The spectrum of the infinitely extended Sierpinski lattice

白井 朋之 (東工大理工学研究科)

1 はじめに

無限に広がったシエルピンスキー格子上のラプラシアンのスペクトルについて，まずその固有値と状態密度が福島・島によって計算された [1]．その後，A. Teplyaev はスペクトルが純点スペクトルであること，つまり固有関数全体がシエルピンスキー格子上の ℓ^2-空間の正規直交基底をなすことを証明した [5]．

定理 1.1 ([1], [5]). S_n $(n \geq 2)$ を n-次元の無限に拡がったシエルピンスキー格子とする．このとき

$$Spec(-\Delta_{S_n}) = \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} \left\{ \{g^{-k}(\frac{n+1}{2n})\} \cup \{g^{-k}(\frac{n+3}{2n})\} \right\}} \cup \{\frac{n+1}{n}\},$$

ただし，$g(x) = -2nx^2 + (n+3)x$ で，Δ_{S_n} は S_n 上の単純酔歩に対応するラプラシアンである．

[1, 5] のいずれの場合も有限シェルピンスキー格子からの近似によって上の定理 1.1 を得ている．このノートでは，無限シェルピンスキー (プレ) 格子が正則グラフ上のある写像 (パラライングラフ) の固定点であるという事実と，無限グラフとそのラインングラフ・パラライングラフの上のラプラシアンのスペクトル集合の間の関係を用いて，少し異なった視点から定理 1.1 を証明する．

このノートでシエルピンスキー格子というときは以下で定義するものを指す (図 1 参照)．$\{e_i\}_{i=1}^n$ を $\mathbf{R}^n$ の標準基底，e_0 を零ベクトルとする．$\varphi_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ を $\varphi_i(x) = \frac{1}{2}(x + e_i)$ $(0 \leq i \leq n)$ によって定義し，V_0 を

$$V_0 = \bigcup_{0 \leq i \neq j \leq n} \{(1-t)e_i + te_j \in \mathbf{R}^n \,;\, 0 \leq t \leq 1\}$$

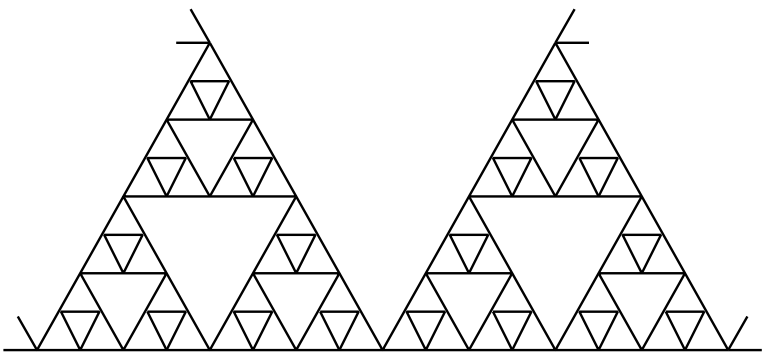

図 1: シエルピンスキー格子 S_n $(n = 2)$

として帰納的に

$$V_n = \bigcup_{i=1}^{n} \varphi_i(V_{n-1}), \quad V_{-n} = \varphi_0^{-n}(V_n)$$

とする．さらに，$\widetilde{S_n} = \cup_{n\geq 0} V_{-n}$ を無限グラフと見なす．この無限グラフは原点を除いて次数 $2n$ で，原点の次数は n である．$\widetilde{S_n}$ のコピー $\widetilde{S'_n}$ を用意して，原点で同一視したもの $\widetilde{S_n} \cup \widetilde{S'_n}/\sim_0$ を S_n とする．こうやって構成された $2n$-正則無限グラフ S_n を n-次元シエルピンスキー格子と呼ぶ．

2　ラングラフとパラライングラフ

グラフ $G = (V(G), A(G))$ とは頂点集合 $V(G)$ と (両方向の) 向きのついた辺集合 $A(G)$ の組であるとする．$e \in A(G)$ に対して，$\overline{e}$ は逆向きの辺を表わすことにする (ちなみに $e \in A(G)$ ならば $\overline{e} \in A(G)$ である .) 頂点 $o(e), t(e)$ をそれぞれ辺 e の始点と終点とする．

