令和４年度・数学入門公開講座

4 August 2022

日常を彩る流体力学：
「ながれ」の数理モデル

[Day 4] 粘性

京都大学数理解析研究所・石本 健太

流体とはなんだったのか？

コーシーの運動方程式
（連続体の運動量保存則）

$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}\right] = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}$$

$\boldsymbol{\sigma}$ ：ストレステンソル（応力）

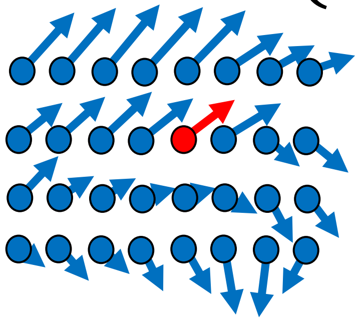
※ 隣り合う流体表面に働く力　$[\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}]_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$

➢ 水や空気といった**ニュートン流体**

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}$$

μ ：粘性係数

$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{a}, t)$



"流体粒子"を**ラベル**づけ
$\boldsymbol{a}$ ：ラグランジュ座標（ラベル）

ナビエ・ストークス方程式

$$\rho\left[\underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}}_{\text{(慣性力)}}\right] = \underbrace{-\boldsymbol{\nabla}p}_{\text{(圧力)}} + \underbrace{\mu\Delta\boldsymbol{u}}_{\text{(粘性力)}}$$

日常を彩る流体力学：
「ながれ」の数理モデル

[Day 4] 粘性
§1 猫＝流体説

猫は液体である？

Liquids Take the Shape of the Container While Maintaining a Constant Volume

Image credits: gregfoster

That’s it. So Cats Are Liquids

Image credits: huffingtonpost.com

boredpanda, 15 proofs that cats are liquids
https://www.boredpanda.com/cats-are-liquids/

「水は方円の器にしたがう」

Instagram@cakes1todough1
www.instagram.com/p/BgAMIvDhqQ3/?hl=ja&taken-by=cakes1todough1

παντα ρει＝万物は流転する

- 流動体一般を扱う学問分野＝**レオロジー**

On the rheology of cats

M.A. Fardin[1,2,3,*]

[1] *Université de Lyon, Laboratoire de Physique, École Normale Supérieure de Lyon, CNRS UMR 5672, 46 Allée d’Italie, 69364 Lyon cedex 07, France.*
[2] *The Academy of Bradylogists.*
[3] *Member of the Extended McKinley Family (EMF).*
(Dated: July 9, 2014)

In this letter I highlight some of the recent developments around the rheology of *Felis catus*, with potential applications for other species of the felidae family. In the linear rheology regime many factors can enter the determination of the characteristic time of cats: from surface effects to yield stress. In the nonlinear rheology regime flow instabilities can emerge. Nonetheless, the flow rate, which is the usual dimensional control parameter, can be hard to compute because cats are active rheological materials.

イグノーベル
物理学賞 (2017)

Fardin, Rheol Bull (2014)

デボラ数

The mountains flowed before the Lord
（山々は主の前に流れた、「子師記」）

デボラ数 $De = \dfrac{\tau}{T}$

τ: 緩和時間

T:現象の時間スケール

$De \ll 1$: 流体

$De \gg 1$: 固体（弾性体）

アスファルト Fig: wikipedia
「ピッチドロップ実験」

Fig: wikipedia

YouTube@ MinuetLaboratory
https://youtu.be/_esC9Rg0SAA

氷河やマントルの運動も流体方程式
（ナビエ・ストークス方程式）で記述できる

粘性とは何か？

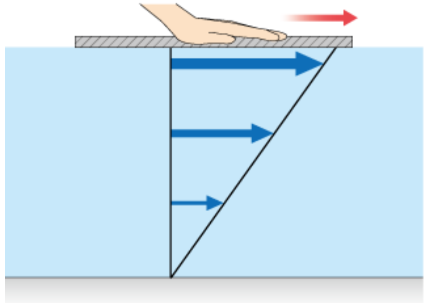
ずり（速度勾配）に対する力の応答

- 圧力を除いた応力テンソル項に注目

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$$

- 一般化ニュートン流体

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu(\mathbf{E})\mathbf{E}$$



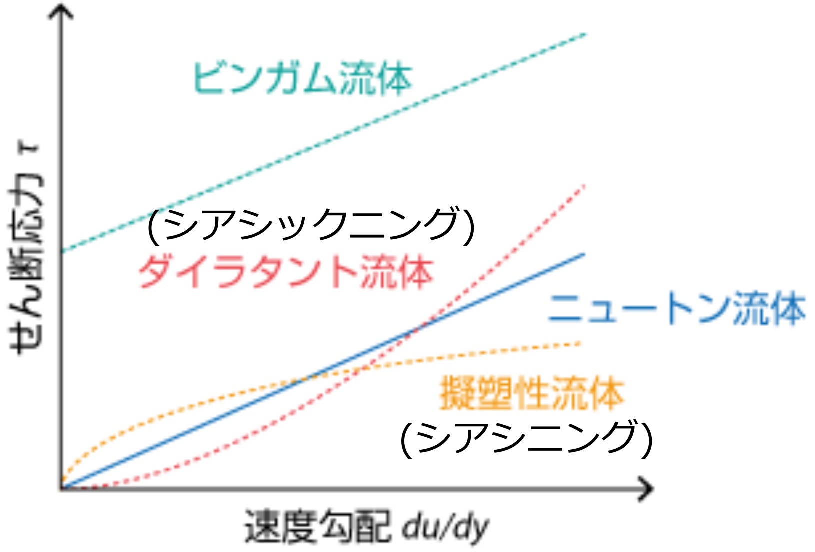


Fig: クレイドルウェブサイトより
https://www.cradle.co.jp/glossary/ja_H/detail0010.html

※ 外からの力の与え方によって物体応答も変わる

ダイラタンシー

Fig: 東京理科大学川村研究室ウェブサイトより
https://www.rs.kagu.tus.ac.jp/~elegance/jikkensp10/dairatansi.html

シアシニング

Fig: 文具のとびらウェブサイトより
https://www.buntobi.com/articles/entry/stationery/007765/

非ニュートン流体の運動方程式？

マクスウェルモデル(1867年)

- 粘弾性＝粘性と弾性をもつ物体のモデル

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$$

λ: 弾性緩和時間

$$\lambda \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} + \boldsymbol{\tau} = 2\mu \mathbf{E}$$

$$De = \frac{\lambda}{T}$$

$De \ll 1$：流体

$De \gg 1$：弾性体

構成方程式の原理と数理モデル

- 多くの非ニュートン流体モデルは物質客観性の原理を満たさない
- 物質客観性を満たそうとすると一般にモデルは複雑になる
- 非ニュートン流体の方程式は「物質応答の有効モデル」

- 流体とともに変形する座標系における時間微分が必要

例：上対流マクスウェル流体 $\dfrac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} \mapsto \dfrac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} + \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\tau} - (\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}$

複雑流体・ソフトマター

複雑流体(complex fluids)

- 流体中に他の液体・固体・気体混じった混合流体
- 流体状態にこだわらない場合には**ソフトマター**とも

- これらの（有効的な）構成方程式は？
- 機械学習(AI)によるモデルのパラメータ推定や流体方程式そのものの推定も？

細胞
(イラスト)

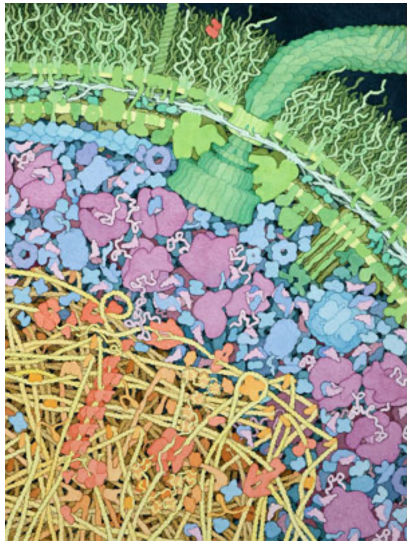


Fig: Goodsell, *The Machinary of Life*

Figs:
https://macaro-ni.jp/8797
https://www.cotta.jp/special/article/?p=6366
https://www.kurashiru.com/recipes/3d184179-e045-4b82-adec-5ef2d7902ac8
https://www.nichireifoods.co.jp/media/14852/

