O(n) ループモデルと密度行列繰り込み群

樋口三郎*
龍谷大学理工学部数理情報学科

1 密度行列繰り込み群

密度行列くりこみ群 (DMRG) は, サイズの大きい, 局所相互作用する 1 次元量子系の基底状態の情報を得る数値計算の方法として提案された [1, 2]. その発想のもとには, ブロックスピン変換で小さな部分系の情報から大きな部分系の情報を得る際に, 重要でない状態を捨てて重要な少数の状態だけを保持するという, 数値くりこみ群の考え方 [3] がある.

2 O(n) ループモデル

O(n) ループモデルの分配関数は, 逆温度 x, ループ fugacity n に対して, 格子上の loop configuration (図 1(a)) にわたる和

$$Z_{\text{loop}}(x,n) = \sum_{\text{loop config.}} n^{\#(\text{loops})} x^{\#(\text{sites on loops})} \tag{1}$$

で定義される [4].

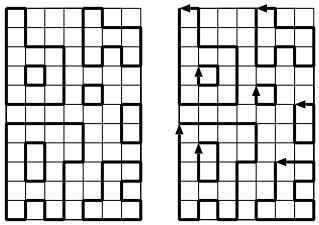


図 1: (a) ひとつの loop configuration (b) ひとつの directed loop configuration

この模型は, O(n) spin 模型の高温展開に現れ, また Fully Packed Loop 模型 ($x^{-1}=0$), Hamiltonian cycle ($x^{-1}=0, n=0$), self-avoiding polygon ($n=0$), 高分子 ($n=0$) を含むなど, 興味深い模型である.

分配関数の表示 (1) は格子点に関して非局所的であるが, 実は局所的な重みを持つ等価な格子模型に書き直すことができる. 実際, link 上の変数 が状態 $\leftarrow, \rightarrow, -$(empty) をとり, site 上

*hig@math.ryukoku.ac.jp

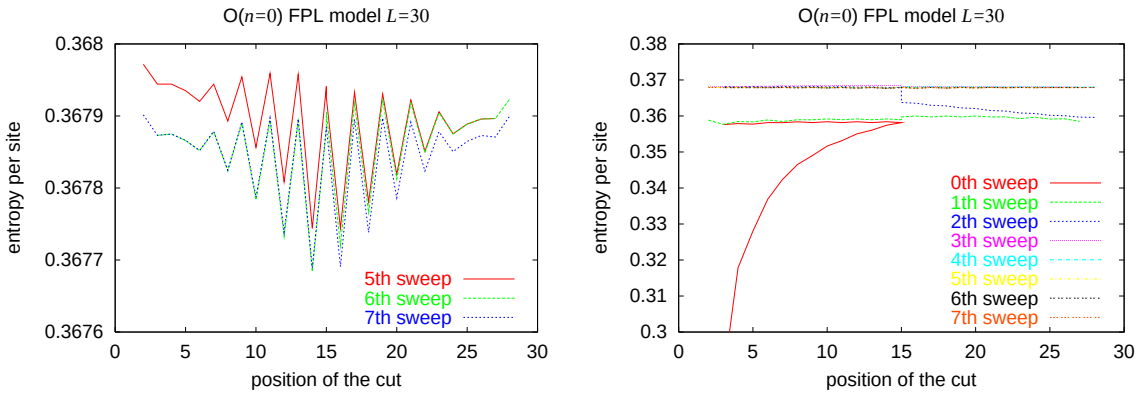
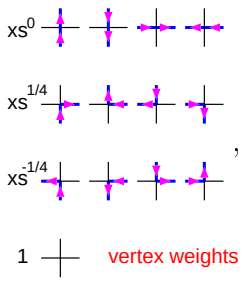


図 2: サイトあたりのエントロピーの計算の収束の様子. 状態数 $m = 32$, $1/x = 0$ (Fully Packed Loop Model), $n = 0$ (Hamiltonian cycle)

