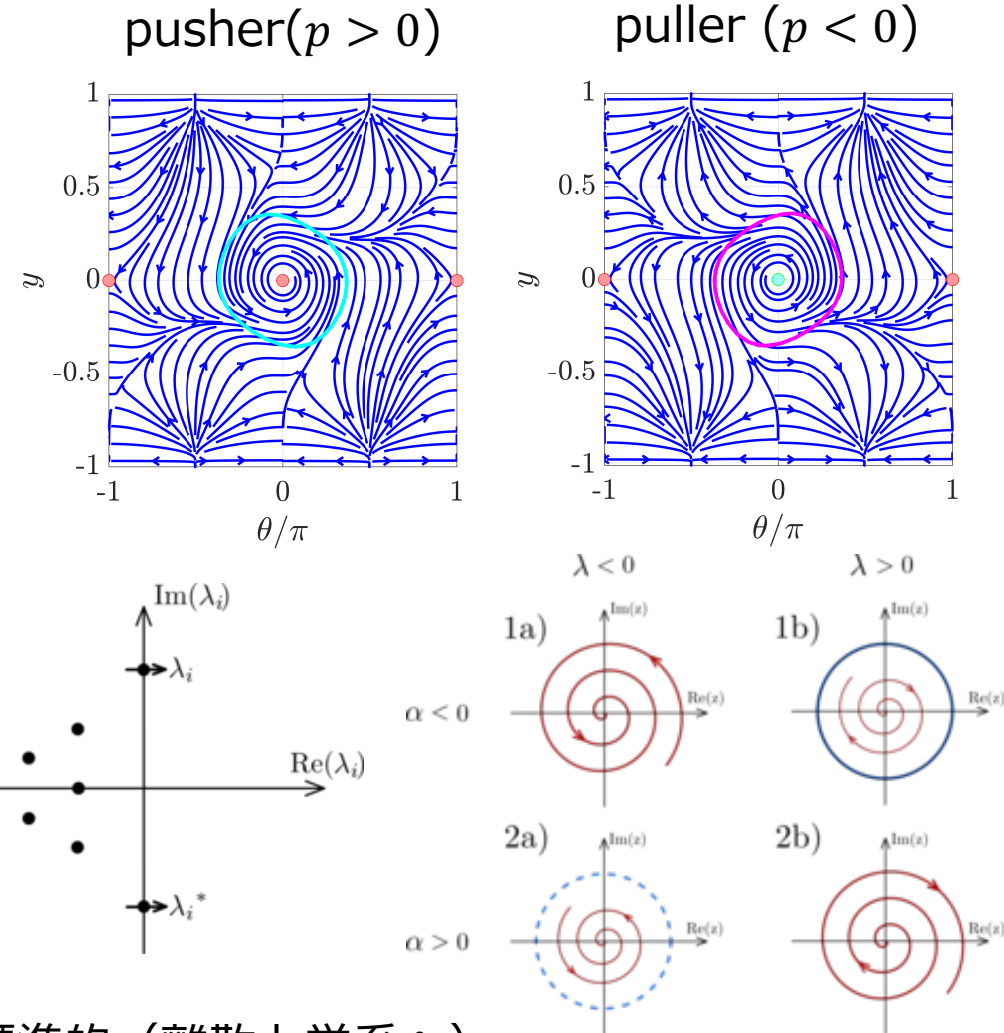
ポアンカレ – ベンディクソンの定理

➤ 2次元力学系では、軌道が無限遠にいかないのなら、
固定点かリミットサイクル軌道に漸近する

ポアンカレ – ホップの定理

➤ 線形化方程式の複素共役固有値が虚軸を横切る時、
ホップ分岐（リミットサイクルの発生）が生じる

※周期軌道の安定性の解析ではポアンカレ写像を用いた議論が標準的（離散力学系へ）



3次元以上の力学系

カオス軌道が存在できる

- 初期値敏感性・再帰性・無限の周期・ストレンジアトラクタ・・・
- 乱流はカオス的（高レイノルズ数流れ）
- ポアンカレ・ベンディクソンの定理は2次元でのみ成立

「行動力学」も一般には高次元力学系，しかし現実には低次元？

次元圧縮・縮約 (dimensionality reduction)