$A_x(G)$ は頂点 $x \in V(G)$ の近傍の辺集合で，$A_x(G) = \{e \in A(G) \mid o(e) = x\}$ で定義されるものとし，点 x における次数を $\deg(x) = |A_x(G)|$ によって定義する．任意の $x \in V(G)$ に対して $\deg(x) = d$ であるグラフを d-正則グラフという．以下，グラフ G は連結でかつ正則であるとし，d-正則グラフ G 上のラプラシアン Δ_G は

$$\Delta_G f(x) = \frac{1}{d} \sum_{e \in A_x(G)} f(t(e)) - f(x)$$

によって定義されたものを $\ell^2(V(G))$ 上で考える．任意のグラフ G に対して，$Spec(-\Delta_G) \subset [0,2]$ となることを注意しておく．

2.1 ライングラフ

表題にあるライングラフとはグラフ理論でしばしば用いられるグラフの一つの変形である．ラフには，元々のグラフの辺を頂点とするグラフであると言ってよい．通常ライングラフの定義は単純グラフ（自己ループや多重辺を持たないグラフ）に対して与えられるが，ここでは自己ループや多重辺を持つグラフに対しても定義を与えよう．

定義 *2.1.* グラフ $G = (V(G), A(G))$ に対して，以下の性質で定まるグラフを G のライングラフと言い，$L(G)$ と表わす．

1. $V(L(G)) = \{[e] \mid e \in A(G)\}$,

2. $A(L(G)) = \{(e_1, e_2) \mid e_1 \neq \overline{e}_2, t(e_1) = o(e_2)\}$.

ただし，$e \in A(G)$ に対して $[e]$ は辺の向きを忘れて得られる無向辺である．また，$\overline{(e_1, e_2)} = (\overline{e}_2, \overline{e}_1)$ とし，$o(e_1, e_2) = [e_1]$, $t(e_1, e_2) = [e_2]$ である．

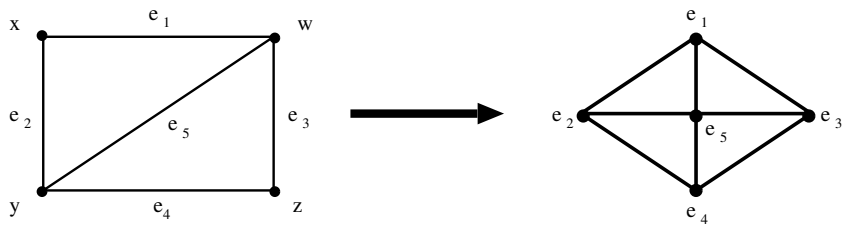

図 2: グラフ G とライングラフ $L(G)$

注意 *2.2.* d-正則グラフのライングラフは $(2d-2)$-正則グラフ．

特に d-正則グラフ G とそのライングラフ $L(G)$ 上の単純ランダムウォークに付随するラプラシアンのスペクトルについて，以下のような結果が得られる．

定理 2.3 ([4]). $d \geq 3$ とする．G は無限 d-正則グラフで $L(G)$ は G のライングラフとする．このとき，

$$Spec(-\Delta_{L(G)}) = \frac{d}{2d-2} Spec(-\Delta_G) \cup \{\frac{d}{d-1}\}.$$

ただし，$\frac{d}{d-1}$ は無限多重度の固有値である．

2.2 パラライングラフ

パラライングラフとは，樋口 (雄) [2] によって，グラフ G とそのライングラフ $L(G)$ 上のランダムウォークの再帰性の比較のために導入された概念である．

グラフ G のパラライングラフ $P(G)$ とは，次で定義されるグラフである．[2] では簡単のため単純グラフについて定義されているが，ここでは単純グラフでない場合についても定義を与えておこう．

$$\begin{aligned} V(P(G)) &= A(G), \\ A(P(G)) &= \{(e_1, e_2) \in A(G) \times A(G) \mid o(e_1) = o(e_2), e_1 \neq e_2\} \\ &\qquad \amalg \{(e, \overline{e}) \mid e \in A(G)\}. \end{aligned}$$

