Renormalization Group Methods to Solve Dynamical Chiral Symmetry Breaking

Ken-Ichi Aoki
Institute for Theoretical Physics
Kanazawa University

本稿では、力学的なカイラル対称性の破れを、非摂動くりこみ群を用いて解析する研究を紹介する。詳細は参考文献を見ていただくことにして、本質的な論理展開を説明するにとどめる。

1. カイラル対称性

まず「カイラル対称性」について説明する。スピン $1/2$ の素粒子を記述する場は、ローレンツ群の表現として 2 種類存在している。それらはパリティ変換で移り替わるので、それぞれ L と R という名前で呼ばれる 2 表現と 2^* 表現の場である。この L や R の事をカイラリティと呼ぶ。カイラル対称性とは、この L 及び R の場のそれぞれの位相回転に対する系の対称性である。

ハミルトニアンは、それぞれの場の自由な伝播を表す運動項と相互作用項からなる。自由な運動項では、L は L として、R は R として伝播するので、もちろん、カイラル対称性を保つ。素粒子の基本相互作用はゲージ相互作用であるが、それらは、運動項に対する共変微分として導入される相互作用であり、従って、L や R の種類を変えない。すなわちゲージ相互作用はカイラル対称性を壊さない。

ゲージ相互作用を何度使っても、カイラル対称性は保存しているから、L と R の個数は全ての反応の前後でそれぞれが保存量となる。例えば、ゲージ粒子ひとつを交換すると 4-フェルミ相互作用が生成されるが、それはカイラル対称な 4-フェルミ相互作用となる。

L や R の場は、 2 成分の内部自由度しかないために、スピン $1/2$ の質量のない粒子しか記述できない。質量のあるクォークや電子を記述するためには、その質量項となるべき相互作用を導入する必要がある。質量項は、この L と R の間をつなぐ 2 つの場からなる相互作用項であって、L が R になったり、R が L になったりすることに対応する。すなわち、L と R の合計 4 成分の場で、一つの粒子が記述され、質量のあるスピン $1/2$ の粒子を記述することになる。

L と R の個数が保存しなくなったわけであるから、質量項はカイラル対称性を保存しない。一般に、素粒子の統一理論を構成する場合、高い対称性で統一されている理論から出発する。相互作用はゲージ相互作用であり、一般的な意味でカイラル対称性が存在している。しかし最終的に我々が観測している素粒子は質量を持っている。つまりカイラル対称性は自発的に破れていることになる。そして、このカイラル対称性の自発的な破れこそが、もともとは「同じ」素粒子を違って見せる、つまり、素粒子の個性：質量や電荷や相互作用、を作る過程に他ならない。

2. カイラル対称性の力学的破れ

カイラル対称性の自発的な破れを記述するのに典型的に 2 つの方法がある。1 つ目は、いわゆるスカラー粒子 (例えばヒッグス場) が理論に最初から存在し、湯川型の相互作用がある場合である。ヒッグス場はもちろん、カイラル対称性の非自明な表現になっており、そのために、湯川型の相互作用はもちろんカイラル対称性を満たしている。

このヒッグス場が真空期待値を持てば、カイラル対称性が自発的に破れることになる。この場合、この対称性の秩序パラメタはヒッグス場 (の 0 モード) そのものである。この時、湯川相互作用が、質量相互作用に転換され、カイラル対称性で質量が禁止されていたスピン $1/2$ の粒子達が質量を持つ事になる。実際、標準模型と呼ばれる現在の素粒子統一理論では、弱電磁相互作用のカイラル対称性によって、クォークやレプトンの質量は禁止されているが、ヒッグス場が真空期待値を持つことによって、クォークやレプトンに質量が与えられる。

さて、ここでの本題は、このカイラル対称性の自発的破れの中でも、「力学的な破れ」と呼ばれる場合である。これは、ヒッグス場のような秩序パラメタの役割をする場が、理論を定義する段階の場としては入っていない場合である。例えば、クォークの強い相互作用は QCD によって記述されるが、QCD にはスカラー場は入っていない。この場合、ゲージ粒子 = グルーオンによる相互作用はカイラル対称性を満たしているが、その相互作用が十分に強くなる低エネルギー領域では、L と R のペアが真空期待値を持つということが起こる。これは、スピン $1/2$ の場が 2 つからなる複合場 (の 0 モード) が秩序パラメタを与えていることになる。この場合でももちろん、クォークは質量を獲得する。