Instagram@cakes1todough1
www.instagram.com/p/BgAMlvDhqQ3/?hl=ja&taken-by=cakes1todough1

まとめ

[Day 4] 粘性
§1: 猫＝流体説

- 物体が流体かどうかは現象の時間スケールによる
- 内部構造を持たない水・空気はニュートン流体に従う
- 粘性と弾性を併せ持つ物体の流れも日常に多く存在する

日常を彩る流体力学：
「ながれ」の数理モデル

[Day 4] 粘性
§2 ドロドロ世界の住人

低レイノルズ数の生き物

$Re < 1$

微生物の世界

?

$$Re \approx \frac{10^3\mathrm{kg/m^3}\cdot 1\mathrm{m/s}\cdot 1\mathrm{m}}{10^{-3}\mathrm{kg/m{\cdot}s}} = 10^6$$

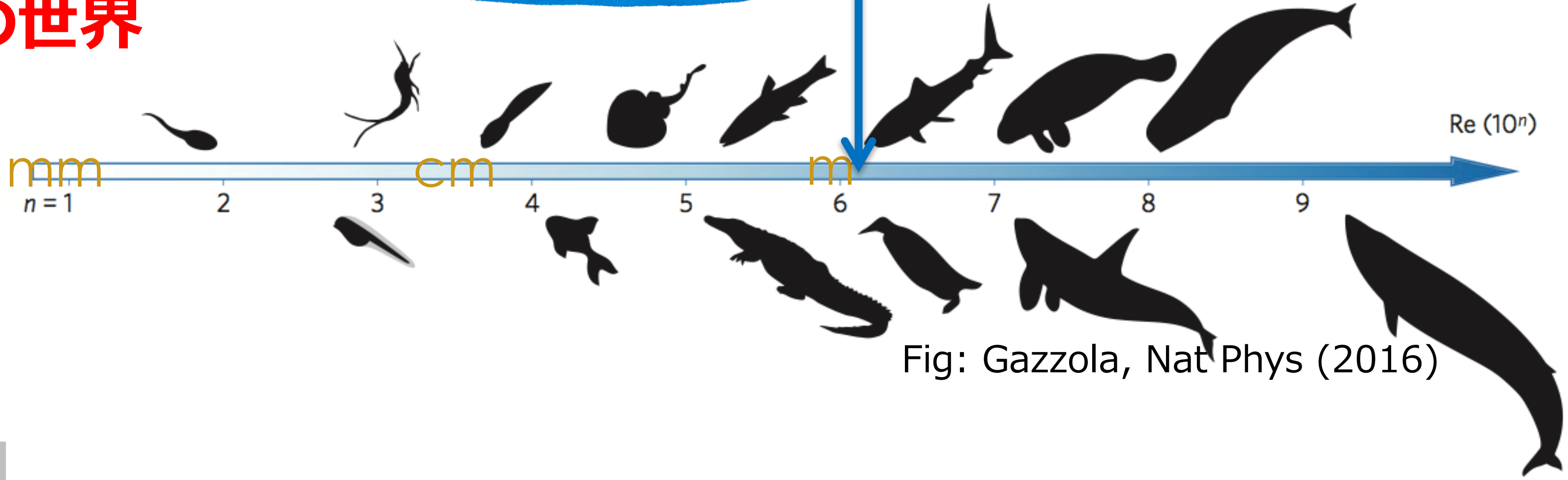


Fig: Gazzola, Nat Phys (2016)

ストークス方程式

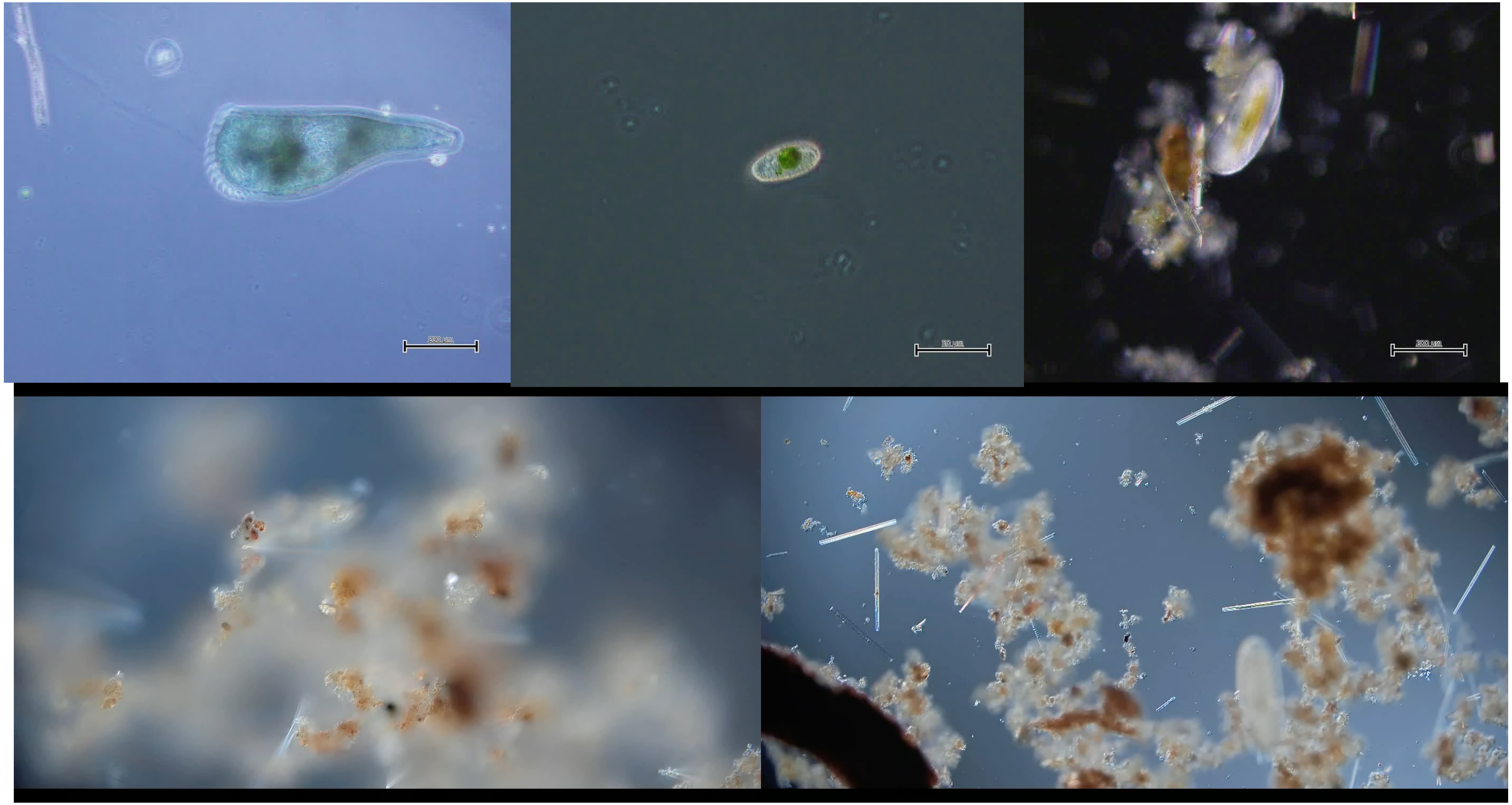
$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{u}\right] = -\boldsymbol{\nabla} p + \mu\Delta\boldsymbol{u}$$

(慣性力)　(圧力)　(粘性力)

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{\text{慣性効果}}{\text{粘性効果}}$$