- アルゴリズムの抽出，概念化の源
- 高次元のものを高次元のまま扱うことも最近是可以？（機械学習？本質は低次元？）

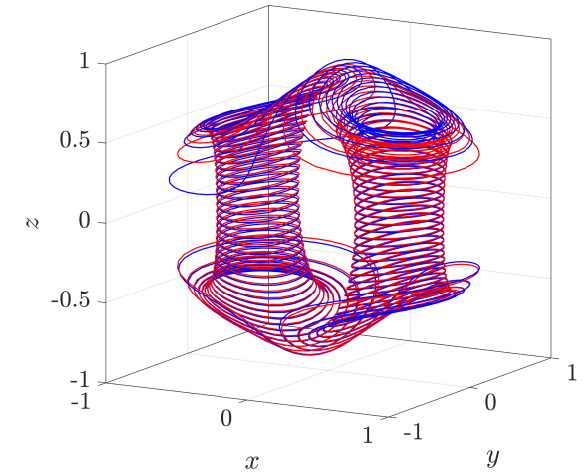
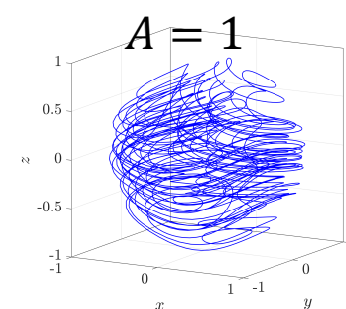
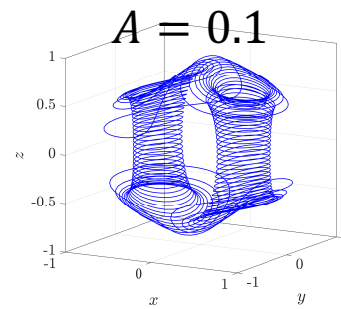
様々な縮約手法（数理モデルの簡単化）

- 連続体近似（分子運動論から流体力学へ）
- 中心多様体縮約（例：分岐の標準形，多重尺度展開）
- 位相縮約（振動現象をその位相のみで表現）
- データ駆動型数理モデル（??）

「ジオラマ」の例：カオス力学系

ラグランジュカオス

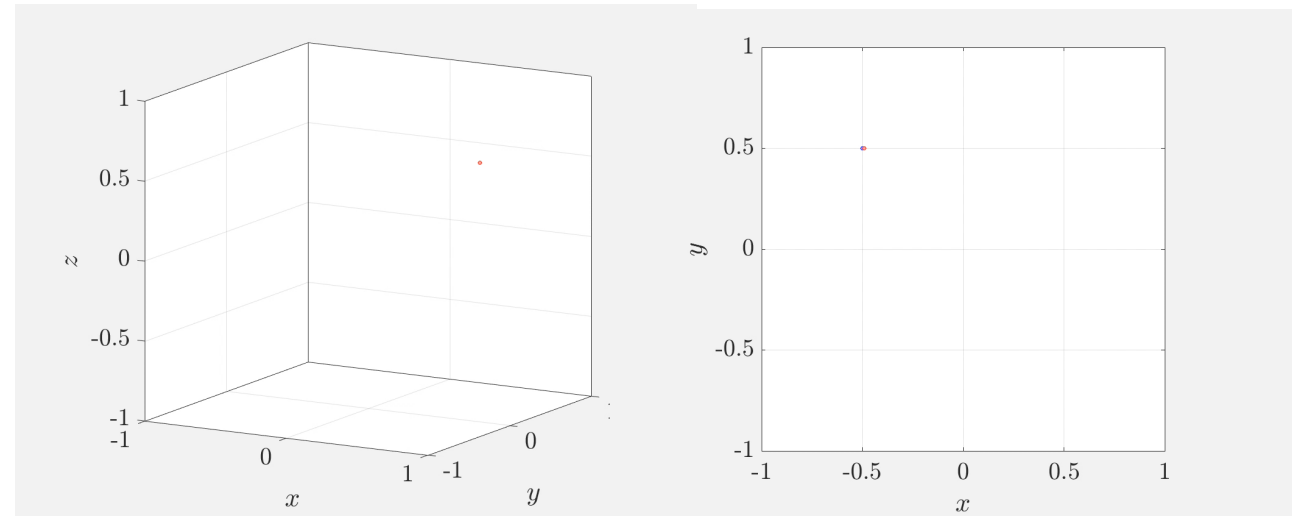
- 流れが定常流だとしても粒子の運動はカオス的になりうる
- 採餌の際には有用？



例：球内のストークス流れ

[Bajer & Moffat, 1990]

