Renormalization Group Method in Differential Equations

YAMAGUCHI Y. Yoshiyuki

Department of Applied Mathematics and Physics,
Kyoto University, Kyoto, 606-8501, Japan

Abstract

A renormalization procedure is proposed in order to uniquely construct renormalized solution to perturbed-ordinally-differential-equations with a given initial condition. Following the procedure, a sufficient condition is stated, satisfying which the renormalized solution coincides with an exact solution.

微分方程式における繰り込み群の方法

山口義幸

606-8501 京都大学情報学研究科数理工学専攻

概要

摂動を受けた微分方程式において、与えられた初期値に対して唯一の繰り込み解を得るための繰り込み法を提案する。この繰り込み法を用いたとき、繰り込み解と厳密解とが一致する十分条件を示す。

1 はじめに

さまざまな現象、例えば物理現象や化学現象の多くは常微分方程式を用いてモデル化することができる。よって、微分方程式を解くことは系の振舞を知る上で重要であるが、一般には積分不可能であり解くことはできない。しかし、微分方程式が小さいパラメータ ε を持ち $\varepsilon \to 0$ の極限では積分可能である場合、つまり摂動系である場合には、従属変数を ε で展開することにより ε の次数ごとに近似的に解を求めることができる。これを正則摂動法という。正則摂動法では、ε の高次解の振幅は、低次解の振幅よりも小さいと仮定している。

正則摂動法を用いると、共鳴などによって永年項が生じることがある。永年項が存在すると、ε の１次解が独立変数 (以下では時間とする) とともに成長して０

次解よりも大きくなるため、正則摂動法の仮定を破ってしまう。よって、正則摂動法で得た解は、永年項が成長していない、限られた時間領域でのみ正当な解となる。このような系において大域的な時間領域で正当な解を得るため、永年項を消去するさまざまな方法が開発されてきた。例えば、平均化法、多尺度展開法、正準摂動理論などがあり、まとめて特異摂動法と言われている。本報告で取り上げる繰り込み群の方法 [1] は特異摂動法の一種である。他の方法は系の特徴に合わせて使い分けしなければならないが、繰り込み群の方法はさまざまな系を統一的に扱うことができるという利点を持つ。また、従来の特異摂動法が不得意とする系、つまり摂動の 0 次方程式が非線形である系においても、永年項を消去して正則摂動解よりも改善された近似解を得ることができる [2]。

繰り込み群の方法では、正則摂動解から出発し、永年項を ε の 0 次解に現れる積分定数に繰り込むことによって消去する。繰り込まれた積分定数は繰り込み群方程式と呼ばれる方程式に従い、これを解くことによって正則摂動解よりも広い時間領域で正当な繰り込み解を得ることができる。また繰り込み群方程式は、幾何学的には包絡線方程式と解釈され [3]、元の微分方程式を簡約化した方程式となっている。簡約化されることを用いて、偏微分方程式では数々の有用な簡約化方程式が導出されている [4, 5]。

しかし、これまで知られている繰り込み群の方法では、ε の 0 次が変数分離できないときには、繰り込み群方程式が一意に決定できなかった。つまり、与えられた初期条件に対して、一意に繰り込み解を導き出すことができなかった。また、変数分離できるときでも、簡約化によってどのような項が無視されるのかということは明示されていない。そこで本報告では、常微分方程式に対して、繰り込み群方程式を体系的にかつ一意的に構成する方法を提案する。そしてこの方法を用いて、簡約化によって無視された項とは何かを考察する。

本報告の構成は次の通り。第 2 節では、本報告が提案する繰り込みの手順について説明する。第 3 節では、前節で提案した手順を三種類の微分方程式に対して適用する：(1)ε の 0 次方程式が線形で、線形演算子を表現する行列が対角化可能な場合、(2) 0 次方程式が線形だが行列が対角化不可能な場合、および (3) 0 次方程式が非線形な場合である。第 4 節では、繰り込まれた解と厳密解との関係を考察し、簡約化によって無視された項とは何かを示す。第 5 節でまとめを述べる。なお本報告では、小さいパラメータ ε の 1 次までを考えることとする。

