4 次元スカラー階層模型の自明性

名大 多元数理　原 隆 (Takashi Hara)
名大 多元数理　服部哲弥 (Tetsuya Hattori)
日本医大 基礎科学　渡辺 浩 (Hiroshi Watanabe)

1 概要

「4 次元 Ising model の連続極限は Gauss 測度であろう」という予想は，多くの状況証拠をもつものの，完全な数学的証明はまだない．Ising model は ϕ^4 model の強結合極限であり，その macroscopic な振舞いを調べるためには，強結合領域におけるくりこみ群の軌道を追跡しなければならない。しかし，現在までに開発されたくりこみ群解析は，その多くが弱結合領域に限定されており (有名な例外がいくつかあるが)，Ising model を分析することができなかった．

このような状況において，hierarchical Ising model に対して，spin の確率分布の特性関数を用いると，くりこみ群軌道を強結合領域から追跡できることが分かった．[1]

特性関数法 は，少なくとも hierarchical model に関する限り，少数のパラメータを監視することによって軌道を制御し得ると言う利点があり，特に数値計算との協力関係を築きやすく，computer aided proof に適している．

この講演では，

4 次元 hierarchical Ising model が連続極限において Gauss 測度に収束すること

の証明の概略を述べる．また時間があれば，$O(N)$ model への拡張について触れたい．

2 Hierarchical model

2^N 個の spin 変数

$$\phi_\theta \quad = \quad \phi_{\theta_N,\ldots,\theta_1}\ , \quad \theta=(\theta_N,\ldots,\theta_1)\in\{0,1\}^N \tag{2.1}$$

を考え, Hamiltonian

$$H_N(\phi) \quad = \quad -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{c}{4}\right)^n \sum_{\theta_N,\ldots,\theta_{n+1}}\left(\sum_{\theta_n,\ldots,\theta_1}\phi_{\theta_N,\ldots,\theta_1}\right)^2 \tag{2.2}$$

および single spin distribution $h(\phi_\theta)$ が定める統計力学系を

$$< F >_{N,h} \quad = \quad \frac{1}{Z_{N,h}}\int d\phi F(\phi)\exp(-\beta H_N(\phi))\prod_\theta h(\phi_\theta) \tag{2.3}$$

$$Z_{N,h} \quad = \quad \int d\phi \exp(-\beta H_N(\phi))\prod_\theta h(\phi_\theta) \tag{2.4}$$

で定義する．ただし,

$$\int_{\mathbb{R}} h(x)dx=1 \tag{2.5}$$

$$c=2^{1-2/d} \tag{2.6}$$

とする．これを $d(>2)$ 次元 **階層模型 (hierarchical model)** という．[2, 3, 4]

変数 ϕ を定数倍することにより, $\beta > 0$ を任意の正数にすることができるので, 以下

$$\beta \ = \ \frac{1}{c} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2^{2/d} - 1) \tag{2.7}$$

とおく.

Block spin ϕ' を

$$\phi'_\tau \ = \ \frac{\sqrt{c}}{2} \sum_{\theta_1 = 0,1} \phi_{\tau\theta_1}, \ \tau = (\tau_{N-1}, ..., \tau_1) \tag{2.8}$$

で定義すると，$F(\phi)$ が block spin の関数

$$F(\phi) \ = \ F'(\phi') \tag{2.9}$$

のとき,

$$< F >_{N,h} \ = \ < F' >_{N-1,\mathcal{R}h} \tag{2.10}$$

$$\mathcal{R}h(x) \ = \ \mathrm{const.}\exp(\frac{\beta}{2}x^2) \int_{\mathbb{R}} dy h(\frac{x}{\sqrt{c}} + y) h(\frac{x}{\sqrt{c}} - y) \ , x \in \mathbb{R} \tag{2.11}$$

が成立する. 即ち, くりこみ群変換は h の非線形変換 $\mathcal{R}$ として実現される.