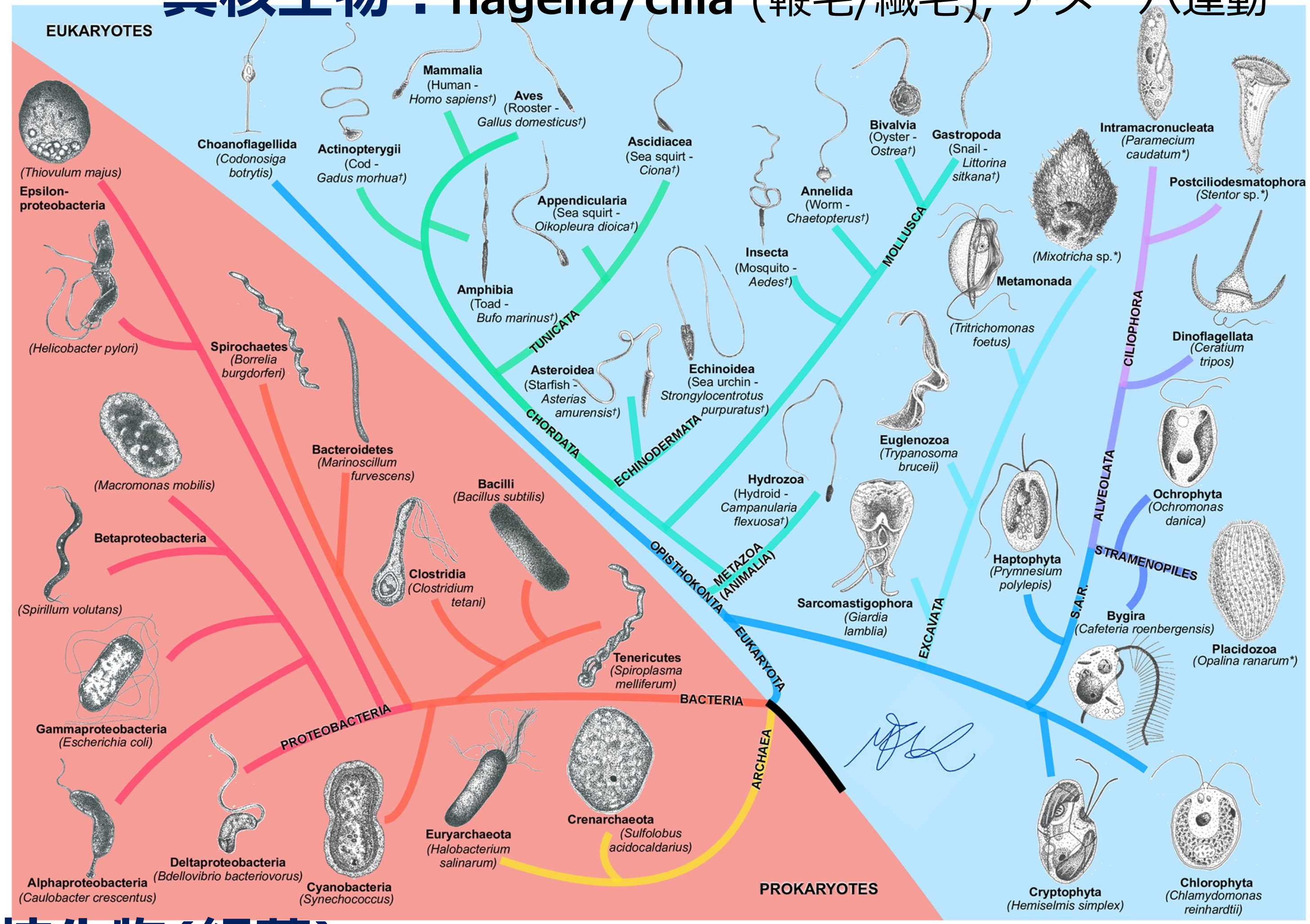
サイズが小さい=粘性効果が大きい=慣性が小さい

身の回りの見えない生き物たち

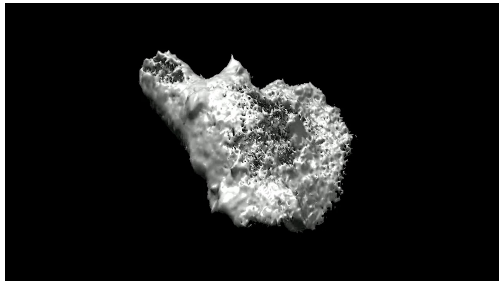


泳ぐ微小生物

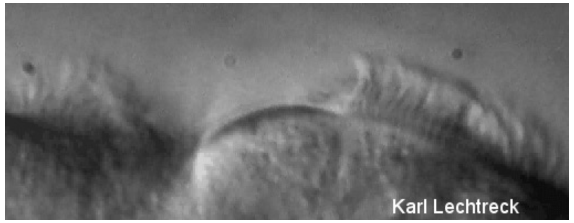
真核生物：flagella/cilia (鞭毛/繊毛), アメーバ運動



繊毛虫 (unpublished)



白血球(リンパ球)　Aoun et al. (2020)



気道 (マウス)

原核生物(細菌)：flagella (バクテリアべん毛)

Fig: Velho Rodrigues et al. PLoS One (2021)

ストークス流れと時間反転対称性

ストークス方程式

$$\mathbf{0} = -\nabla p + \mu \Delta \boldsymbol{u}$$

(慣性力)　(圧力)　(粘性力)