で周りの 4 つの link 変数が, 図の重みで相互作用する模型

$$Z_{\text{vertex}}(x,s) = \sum_{z=\rightarrow,\leftarrow,-} \prod_{\text{sites}} W(z_1,z_2,z_3,z_4), \quad W = \quad , 0(\text{otherwise}) \qquad (2)$$



を考えると, 矢印がつながった configuration だけが生き残り, それらは 図 1(b) の directed loop configuration と見なせる. その結果,

$$Z_{\text{vertex}}(s,x) = \sum_{\text{directed loop config.}} x^{\#(\text{sites on loops})} \prod_{\text{loops}} s^{\pm 1} = Z_{\text{loop}}(x, n = s + s^{-1}) \qquad (3)$$

となる. ここで, 平面上の任意の self-avoiding directed loop は, 右または左に 1 回まわりであり, 重み $s^{\pm 1}$ を得ることを使った.

3 O(n) ループモデルと密度行列繰り込み群

1 次元量子系と 2 次元古典系との間には対応があるので, DMRG は, 後者にも有効である [5]. したがって, O(n) ループモデルにも有効である可能性がある.

ここでは, O(n) ループモデルを DMRG を用いて解析することを考える. O(n) ループモデルと類似点を持つ系として, 19-vertex モデル が密度行列繰り込み群で調べられたことがある [7].

O(n) ループモデルは, 表示 (1) でみると明らかに正値な模型でありながら, 表示 (2) に移ると, 転送行列は複素非エルミートとなり, 正値性が manifest ではなくなる. これは, 転送行列が実だった 19-vertex モデルの場合と大きく異なる. (なお, 非エルミート性の問題は, DMRG による有限温度量子系の計算 [6] にも現れる)

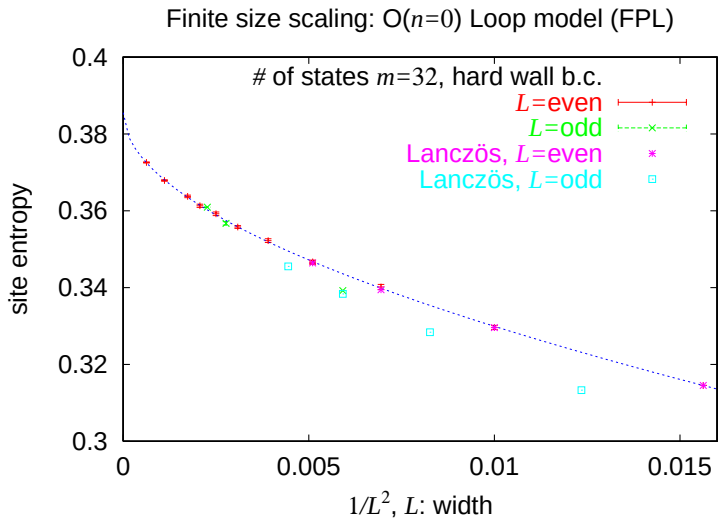


図 3: 有限サイズスケーリング

逆に, DMRG の適用のために重要な相互作用の局所性は, 表示 (2) では manifest だが, 表示 (1) では明らかでない.

このように, この系に対して DMRG が適用できるかどうかは自明でない. この講演では, このような系に対する DMRG の適用の留意点, および得られた結果を報告する.

参考文献

[1] S. R. White, *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 2863.

[2] S. R. White, *Phys. Rev.* **B48** (1993) 10345.

[3] K. Wilson, *Rev. Modern Phys.* **47** (1975) 773.

[4] B. Nienhuis, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 1062.

[5] T. Nishino, *J. Phys. Soc. Japan* **64** (1995) 3598, cond-mat/9508111.

[6] R. J. Bursill, T. Xiang, and G. A. Gehring, *J. Phys. C* **8** (1996) L1, cond-mat/9609001.

[7] Y. Honda and T. Horiguchi, *Phys. Rev.* **E56** (1997) 3920, cond-mat/9706124, APS server.