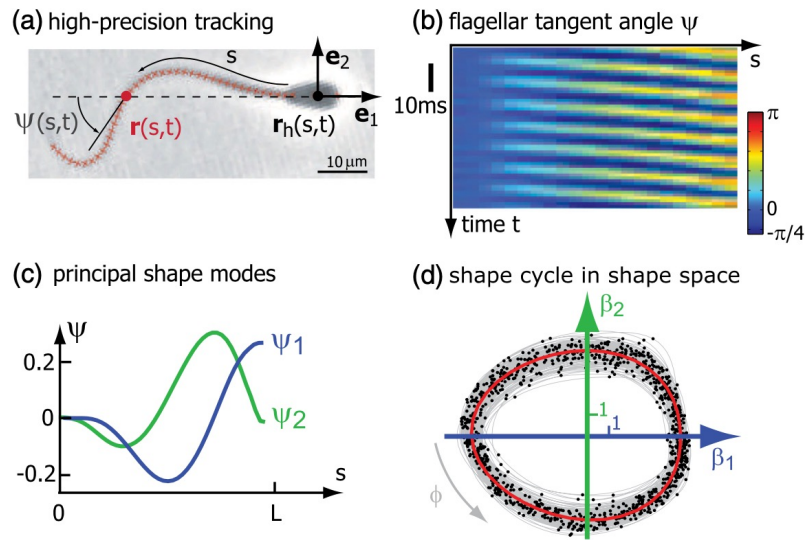
$$\begin{cases} \dot{x} &= Az - 8xy \\ \dot{y} &= 11x^2 + 3y^2 + z^2 - 3 \\ \dot{z} &= -Ax + 2yz \end{cases}$$



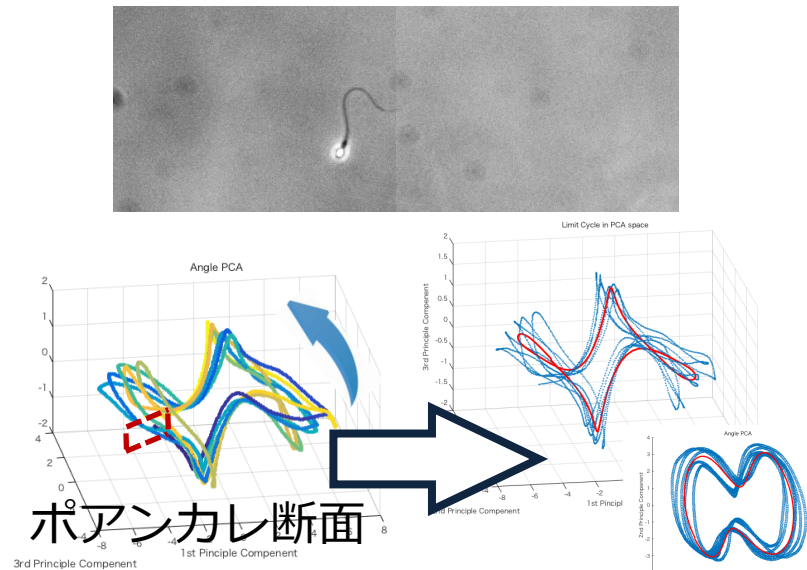
「ジオラマ」の例：3次元以上の力学系

例：精子鞭毛波形と主成分分析

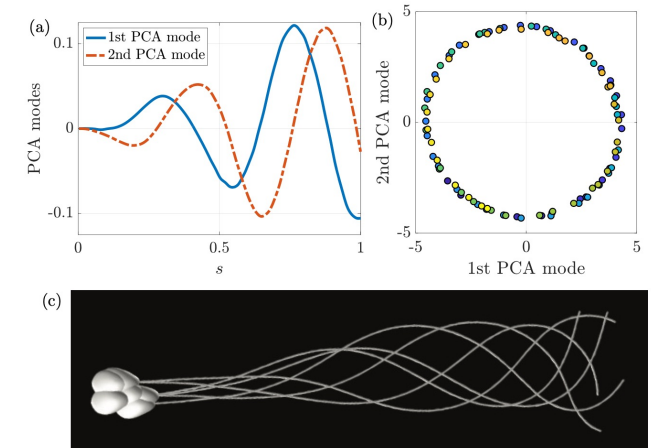
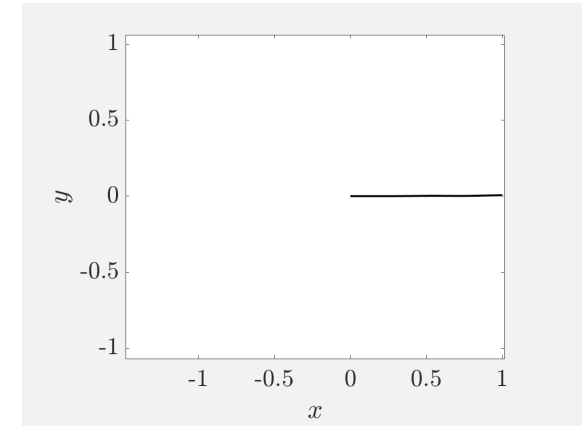
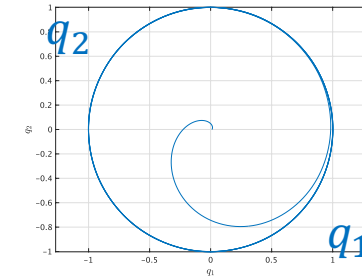
- 時間周期的な波形は少数の主成分(PCA)モードによる形状空間内のリミットサイクル