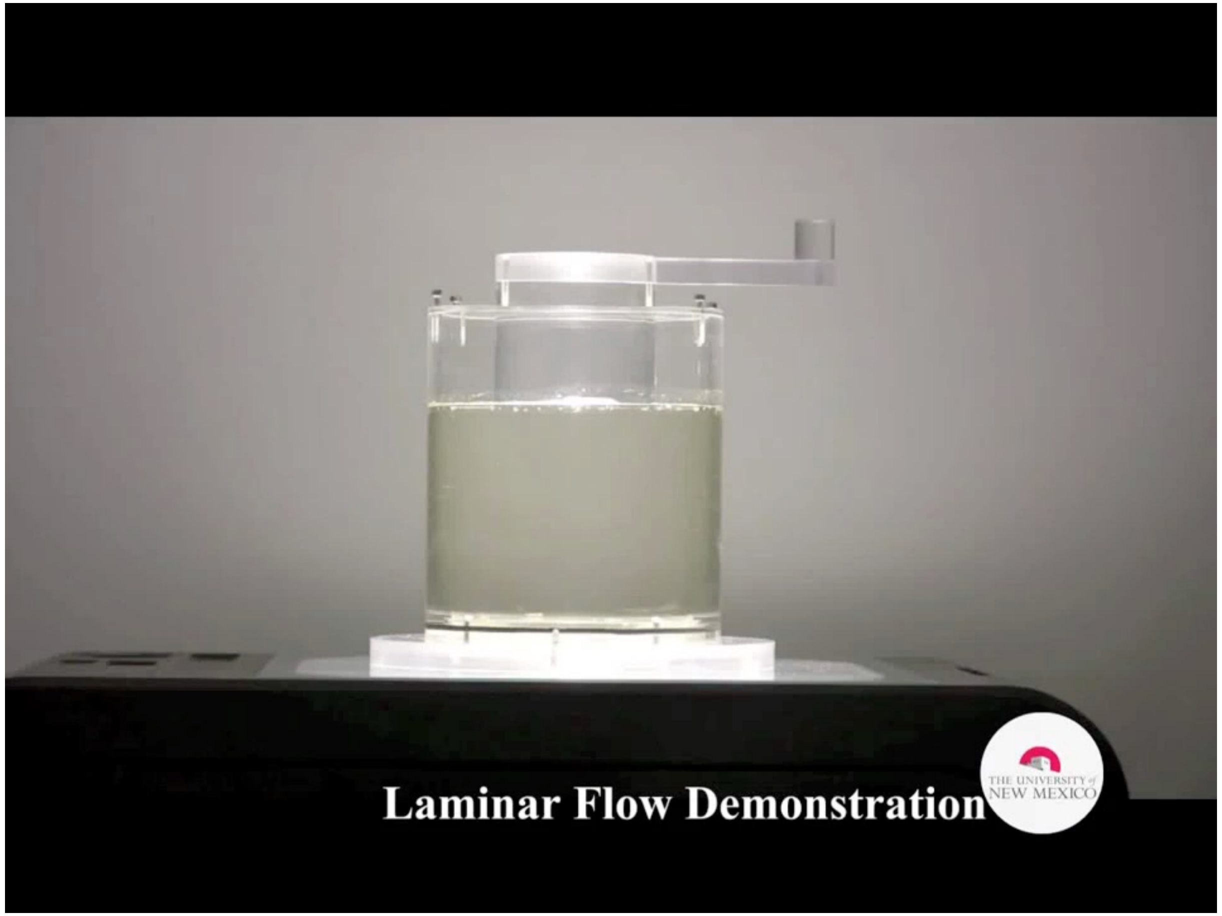
時間の流れの向きによらない
境界の情報のみで運動が決まる

時間反転対称性

（方程式がもつ性質）

境界条件（形の情報）

流体は物体(生物)の表面にくっついて流れる



YouTube@ UNM Physics and Astronomy (3 倍速)
https://youtu.be/_dbnH-BBSNo

飛ぶ矢が止まる世界線

アリストテレスの力学
力 ∝ 速度

≈

低レイノルズ数の世界
（顕微鏡の中の世界）

ゼノンの「飛ぶ矢のパラドックス」

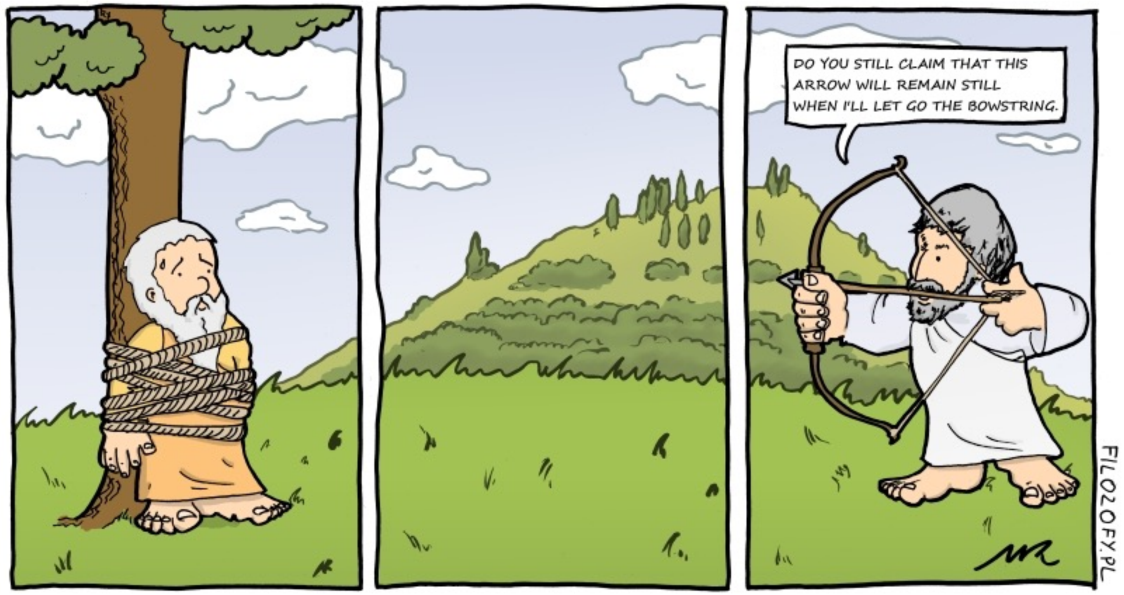
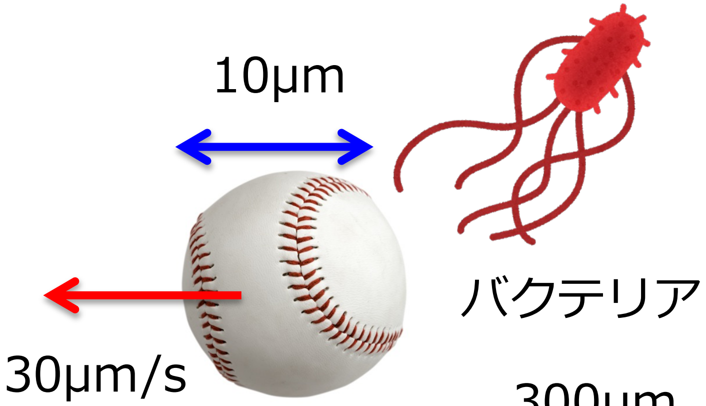


Fig: Filozofy.plウェブサイトより



微小世界でのピッチング

手を離れた瞬間にボールは止まる

止まるまでの時間≈**10万分の1秒**

止まるまで進む距離 ≈ **1Å=0.1nm**

パーセルの帆立貝定理

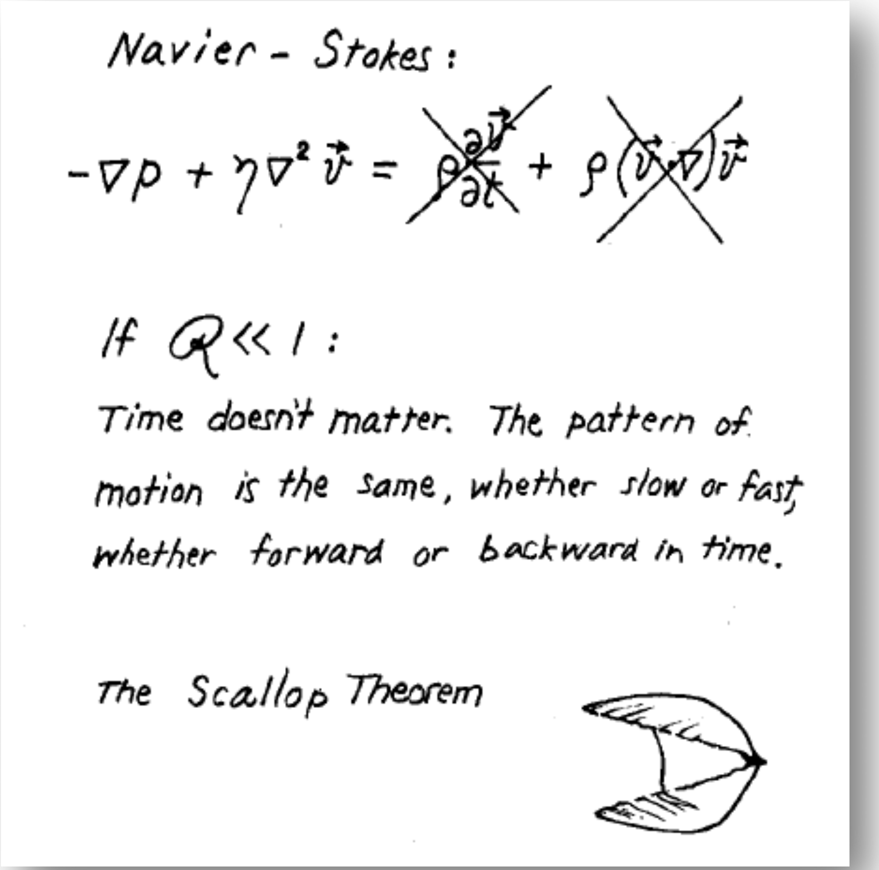
帆立貝定理（scallop theorem）

微生物は**往復運動**では移動できない

往復運動: 行きと帰りの形が同じ変形

Purcell (1977), Ishimoto & Yamada (2012)

G. I. Taylor Lecture on Low Reynolds Number Flow
@ National Committee for Fluid Mechanics


Navier - Stokes:

$$-\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} = \cancel{\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + \cancel{\rho (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}}$$

If $R \ll 1$:

Time doesn't matter. The pattern of motion is the same, whether slow or fast, whether forward or backward in time.