2　繰り込み群の方法

自励系微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x) + \varepsilon g(x), \quad x \in \boldsymbol{R}^n, \quad |\varepsilon| \ll 1 \tag{1}$$

を考えよう。非自励系であっても、新たな独立変数 τ を導入し、t を方程式 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau = 1$ に従う従属変数とみることにより自励系として書き直せることを注意しておく。

さて、正則摂動解を得るために、従属変数 $\boldsymbol{x}$ を

$$x = x^{(0)} + \varepsilon x^{(1)} + \cdots$$

と展開する。ここで、$x^{(0)}, x^{(1)}$ はそれぞれ

$$\frac{\mathrm{d}x^{(0)}}{\mathrm{d}t} = f(x^{(0)}), \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}t} = Df(x^{(1)}) + g(x^{(0)}), \tag{3}$$

に従う。ただし、Df は f の Jacobi 行列である。式 (2) より得られる解を、n 個の積分定数の組 $A \in \boldsymbol{R}^n$ を用いて $x^{(0)} = \phi^{(0)}(t; A)$ と書く。ここでは、$\phi^{(0)}$ は t と A に関して C^2 級であると仮定しておく。一方、式 (3) の解は、任意の斉次項と一つの特解の和で書ける。斉次項を n 個の新たな積分定数の組 $a \in \boldsymbol{R}^n$ を用いて、$\phi^{(1)}(t; A, a)$ と書くことにする。この $\phi^{(1)}(t; A, a)$ は、$\phi^{(0)}(t; A + \varepsilon a)$ が０次方程式の解であることと、$\phi^{(0)}$ が t と A に関して C^2 級であることから、$\phi^{(0)}$ の Jacobi 行列 $\partial\phi^{(0)}/\partial A$ を用いて

$$\phi^{(1)}(t; A, a) = \frac{\partial\phi^{(0)}}{\partial A}(t; A)a$$

と書ける。この表記からも分かる通り、１次斉次解は本質的には０次解で記述されるため、永年項は持ちえない。一方、ある特解を $\psi(t; A)$ とする。この特解をさらに、永年項 $\psi^{(s)}(t; A)$ と非永年項 $\psi^{(ns)}(t; A)$ とに分けることにより、結局 ε の１次までの正則摂動解 x^{NS} は

$$x^{NS}(t) = \phi^{(0)}(t; A) + \varepsilon[\phi^{(1)}(t; A, a) + \psi^{(s)}(t; A) + \psi^{(ns)}(t; A)] \tag{4}$$

となる。

繰り込み群方程式が幾何学的には包絡線方程式とみなされることからもわかるように、繰り込み群の方法の基本的な手法は、局所時間で正当な解をつなぎあわせていくことである。よって、まず興味のある初期時刻 t_0 の回りで摂動論的に正当な解を求め、それを t_0 の近傍の時刻 μ の回りで正当な解とつなぎ合わせることにする。

いま初期時刻 t_0 で $x(t_0) = x_0$ なる初期条件を与えたとしよう。正則摂動解 $x^{NS}(t)$ は、任意定数として A と a の $2n$ 個を含むため、n 個の初期条件から A, a の値 A_0, a_0 を一意に決定することはできない。そこでここでは、 t_0 回りで摂動論的に正当な解を得るための、妥当と思われる仮定を導入する。