[Ma et al., Phys Rev Lett (2014)]



[Ishimoto et al., Phys Rev Lett (2017)]

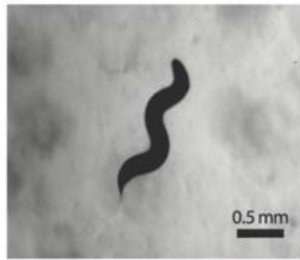


[Ishimoto et al. PRX Life, to appear]

「ジオラマ」 的な例： 3次元以上の力学系

例：線虫の行動と力学系モデル [Stephens et al. PLoS Comput Biol (2008)]

- 線虫の「運動方程式」をデータから探す
- 2次元PCA空間内のリミットサイクル軌道
- 位相 ϕ に縮約



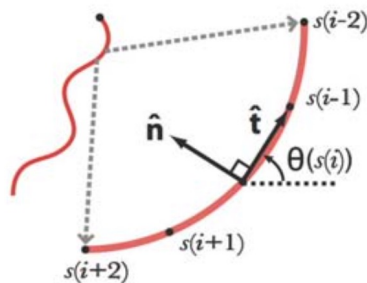
A



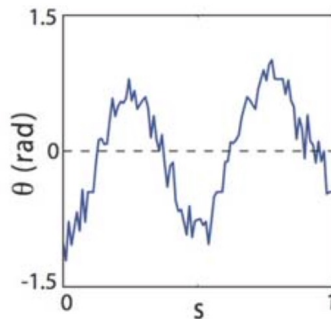
B

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \omega \\ \dot{\omega} = f(\phi, \omega) + \sigma(\phi, \omega) \eta(t) \end{cases}$$

力学系のフロー ノイズ



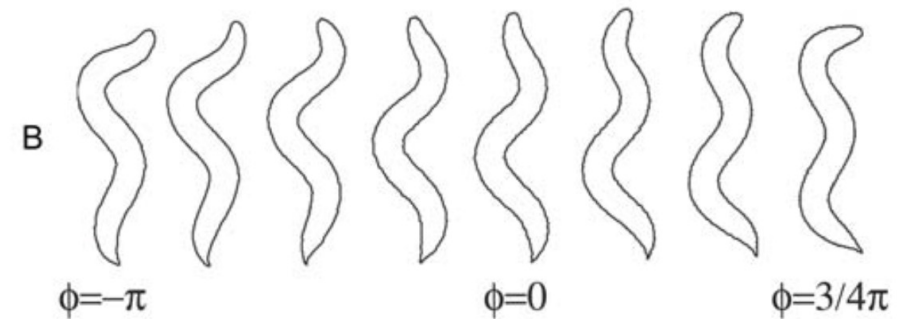
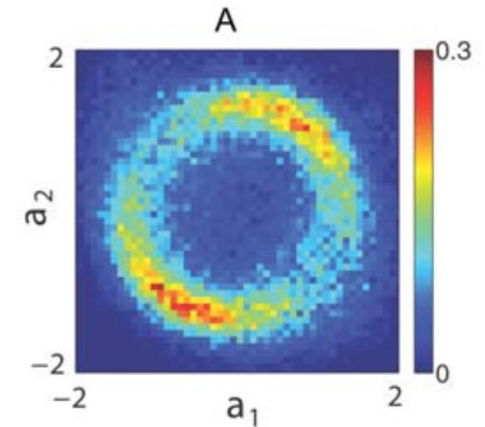
C



D



Movie from [Iino Lab](#) (U. Tokyo)