この model の macroscopic な振舞いは，$\mathcal{R}$ の trajectory

$$h_n \ = \ \mathcal{R}^n h_0 \ , \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{2.12}$$

を通して調べることが出来る. 以下，初期値 h_0 を，大きさ s の Ising spin measure にとる:

$$h_0(x) \ = \ \frac{1}{2}(\delta(x - s) + \delta(x + s)) \tag{2.13}$$

Hierarchical Ising model は，$0 < c < 2$ $(d > 0)$ のとき infinite volume limit をもち，$1 < c < 2$ $(d > 2)$ のとき相転移がある [2].

主定理は次の通り.

Theorem 2.1. [1] $d = 4$ のとき，s の *critical value* s_c が区間

$$[1.7925671170092624, \ 1.7925671170092625] \tag{2.14}$$

に存在し，$s = s_c$ に対応する *trajectory* は *Gauss* 測度

$$h_\infty(x) = \exp(-x^2/4) \tag{2.15}$$

に収束する.

3 特性関数法

Single spin distribution h_n の characteristic function

$$\hat{h}_N(\xi) \ = \ \int_{\mathbb{R}} dx e^{-i\xi x} h_N(x) \tag{3.1}$$

に対するくりこみ群変換は

$$\hat{h}_{N+1} = \mathcal{T}\mathcal{S}\hat{h}_N \tag{3.2}$$

$$\mathcal{S}g(\xi) = g(\frac{\sqrt{c}}{2}\xi)^2 \tag{3.3}$$

$$\mathcal{T}g(\xi) = \exp(-\frac{\beta}{2}\triangle)g(\xi) \tag{3.4}$$

$$\hat{h}_0(\xi) = \cos(s\xi) \tag{3.5}$$

となる.

さらに,

$$\hat{h}_N = \exp(-V_N) \tag{3.6}$$

によって，特性関数の potential V_N を導入する．その Taylor 展開

$$V_N(\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{2j,N}\xi^{2j} \tag{3.7}$$

の係数 $\mu_{2j,N}$ は，次の Newman's bound をもつ:

$$\mu_{2j,N} \geq 0\,, \quad j \geq 1 \tag{3.8}$$

$$\mu_{2j,N} \leq \frac{1}{j}(2\mu_{4,N})^{j/2}\,, \quad j \geq 3 \tag{3.9}$$

これらは,「強磁性 spin 系の characteristic function の零点は実数であること (Lee-Yang property)」をもとにして証明される [5].

Newman's bound を用いると，(3.7) の収束半径が評価され，また，$\mu_{4,N} \to 0$ から，Gauss への収束が従う.

Model が critical であるためには,

$$1 \leq \mu_{2,N} \leq 1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\mu_{4,N} \tag{3.10}$$

が必要であることが分かるので，$N = 0, 1, 2, \cdots$ に対して,

$$\underline{s}_N = \inf\{s > 0 \mid \mu_{2,N} \geq 1\}, \tag{3.11}$$

$$\overline{s}_N = \inf\{s > 0 \mid \mu_{2,N} \geq \min\{1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\mu_{4,N},\ 2 + \sqrt{2}\}\}. \tag{3.12}$$

とおく.

次の命題は，弱結合領域における Bleher–Sinai argument [3] の変形である.

Proposition 3.1. $N_0 \leq N_1$ なる自然数 N_0，N_1 が存在して，すべての $s \in [\underline{s}_{N_1}, \overline{s}_{N_1}]$ に対し,

$$0 \leq \mu_{4,N_0} \leq 0.0045, \tag{3.13}$$

$$1.6\mu_{4,N_0}^2 \leq \mu_{6,N_0} \leq 6.07\mu_{4,N_0}^2, \tag{3.14}$$

$$0 \leq \mu_{8,N_0} \leq 48.469\mu_{4,N_0}^3, \tag{3.15}$$

$$\mu_{2,N} < 2 + \sqrt{2}, \quad N_0 \leq N < N_1\,, \tag{3.16}$$

が成立するとする．このとき，$s_c \in [\underline{s}_{N_1}, \overline{s}_{N_1}]$ が存在して，$s = s_c$ に対し,

$$\lim_{N\to\infty} \mu_{4,N} = 0, \tag{3.17}$$

$$\lim_{N\to\infty} \mu_{2,N} = 1 \tag{3.18}$$

が成立する.