仮定 時刻 t_0 で永年項は存在しない。

つまり、永年項が消えるように１次斉次項 $\psi^{(1)}(t_0; A_0, a_0)$ の定数 a_0 を決定する:

$$\phi^{(1)}(t_0; A_0, a_0) + \phi^{(s)}(t_0; A_0) = 0. \tag{5}$$

条件 (5) は、n 個連立方程式であり、決めるべき定数 a_0 は n 個あるため、偶然縮退する場合を除いて、値 a_0 は A_0 と t_0 の関数として一意に決定できる。すると、t_0 回りでの妥当な解は、

$$x^{NS}(t;t_0) = \phi^{(0)}(t;A_0) + \varepsilon[\phi^{(1)}(t;A_0,a_0) + \psi^{(s)}(t;A_0) + \psi^{(ns)}(t;A_0)]$$

と書ける。改めて $x^{NS}(t_0;t_0) = x_0$ を解くことにより値 A_0 も一意に決定できる。

次に、$x^{NS}(t;t_0)$ とつなぐべき、$t=\mu$ 回りで正当な解を求めよう。方程式 (1) が自励系であるため、μ 回りで正当な解も、t_0 回りで正当な解と同じ形で書ける。ただし、時刻 μ は t_0 の近傍から任意に選んでよいため、積分定数を μ の関数として $A(\mu), a(A(\mu),\mu)$ と書くことにする。つまり、$A(t_0) = A_0$ であり、$a(A(t_0),t_0) = a_0$ である。すると、μ 回りで正当な解は

$$x^{NS}(t;\mu) = \phi^{(0)}(t;A(\mu)) + \varepsilon[\phi^{(1)}(t;A(\mu),a(A(\mu),\mu)) + \psi^{(s)}(t;A(\mu)) + \psi^{(ns)}(t;A(\mu))]$$

となる。ただし、$x^{NS}(t;t_0)$ と同様な条件

$$\phi^{(1)}(\mu;A(\mu),a(A(\mu),\mu)) + \psi^{(s)}(\mu;A(\mu)) = 0$$

が附されているとする。形式的にこれを解くと、

$$a(A(\mu),\mu) = -\left(\frac{\partial\phi^{(0)}}{\partial A}(\mu;A(\mu))\right)^{-1}\psi^{(s)}(\mu;A(\mu))$$

となる。

最後に、$x^{NS}(t;t_0)$ と $x^{NS}(t;\mu)$ を接続する。接続の際に決定すべきことは、$A(\mu)$ の値である。$A(\mu) = A(t_0) + \delta A$ と置いて、ε の 1 次まで接続の式 $x^{NS}(t;\mu) = x^{NS}(t;t_0)$ が成り立つように δA を求めると、

$$\delta A = -\varepsilon[a(A(t_0),\mu) - a(A(t_0),t_0)]$$

であることがわかる。ここで、μ は t_0 の近傍の時刻であったから、極限 $\mu \to t_0$ が取れる。$\delta A = A(\mu) - A(t_0)$ であることを思い出すと、

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\mu}(t_0) = -\varepsilon\frac{\partial a}{\partial\mu}(A(t_0),t_0)$$

を得る。今、初期時刻 t_0 は任意に選んでよいので、上の関係において t_0 を一般の μ に拡張すると、微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\mu}(\mu) = -\varepsilon\frac{\partial a}{\partial\mu}(A(\mu),\mu) \tag{6}$$

を得る。これが繰り込み群方程式であり、１次斉次項の積分定数 a によって決定されていることがわかる。繰り込み群方程式は、初期条件 $A(t_0)=A_0$ の元で解かれねばならない。

繰り込み解の時刻 t での値は、時刻 t 回りで正当な解から得るのがよいであろう。ゆえに、ε の１次までの繰り込み解 $x^{RG}(t)$ は

$$x^{RG}(t)=\phi^{(0)}(t;A(t))+\varepsilon\phi^{(ns)}(t;A(t))$$

と求まる。

3　例

この節では、前節の方法を、三種類の微分方程式に対して適用する。前節で用いた記号の意味は、本節でも同じであるとし、積分定数 A,a はそれぞれ $A=(A_1,\cdots,A_n)^T$,$a=(a_1,\cdots,a_n)^T$ という成分を持つものとする。ここに、T は転置をあらわすとする。