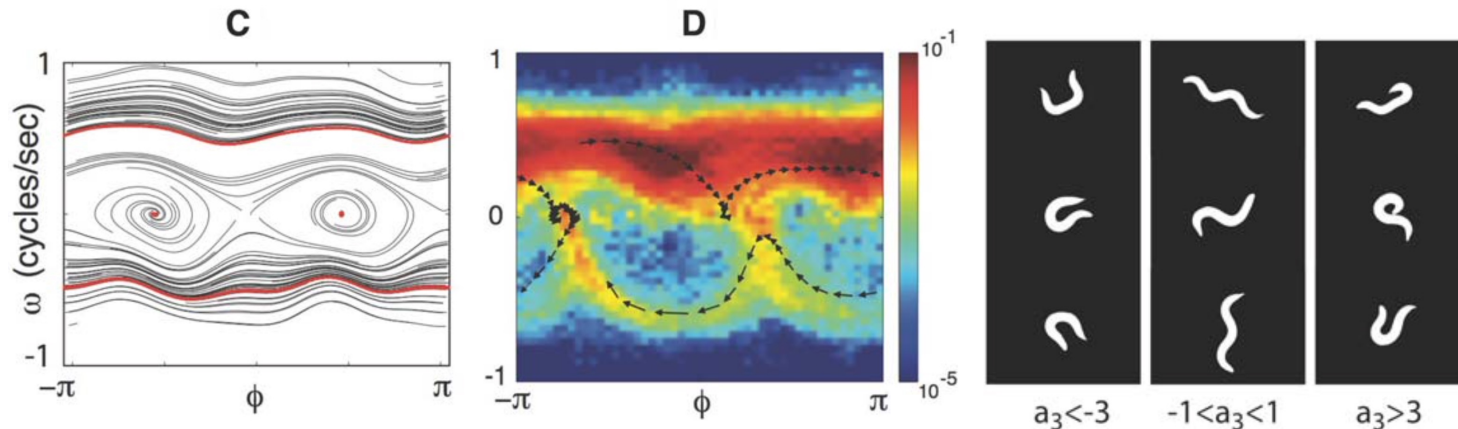
「ジオラマ」 的な例： 3次元以上の力学系

例：線虫の行動と力学系モデル [Stephens et al. PLoS Comput Biol (2008)]

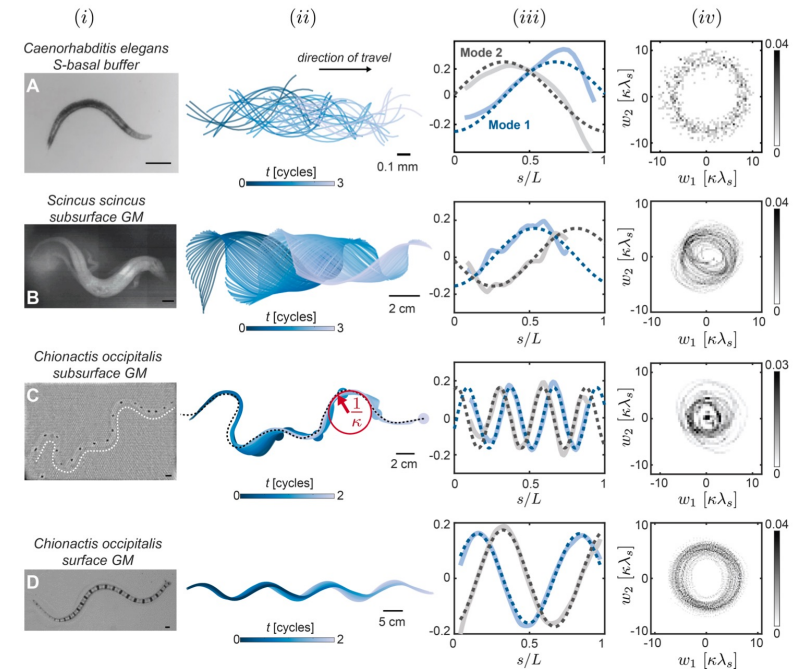
- 線虫の前進・停止・後退の行動を表す「運動方程式」
- PCAの第3モードは方向転換に対応

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \omega \\ \dot{\omega} = f(\phi, \omega) + \sigma(\phi, \omega) \eta(t) \end{cases}$$

力学系のフロー ノイズ



※ 多様な運動に応用可能（？）



[Rieser et al. arXiv (2019)]

今日のまとめ・補足

時間変化（微分方程式）を幾何学的に捉える数学

- 状態空間や解軌道の性質を調べる
- 徹底力学数理モデルの力学系の構造がアルゴリズム化のヒント？

キーワード

- 固定点・安定性・分岐・リミットサイクル・カオス・次元圧縮・縮約

今日紹介したのは、とても簡単な場合のみ。課題は山積み

時間遅れ系

- 本質的には無限次元

非自励系

- 生き物の変形は時間周期的な内力／外力によって駆動

安定性・制御から見えてくる？

- 最適化だけでない生物行動

決定論 vs 確率論

- ミクロとマクロを切り離す