ただし，$\overline{(e_1, e_2)} = (e_2, e_1)$ であるとする．

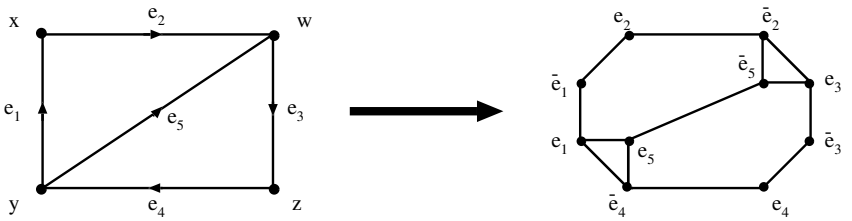

図 3: グラフ G とパラライングラフ $P(G)$

注意 *2.4.* d-正則グラフのパラライングラフは d-正則グラフであり，d-正則グラフ全体はこの操作に関して閉じている．

このとき，パラライングラフについても，ライングラフと同様の定理が成立する．

定理 2.5 ([4]). $d \geq 3$ とする．G は無限 d-正則グラフで $P(G)$ は G のパラライングラフとする．このとき，$\varphi(x) = -dx^2 + (d+2)x$ とおくと

$$\begin{aligned} Spec(-\Delta_{P(G)}) &= \varphi^{-1}(Spec(-\Delta_G)) \cup \{1\} \cup \{\frac{d+2}{d}\} \\ &= \varphi_-^{-1}(Spec(-\Delta_G)) \cup \{1\} \cup \varphi_+^{-1}(Spec(-\Delta_G)) \cup \{\frac{d+2}{d}\}. \end{aligned}$$

ただし，1 と $\frac{d+2}{d}$ は無限多重度の固有値で，$\varphi_\pm^{-1}$ は φ の逆関数の二つの枝で，

$$\varphi_\pm^{-1}(x) = \left(d+2 \pm \sqrt{(d+2)^2 - 4dx}\right)/2d$$

である．

注意 *2.6.* 例えば $\mathbf{Z}^2$ は 4-正則グラフで $Spec(-\Delta_{\mathbf{Z}^2}) = [0,2]$ になる．パラライングラフをとる操作は繰り返すことができ，

$$\begin{aligned} Spec(-\Delta_{P(\mathbf{Z}^2)}) &= [0, \frac{1}{2}] \cup [1, \frac{3}{2}] \\ Spec(-\Delta_{P^2(\mathbf{Z}^2)}) &= [0, \frac{3-\sqrt{7}}{4}] \cup [\frac{3-\sqrt{5}}{4}, \frac{3-\sqrt{3}}{4}] \\ &\quad \cup \{1\} \cup [\frac{3+\sqrt{3}}{4}, \frac{3+\sqrt{5}}{4}] \cup [\frac{3+\sqrt{7}}{4}, \frac{3}{2}] \\ &\ldots etc. \end{aligned}$$

となる．ただし，$\{1\}, \{\frac{3}{2}\}, \{\frac{3\pm\sqrt{3}}{4}\}, \{\frac{3\pm\sqrt{5}}{4}\}$ は無限多重度の固有値である．パラライングラフを繰り返しとることにより，スペクトル集合がカントール集合的になる様子が見てとれる．

3 定理の証明

定理の証明には次の事実が本質的である．

補題 3.1. $P(G) = G$ となる格子が存在する．特に n 次元のシエルピンスキー格子 S_n は，ある $P(G_n^*) = G_n^*$ を満たす $n+1$-正則グラフ G_n^* のラインングラフである．