The Scallop Theorem

Purcell, Am J Phys (1977)

帆立貝定理の証明

証明（雰囲気だけ） Ishimoto & Yamada, SIAM J Appl Math (2012)

ストークス方程式の線形性を使う

生き物の遊泳速度

$$U(t) = K(s)\dot{s}$$

$$X = \int_0^T U\,dt = \int_0^{T_0} U\,dt + \int_{T_0}^{T} U\,dt$$

$$= \int_0^{T_0} K\big(s(t)\big)\dot{s}(t)\,dt + \int_{T_0}^{T} K\big(s(t)\big)\dot{s}(t')\frac{dg}{dt}\,dt \qquad (t' = g(t)\text{と書いた})$$

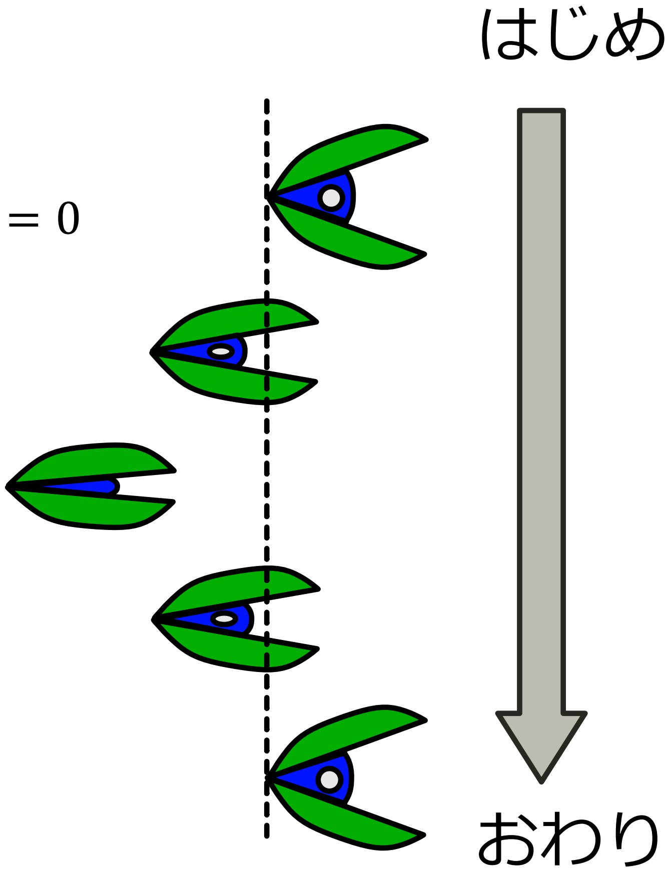
$$= \int_0^{T_0} K\big(s(t)\big)\dot{s}(t)\,dt + \int_{T_0}^{0} K\big(s(t')\big)\dot{s}(t')\,dt' \; = 0$$

形状パラメータ: $s \in [0,1]$

行きと帰りの時刻の対応付け:

$g: [T_0, T] \to [0, T_0]$ $\qquad g(T_0) = T_0,\; g(T) = 0$

$$s(t) = s(g(t))$$



帆立貝定理はRe<<1でのみ成り立つ

注意：実際の帆立貝は泳げます

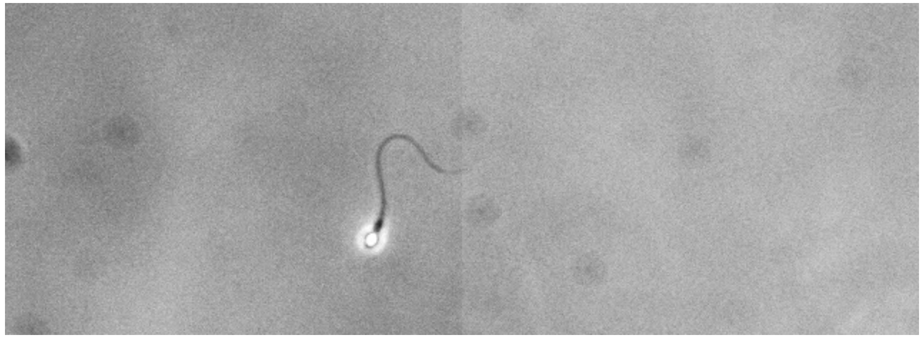
Youtube@benthiccanada’s channel

https://youtu.be/_2iXHBuSIJY

微生物の遊泳術

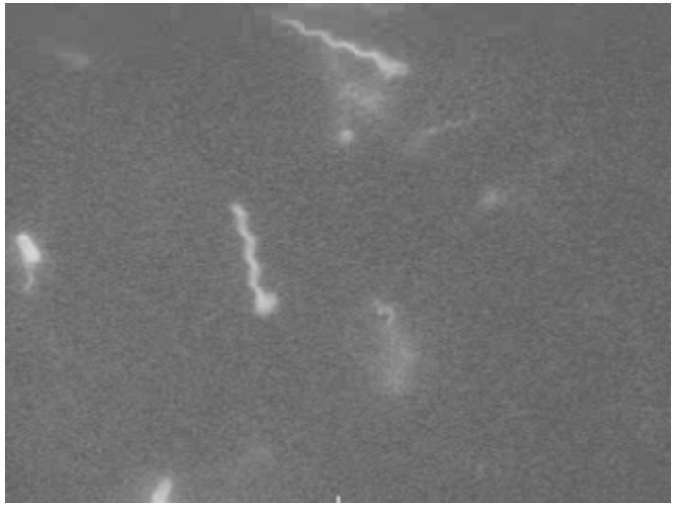
クラミドモナス（藻の仲間）

YouTube@Guasto Lab @Tufts



精子（ヒト）

Ishimoto et al. Phys Rev Lett (2017)



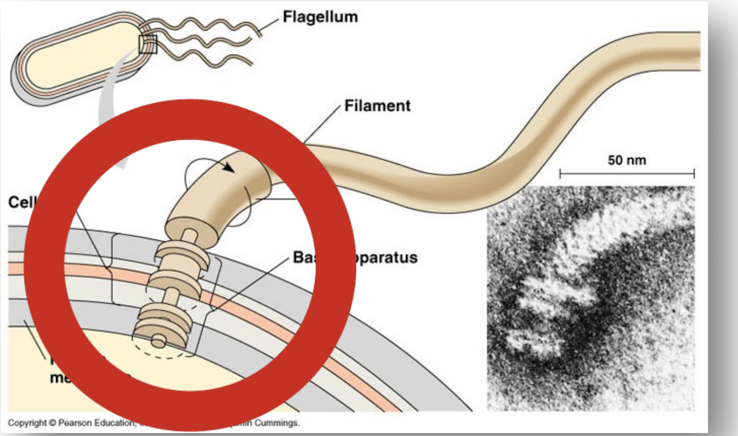
大腸菌　H. Berg Lab.