3.1　０次方程式が線形で対角化可能な場合

摂動を受けた調和振動子系を考える：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\varepsilon\begin{pmatrix}0\\-x_1\end{pmatrix}. \tag{7}$$

まず、対角化行列

$$R=\begin{pmatrix}1&i\\i&1\end{pmatrix}$$

を用いて対角化すると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}+\frac{\varepsilon}{2}\begin{pmatrix}iy_1-y_2\\-y_1-iy_2\end{pmatrix}$$

となる。この方程式の ε の ０次解は、

$$y_1^{(0)}=A_1\mathrm{e}^{it},\quad y_2^{(0)}=A_2\mathrm{e}^{-it} \tag{8}$$

となり、１次解は、

$$y_1^{(1)}=\frac{i}{2}A_1t\mathrm{e}^{it}+\frac{1}{4i}A_2\mathrm{e}^{-it}+a_1\mathrm{e}^{it},\quad y_2^{(1)}=-\frac{i}{2}A_2t\mathrm{e}^{-it}-\frac{1}{4i}A_1\mathrm{e}^{it}+a_2\mathrm{e}^{-it}, \tag{9}$$

である。

１次の斉次項 $\phi^{(1)}$ と 永年項 $\psi^{(s)}$ はそれぞれ

$$\phi^{(1)}(t;A,a)=\begin{pmatrix} a_1\mathrm{e}^{it} \\ a_2\mathrm{e}^{-it}\end{pmatrix},\quad \psi^{(s)}(t;A)=\frac{i}{2}\begin{pmatrix} A_1t\mathrm{e}^{it} \\ -A_2t\mathrm{e}^{-it}\end{pmatrix},$$

であるから、a_1, a_2 は

$$a_1(A(\mu),\mu)=-\frac{i}{2}\mu A_1(\mu),\quad a_2(A(\mu),\mu)=\frac{i}{2}\mu A_2(\mu),$$

と求まる。ゆえに、繰り込み群方程式は

$$\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}\mu}=\varepsilon\frac{i}{2}A_1,\quad \frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}\mu}=-\varepsilon\frac{i}{2}A_2,$$

であり、これを初期条件 $(A_1(t_0),A_2(t_0))=(A_{1,0},A_{2,0})$ の下で解けば、繰り込み解として

$$\begin{aligned} y_1^{RG}(t)&=A_{1,0}\ e^{i\varepsilon(t-t_0)/2}e^{it}+\frac{\varepsilon}{4i}A_{2,0}\ e^{-i\varepsilon(t-t_0)/2}e^{-it},\\ y_2^{RG}(t)&=A_{2,0}\ e^{-i\varepsilon(t-t_0)/2}e^{-it}-\frac{\varepsilon}{4i}A_{1,0}\ e^{i\varepsilon(t-t_0)/2}e^{it}, \end{aligned}$$

を得る。この繰り込み解を方程式 (7) に代入すると、右辺は ε の２次以上となり、１次の繰り込み解が元の方程式を１次まで近似していることがわかる。

さて、式 (7) の厳密解は

$$x^{Exact}(t)=A\mathrm{e}^{it\sqrt{1+\varepsilon}}+\mathrm{c.c.}$$

と書ける。ただし、c.c. は複素共役 (complex conjugate) を表す。これより、繰り込まれた解の振動数 $1+\varepsilon/2$ は厳密解の振動数 $\sqrt{1+\varepsilon}$ のテーラー展開を１次で打ち切ったものであることがわかる。