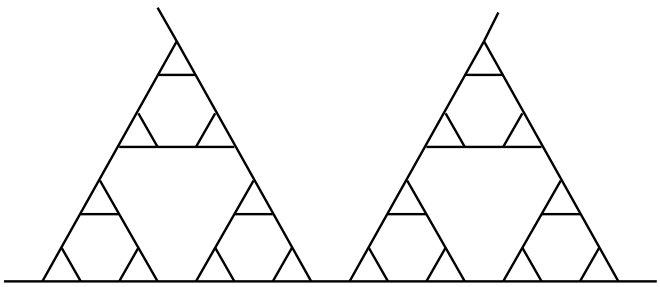

図 4: シエルピンスキープレ格子 G_n^* $(n=2)$

注意 *3.2.* P を d-正則グラフ全体からそれ自身への写像と見なすと P は (グラフ同型を除いて) 1 対 1 であることが知られている [3]．固定点となるグラフは局所的には図 4 にあるシェルピンスキープレ格子と同型であるが，無限遠の違いにより同型でないものが存在する．

補題 3.1 を考慮すれば次の形で定理を述べることができる．

定理 3.3. $n \geq 2$ とする．$P(G)=G$ である $n+1$-正則グラフのラインググラフを S_n^* とする．このとき，

$$Spec(-\Delta_{S_n^*}) = \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty}\left\{\{g^{-k}(\frac{n+1}{2n})\}\cup\{g^{-k}(\frac{n+3}{2n})\}\right\}}\cup\{\frac{n+1}{n}\},$$

ただし，$g(x)=-2nx^2+(n+3)x$ である．特に n 次元シエルピンスキー格子 S_n は S_n^* の例となっている．

定理 *3.3* の証明. $P(G)=G$ を満たす $(n+1)$-正則グラフの 1 つを G_n^* とする．定理 2.5 と補題 3.1 により，

$$\begin{aligned} Spec(-\Delta_{G_n^*}) &= Spec(-\Delta_{P(G_n^*)}) \\ &= \varphi^{-1}(Spec(-\Delta_{G_n^*}))\cup\{1\}\cup\{\frac{n+3}{n+1}\}, \end{aligned}$$

を得る．ただし，$\varphi(x)=-(n+1)x^2+(n+3)x$．つまり，$Spec(-\Delta_{G_n^*})$ はコンパクト集合に対する方程式

$$B=\varphi^{-1}(B)\cup\{1\}\cup\{\frac{n+3}{n+1}\},$$

の解である．ところが $B \mapsto \varphi^{-1}(B) \cup \{1\} \cup \{\frac{n+3}{n+1}\}$ は（ハウスドルフ距離の下）縮小写像であるから，解は唯一存在し，

$$Spec(-\Delta_{G_n^*}) = \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} \left\{ \{\varphi^{-k}(1)\} \cup \{\varphi^{-k}(\frac{n+3}{n+1})\} \right\}}$$

によって与えられる．S_n^* は G_n^* のライングラフであるから，定理 2.3 より

$$\begin{aligned} Spec(-\Delta_{S_n^*}) &= \frac{n+1}{2n} \left(\overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} \left\{ \{\varphi^{-k}(1)\} \cup \{\varphi^{-k}(\frac{n+3}{n+1})\} \right\}} \right) \cup \{\frac{n+1}{n}\} \\ &= \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} \left\{ \{g^{-k}(\frac{n+1}{2n})\} \cup \{g^{-k}(\frac{n+3}{2n})\} \right\}} \cup \{\frac{n+1}{n}\}, \end{aligned}$$

となる．ここで，$g(x) = (f \circ \varphi \circ f^{-1})(x) = -2nx^2 + (n+3)x$, $f(x) = \frac{n+1}{2n}x$ である． □

参考文献

[1] M. Fukushima and T. Shima, *On the Spectral Analysis for the Sierpinski Gasket*, Potential Analysis **1** (1992), 1–35.

[2] Yu. Higuchi, *Isoperimetric inequality and random walks on an infinite graph and its line graph*, preprint.

[3] Yu. Higuchi, private communication.

[4] T. Shirai, *The spectrum of infinite regular line graphs*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 115–132

[5] A. Teplyaev, *Spectral analysis on infinite Sierpinski gaskets*, J. Funct. Anal. **159** (1998), 537-567.