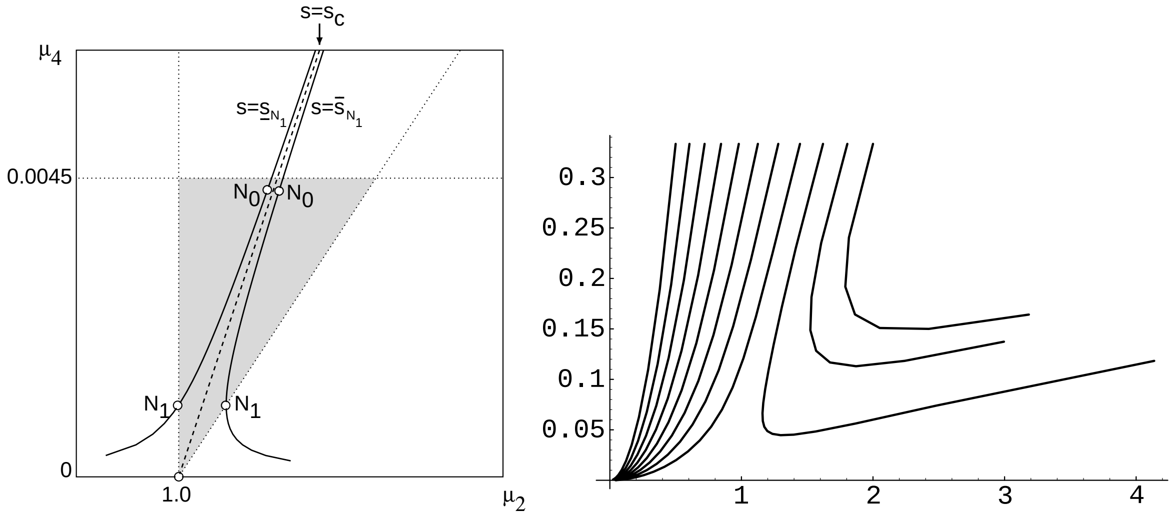

Figure 1. (Left) A schematic view of trajectories on (μ_2, μ_4)-plane in Proposition 3.1. Trajectories for $s = \overline{s}_{N_1}$ and for $s = \underline{s}_{N_1}$ (solid lines) and the critical trajectory for $s = s_c$ (broken line) are shown. The Gaussian fixed point corresponds to the point $(1.0, 0)$. The region defined by inequalities for (μ_2, μ_4) analogous to (3.10) and (3.13) (and (3.16)) is shaded.
(Right) A result of numerical calculation. RG trajectories are drawn on a $(\mu_2, \frac{\mu_4}{\mu_2^2})$–plane.

次の命題は，強結合領域における軌道の評価であり，厳密な評価を伴う数値計算によって示される．

Proposition 3.2. *Proposition 3.1* の仮定は $N_0 = 70$ *and* $N_1 = 100$ として成立する．ただし，$\underline{s}_{N_1}$ *and* $\overline{s}_{N_1}$ は

$$1.7925671170092624 \leq \underline{s}_{N_1}, \quad \overline{s}_{N_1} \leq 1.7925671170092625 \tag{3.19}$$

を満たす．

Theorem 2.1 は，Proposition 3.1,Proposition 3.2 から従う．

参考文献

[1] T.Hara, T.Hattori, H.Watanabe, *Triviality of hierarchical Ising model in four dimensions,* to appear in Commun. Math. Phys.

[2] F. J. Dyson, *Exisitence of a Phase–Transision in a One–Dimensional Ising Ferromagnet,* Commun. Math. Phys.**12** (1969) 91–107.

[3] Ya. G. Sinai, *Theory of Phase Transition: Rigorous Results,* Pergamon Press, 1982.

[4] P. Collet, J.-P. Eckmann, *A Renormalization Group Analysis of the Hierarchical Model in Statistical Mechanics,* Springer Lecture Note in Physics 74.

[5] C.M.Newman Inequalities for Ising medels and field theories which obey the Lee–Yang theorem, Commun. Math. Phys., **41**, 1975, 1-9.