普通の低温超伝導は電子のクーパー・ペアの凝縮によって説明されるが、これはまさに力学的な対称性の破れの例に他ならない。実際、クォークの L と R のペアが凝縮して、クォークが質量を持つというアイデアは南部・ジョナラシニオに遡るが、そこではまさに超伝導アナロジーによって自発的な対称性の破れとそれに伴う自発的な質量生成が論じられた。

実際には、クォークは、上に書いたヒッグス場の真空期待値によっても質量を得ている。しかしこの質量は、電子などと同じ原因であって、比較的小さな質量しか得られない。そして、更に、強い相互作用 QCD によって力学的なカイラル対称性の破れが起こり、大きな質量を有することになる。この QCD によって生成された質量が私達の周囲にある質量のほとんどを担っている。

この「力学的な」カイラル対称性の破れは、ヒッグス場による自発的対称性の破れとは全くレベルの違う扱いが必要になる。ヒッグス場が最初から理論に入っている場合には、ヒッグス場の自己相互作用をポテンシャルという形で作用に加えることができる。もちろんこのポテンシャルエネルギー自身はカイラル対称性を満たしている。このポテンシャルがいわゆる 2 重井戸型あるいはワイン瓶底型になっていれば、必然的に最低エネルギーの状態はヒッグス場が期待値を持っている状態になる。つまり、量子力学的な計算開始以前に、いわゆるツリー近似の古典的な扱いの範囲で自発的対称性の破れが起こり、クォークやレプトンは質量を持つことができる。

一方、ヒッグス場が存在しない場合には、秩序パラメタとなるべき複合場のポテンシャルを理論の作用にいれることは一般にできない。例えばQCDによるクォークのカイラル対称性の破れの場合を考えよう。作用に加えられる相互作用は一般にくりこみ可能性の要求から、次元が4以下の演算子に限られる。カイラル対称性の要求から、LとRはそれぞれが個数を保存する必要がある。また、もちろんローレンツスカラーであることも必須である。となると、次元のもっとも低い演算子は次元が6の4-フェルミ相互作用となる。従って、通常のくりこみ可能な場の理論の作用としては採用できない。

LとRの複合場が真空期待値を持とうと思えば、更に高次元の演算子も加えた上でそれをポテンシャルとみなす必要があるが、こんなことはとてもできない。それに、そんな勝手な作用を作っても、何の予言力もない。すなわちやりたいことは、QCDというゲージ相互作用の量子力学的効果によって、4-フェルミ型やもっと高次の有効作用が生成され、その結果、複合場が真空期待値を持つ、という計算である。これができれば、QCDによってクォークの質量が計算できることになる。QCDは単純群の非可換ゲージ理論であり、事実上パラメタの無い理論であるから、予言されたクォーク質量は直接実験と比べられることになる。

3. 非摂動くりこみ群による計算

さて問題はQCDゲージ理論によるカイラル対称性の自発的破れの定量的な評価である。量子補正によって、クォークが質量を持つ過程を計算する。しかし、摂動論ではこれは不可能である。いかなる高次の項まで計算しようが、カイラル対称性は絶対に破れないから、クォークの質量項など生成されようがない。

クォークに質量が生成されるためには、真空が選び直される必要がある。すなわち、非摂動的な計算がどこかに入ってこないと、クォークの質量を計算することはできない。これまで主にやられて来た方法は、クォークの質量が存在するとして、あるクォークの自己エネルギー関数の間に成立する方程式(シュウィンガー・ダイソン方程式と呼ばれる)を立て、その解を探す事である。その中にいわゆる非自明な解、すなわちクォークに有限の質量があるような解があり、実際にそういう解を実現する状態がよりエネルギーの低い真の真空であることが確認されれば、それでクォークに力学的な質量が発生した状況を得たことになる。