Fig: Purcell (1977)

微生物は帆立貝定理の制約を上手に避けている

大腸菌のラン・アンド・タンブル運動
・・・帆立貝定理だとどこにも進めない？

柔らかい「フック」に自由度がある



まとめ

[Day 4] 粘性
§2: ドロドロ世界の住人

- レイノルズ数が小さな状況ではストークス方程式が現象をよく記述する
- 流れの時間反転対称性から帆立貝定理が成り立つ
- 微生物の運動は周囲の流体方程式から強い制限を受けている

日常を彩る流体力学：
「ながれ」の数理モデル

[Day 4] 粘性
§3 流体力学は生きている

アクティブ流体

アクティブマター

- エネルギーを運動に変換する物質、あるいはその集合体の総称
- 例：自己推進粒子
- 特に流体的に振る舞うもの＝**アクティブ流体**

ムクドリの群れ

Fig: Wikipedia

魚群

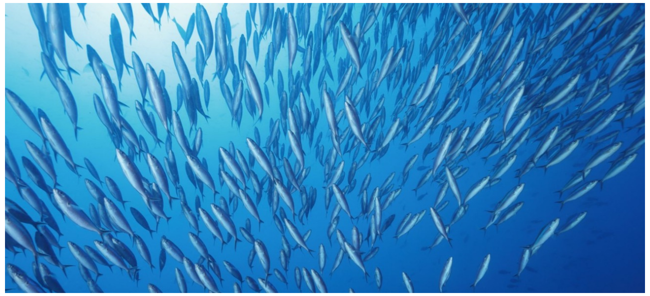
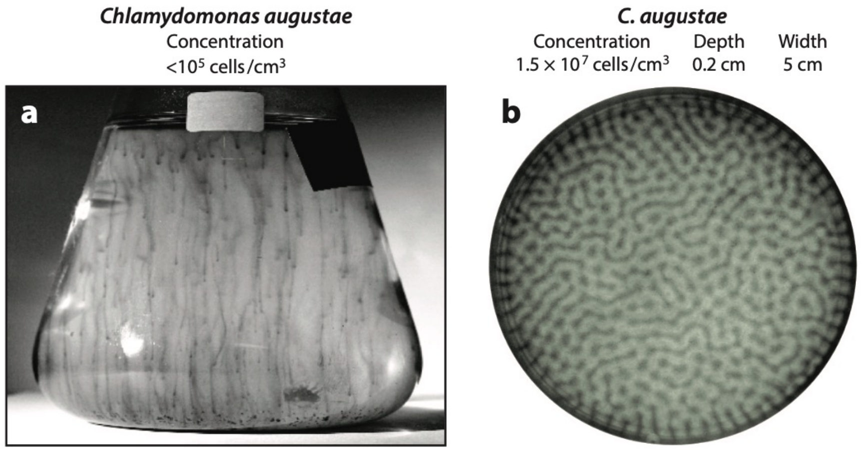


Fig: diver-onlineウェブサイトより
https://diver-online.com/archives/go_to_diving/5063



生物対流
(微生物集団のつくるパターン)

Fig: Bees (2020)

Instagram@cakes1todough1
www.instagram.com/p/BgAMlvDhqQ3/?hl=ja&taken-by=cakes1todough1

ストークス極と微生物周りの流れ

ストークス極

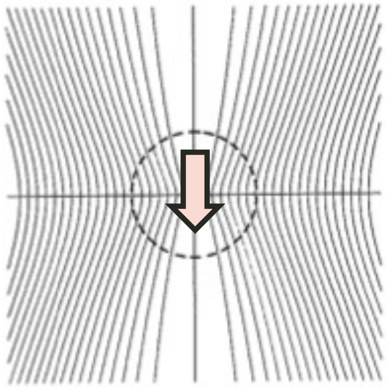
- ストークス方程式の基本解
- 点力によって駆動する流れ

$$-\nabla p + \mu \Delta \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{g}\, \delta(x - x_0)$$

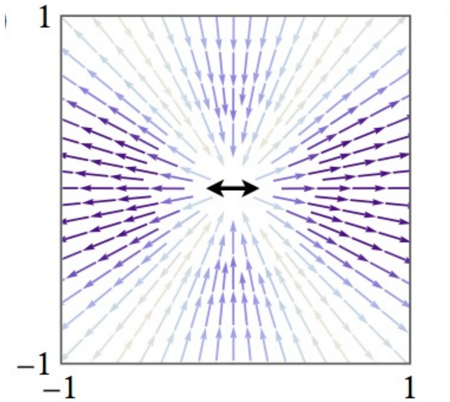
$$u_i(\boldsymbol{x}) = G_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) g_j$$

$$G_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{8\pi\mu}\left(\frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{r_i r_j}{r^3}\right)$$

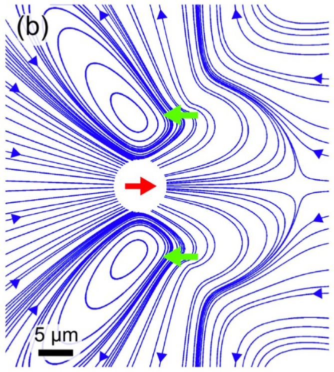
$$r_i = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)_i,\ r = |\boldsymbol{r}|$$



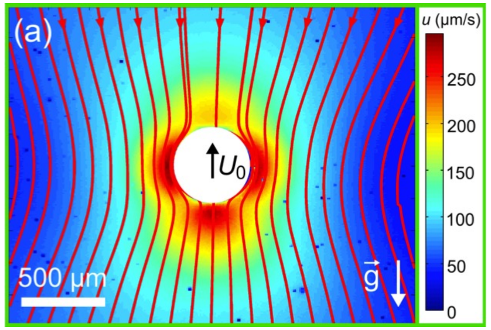
ストークス極



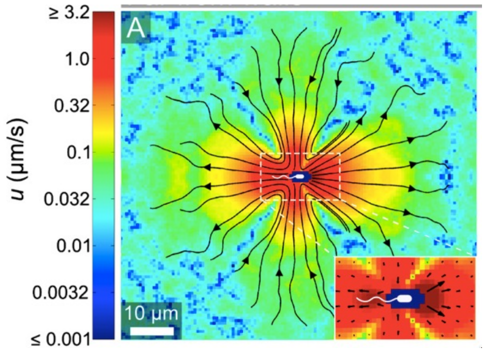
ストークス二重極



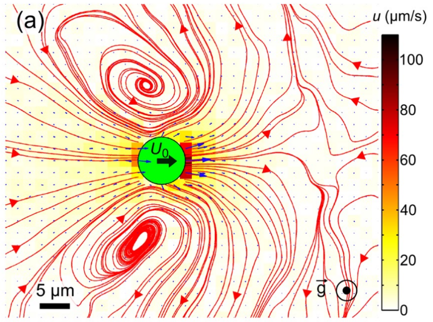
ストークス三重極*



ボルボックス*
（藻の仲間）



大腸菌**



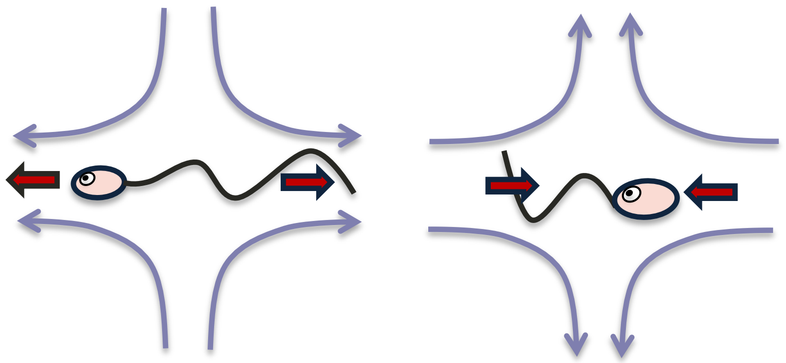
クラミドモナス*

バクテリア超流動

ストレスレット

- 力の１次モーメントの対称成分
- 生物周りの流れの遠方での支配項
- 流体力学的な遊泳型puher/puller (プッシュ型/プル型)を決める

$$S_{ij} = \mathrm{sym} \int_S g_i(\boldsymbol{x}_0)\, {x_0}_k \mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}_0}$$