シュウィンガー・ダイソン方程式を用いる方法には、重大な弱点がある。それはもともとのQCDのゲージ不変性を激しく破ってしまうことである。それを改善しようとしても、なかなか先に進むことができなかった。ゲージの選び方によっては、非自明な解が存在してクォークが質量を持つ場合と、そういう解が存在せずクォークが質量を持てない場合との両方が許されてしまう。QCDは本来、パラメタの存在しない理論であるからこれはおかしい。この問題は、QCDのゲージ結合定数を摂動論的なくりこみ理論に従ってエネルギーに依存する形に置き換えることによって、回避され、クォーク質量を予言できることになった。しかし、いずれにしてもその予言はゲージに強く依存している。

シュウィンガー・ダイソン方程式はもともと、複合場の秩序パラメタに対する自由エ

ネルギーのポテンシャルの停留条件に対応しており、それをあるレベルまでの近似で解こうとするものである。そして、その非自明な解は、もともとの理論の摂動論の意味で解釈すれば、無限個のグラフの和を足しあげることによって得られていることがわかる。この足しあげられたグラフの集合が激しく「偏っている」ために、ゲージ不変性など吹き飛んでしまうのである。

非摂動くりこみ群は、微分方程式によって有効作用を評価する方法である。その最低次の近似ですら、非自明な無限個のグラフの和が一気に評価される。従って、シュウィンガー・ダイソン方程式をたてる替わりに、非摂動くりこみ群によって、直接、複合場秩序パラメタに対する自由エネルギーを評価することでクォークの質量を計算できるのである。

そして、非摂動くりこみ群による自由エネルギーの評価がシュウィンガー・ダイソン法に圧倒的にまさるのは、いとも簡単にいろいろなタイプの無限個のグラフを制御して加えることができるために、ゲージ不変性をほとんど回復することが可能になるのである。非摂動くりこみ群は微分方程式の形で定式化され、その解と積分していくことによって、無限個のグラフの和と等価な有効作用 = 自由エネルギーが得られていく。微分方程式の微分係数の部分がβ 関数と呼ばれる、いわばこの方法の核となっている。この核の部分を制御してゲージ不変性を尊重すれば、必然的に、それから積分された有効作用もゲージ不変性を尊重することになるのである。

更に、シュウィンガー・ダイソン法では理論的な根拠なく導入されたエネルギーに依存するゲージ結合常数が、非摂動くりこみ群では全く自然にかつ自明に登場する。実際、非摂動くりこみ群の方法のβ 関数に対して非常に限定的な制限を行うと、これまでのシュウィンガー・ダイソン方程式法による結果を再現する、つまり完全にそれを含んでいることが明らかになった。そして、その制限をはずすだけで、その先に進むことが容易にできるのである。

参考文献

・ Introduction to the Non-perturbative Renormalization Group and Its Recent Applications, K-I. Aoki, Int. J. Mod. Phys. B **14** (2000) 1249–1326

・場の理論における非摂動くりこみ群, 青木健一, 数理解析研究所講究録 **1134** (2000) 61–69

・Wilson Renormalization Group Equations for the Critical Dynamics of Chiral Symmetry K-I. Aoki, K. Morikawa, J.-I. Sumi, H. Terao and M. Tomoyose, Prog. Theor. Phys. **102** (1999) 1151–1162

・ Non-Ladder Extended Renormalization Group Analysis of the Dynamical Chiral Symmetry Breaking K-I. Aoki, K. Takagi, H. Terao and M. Tomoyose Prog. Theor. Phys. **103** (2000) 815–832

なお、非摂動くりこみ群についての最近の私の研究は、金沢大学での以下の方々との共同研究に基づいているものであり、これらの方々との絶え間ない議論に感謝します。
尾野田浩志, 窪田健一, 児玉博明, 清水健一, 住淳一, 相馬亘, 高木郁, 谷口雅樹, 寺尾治彦, 友寄全志,
中村悦子, 堀越篤史, 森川慶一, 加藤潤也