pusher　　　　puller

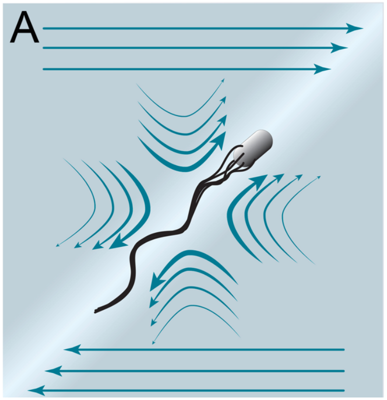
懸濁液の粘性

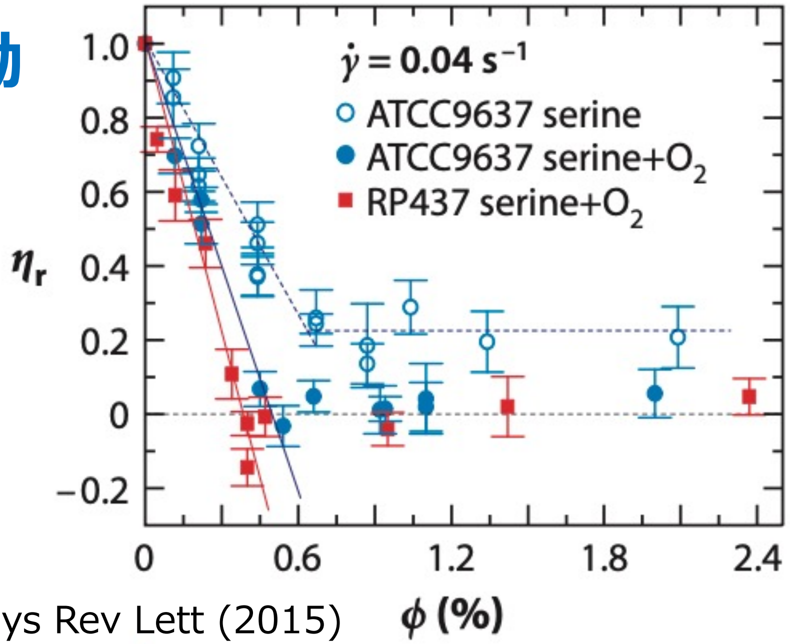
- 生き物の生み出すストレスレットによって有効粘度が変化する

pusher=粘性下がる

puller=粘性上がる

バクテリア超流動



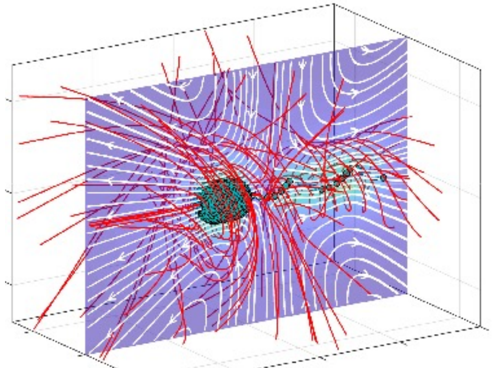


Lopez et al, Phys Rev Lett (2015)

バクテリア乱流

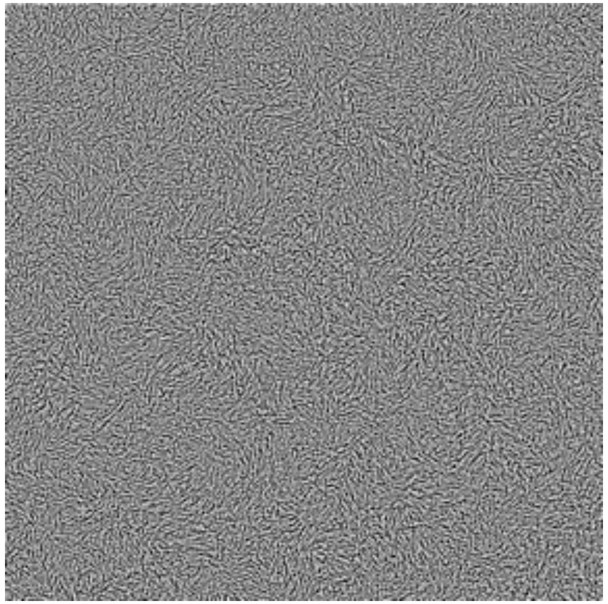
バクテリア乱流

- 集団として乱流のような乱れた流れ
- 自ら生み出す流れによって集団的な流れを作り出す



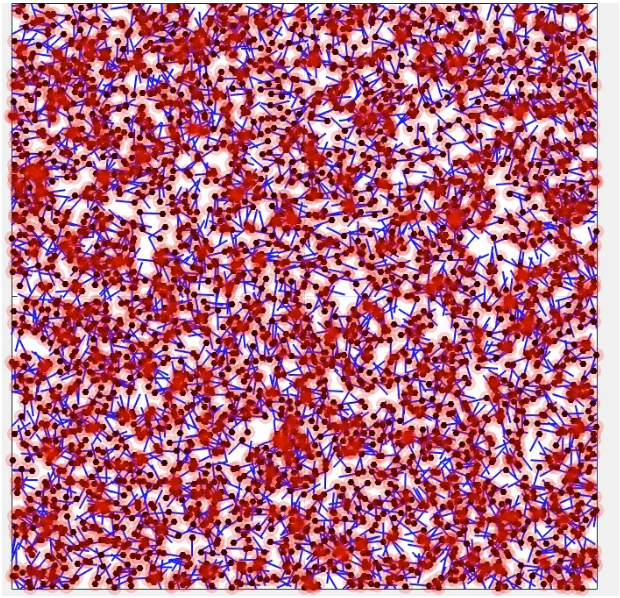
Ishimoto et al. Phys Rev Fluids (2020)

枯草菌（準２次元）

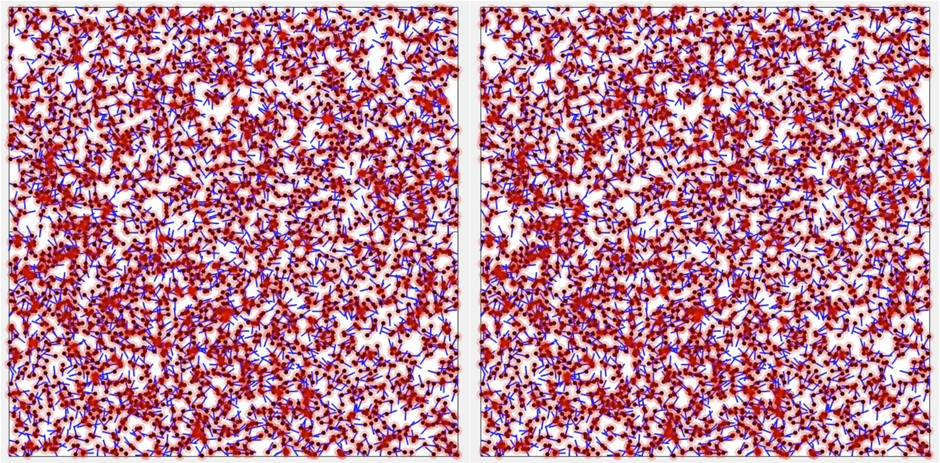


Wensink et al. PNAS (2012)

シミュレーション



Ishimoto, unpublished



流体相互作用あり　流体相互作用なし

集団運動の「ながれ」

一般化ナビエ・ストークス方程式

- コーシーの運動方程式
- 負の粘性と各個体の相互作用による向きをそろえる力
- ランダウ速度ポテンシャル

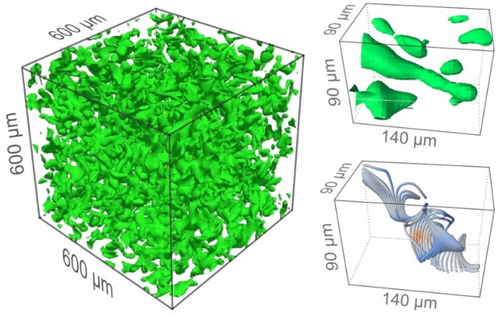
$$\rho\left[\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}\right]=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}-\frac{\delta V[\boldsymbol{v}]}{\delta \boldsymbol{v}}$$

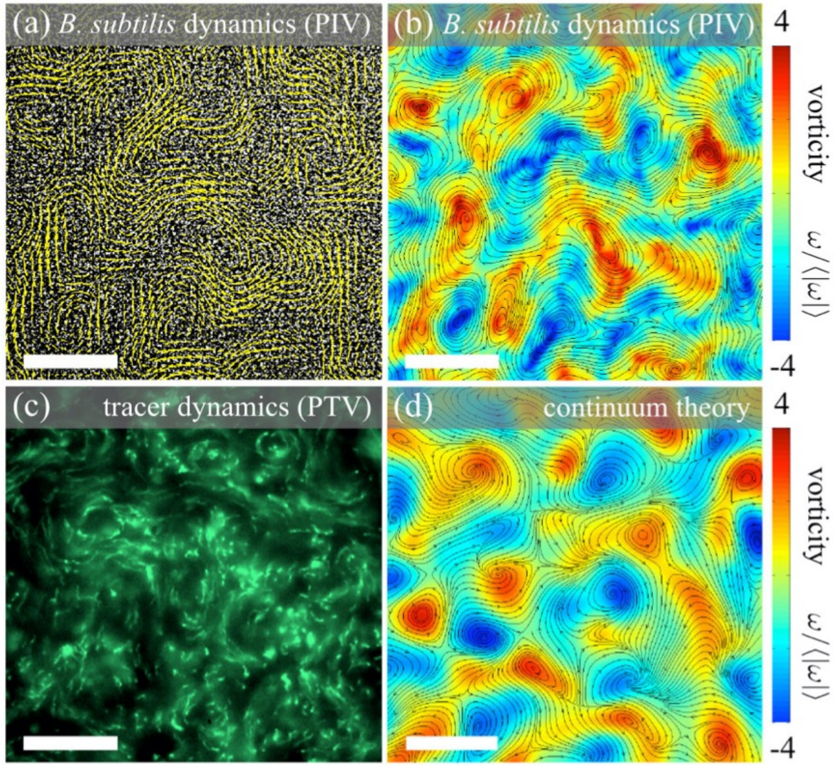
$$\boldsymbol{\sigma}=-p\mathbf{I}-\left(\Gamma_2+\Gamma_4\boldsymbol{\nabla}^2\right)\boldsymbol{E}-S\left(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}-\frac{\boldsymbol{I}}{3}|\boldsymbol{v}|^2\right)$$

$$V[\boldsymbol{v}]=\frac{\beta}{2}\left(|\boldsymbol{v}|^2-v_0\right)|\boldsymbol{v}|^2$$

特徴的な渦ダイナミクスが再現できる

$\boldsymbol{v}$：集団的な運動の流れ



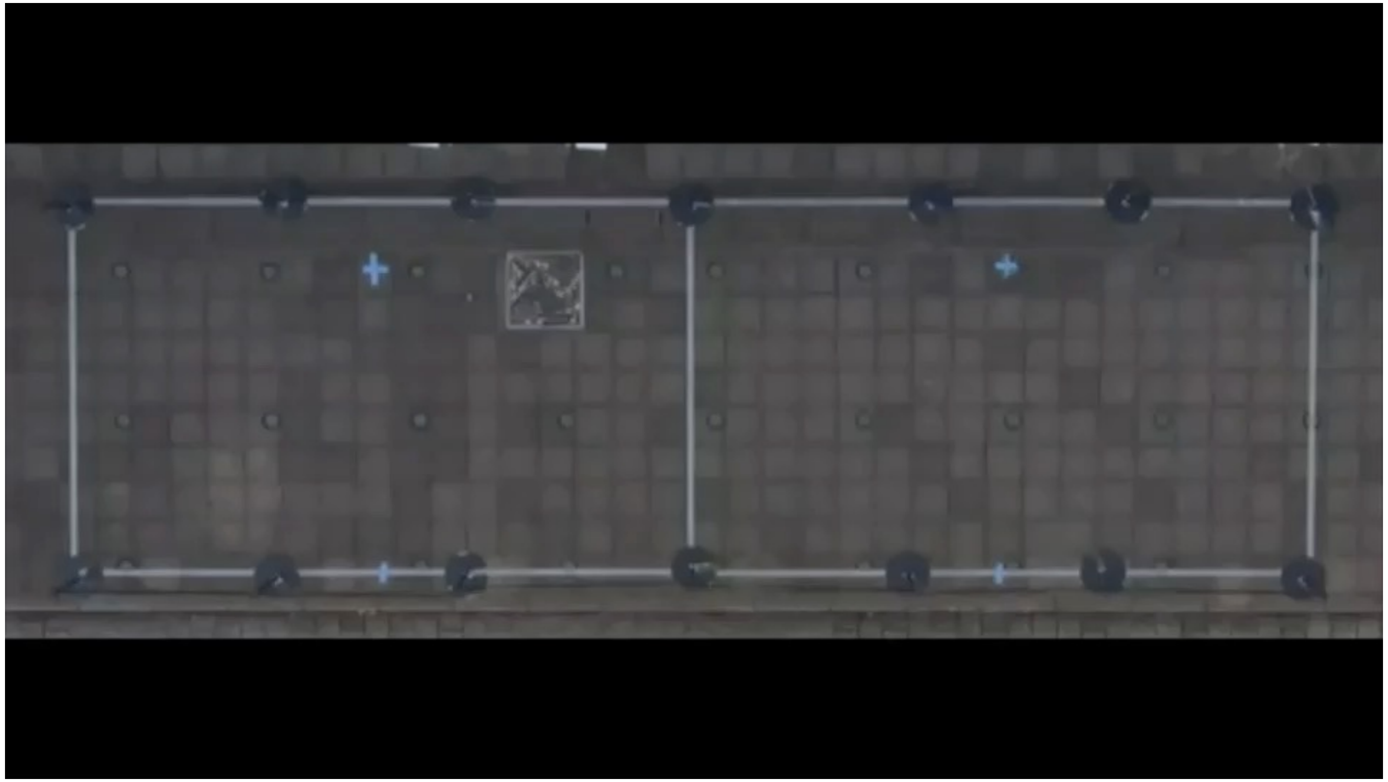


Dunkel et al. Phys Rev Lett (2013)

流体力学は生きている –まとめに代えて-

- ミクロの詳細にこだわらない、マクロ変数で閉じた数理モデル
- 各粒子（原子・分子・生物など）の振る舞いから生じる集団としての「ながれ」を記述する理論的な枠組み＝**流体力学**
- 原子核から、銀河・ブラックホールまで
- 各時代、社会に合わせて流体力学は常に変化している。これからもきっとそうであろう。

歩きスマホの群衆実験



イグノーベル
動力学賞 (2021)

Murakami et al., Sci Adv (2021)

日常を彩る流体力学：
「ながれ」の数理モデル

エピローグ
4日間を振り返って

まとめ

「方程式」「解」「渦」「粘性」

- 日常スケールの流体現象の数理モデルとして、非圧縮流体力学のさまざまな表情を紹介した

- 古くて新しい学問「流体力学」
- その理論的枠組みは、あらゆる「ながれ」を数理科学に変えてゆく

目標

- 流体力学を通して数理モデルの楽しさと難しさを知る
- 目にしているのに「見えていない」流体力学の奥深さを知る
- 新たな視点を身につけて、日常をより豊かにする！

参考文献

流体力学全般について

- 巽友正「流体力学」（培風館, 1982）
- A.J. Acheson「Elementary Fluid Dynamics」（Oxford University Press, 1990）
- 山田道夫「流体力学-まだこんなことがわからない」（数学入門公開講座テキスト, 2019）
- フィリップ・ボール「流れ」（ハヤカワ文庫、2016）

生物流体力学について

- 石本健太「微生物流体力学への招待」数理科学（サイエンス社）連載全19回（2020-2022）
- T. Shinbrot「Biomedical Fluid Dynamics」（Oxford University Press, 2019）
- S. Vogel「Life in Moving Fluids」（Princeton University Press, 1983, 1994）

謝辞

研究助成

- JSTさきがけ「数理構造活用領域」
- 科研費・学術変革A「ジオラマ行動力学」
- 数理解析研究所・訪問滞在型研究「Mathematical Biofluid Mechanics」

数理研「流体力学」分野

- 山田道夫
- 大木谷耕司
- 竹広真一
- 蛭田佳樹
- 安田健人
- Clément Moreau

Special Thanks – 4日間の連続講義お疲れさまでした