なお、０次方程式が対角化可能であれば、一般的な方程式に対してもここで示した方法により繰り込み解が得られ、得られる結果は従来の方法と同じとなる。

3.2 ０次方程式が線形で対角化不可能な場合

０次方程式が線形で対角化可能な場合は、本質的には１変数ごとに繰り込みを考えればよかった。つまり、正則摂動解 (8),(9) を見れば、永年項 $iA_1t\mathrm{e}^{it}/2$ は A_1 に、$-iA_2t\mathrm{e}^{-it}/2$ は A_2 にしか繰り込めないことがわかる。しかし、０次方程式が変数分離不可能な場合は、０次解に２つ以上の積分定数が現れるため、どの永年項をどの積分定数に繰り込むべきかが自明でなくなる。この節では、変数分離できない例として、０次が線形だが対角化不可能な方程式における永年項の繰り込みについて考える。このタイプの方程式は文献 [6] において考察されているが、永

年項を繰り込む先の積分定数を０次と１次から取っており、以下で示す方法とは異なっていることを注意しておく。

次の方程式を考えよう:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ -x_1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

ε の １次までの正則摂動解は

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 + A_2 t + \varepsilon \left(-\frac{1}{2}A_1 t^2 - \frac{1}{3!}A_2 t^3 + a_1 + a_2 t \right), \\ x_2(t) &= A_2 + \varepsilon \left(-A_1 t - \frac{1}{2}A_2 t^2 + a_2 \right), \end{aligned}$$

である。正則摂動解 $x_1(t)$ には $-A_1t^2/2$ と $-A_2t^3/3!$ という２つの永年項が存在するが、一方で０次解には２つの積分定数 A_1 と A_2 が現れているため、どの永年項をどちらの積分定数に繰り込むべきか自明でない。そこで、第２節の手順に従って繰り込み群方程式を求めよう。

１次の斉次項 $\phi^{(1)}$ と 永年項 $\psi^{(s)}$ とをそれぞれ

$$\phi^{(1)}(t;A,a) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 t \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \psi^{(s)}(t;A) = \begin{pmatrix} -A_1t^2/2 - A_2t^3/3! \\ -A_1 t - A_2 t^2/2 \end{pmatrix},$$

とすると、a_1, a_2 はそれぞれ

$$\begin{aligned} a_1(A(\mu),\mu) &= -A_1(\mu)\mu^2/2 - A_2(\mu)\mu^3/3, \\ a_2(A(\mu),\mu) &= A_1(\mu) + A_2(\mu)\mu^2/2, \end{aligned}$$

と決定される。よって、繰り込み群方程式は、

$$\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}\mu} = \varepsilon(\mu A_1 + \mu^2 A_2), \quad \frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}\mu} = -\varepsilon(A_1 + \mu A_2),$$

と求められる。繰り込み群方程式を用いて得られる繰り込み解

$$x_1^{RG}(t) = A_1(t) + A_2(t)t, \quad x_2^{RG}(t) = A_2(t),$$

は、元の方程式 (10) を満たすため厳密解である。

しかし、繰り込み群方程式が元の方程式よりも難しくなっているため、このままでは繰り込み群の方法を使って近似解を求めるという主旨には沿っていない。そこで、ここでは次のような対処法を用いることにする。先ほど述べたように、従属変数 x_1 と x_2 に対する永年項を同時に繰り込むことにより、１次斉次解の積分定数は一意に決めることができた。しかし、もし片方、例えば x_1 のみに着目し、x_1 の永年項のみを繰り込めばよい、という立場に立つのならば積分定数の決定に

は再び不定性が残る。この不定性を利用して、繰り込み群方程式が自励系となり、時間発展演算子の集合が１パラメータ群構造を取り戻すように１次斉次解の積分定数を決めよう。ここでは、

$$a_1 = \frac{1}{2}A_1(\mu)\mu^2, \quad a_2 = \frac{1}{3!}A_2(\mu)\mu^2,$$

と決めてみる。こうして作った繰り込み群方程式は、

$$\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}\mu} = -\varepsilon\mu A_1, \quad \frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}\mu} = -\varepsilon\frac{1}{3}\mu A_2,$$

となる。この方程式の右辺はいまだ「時間パラメータ」μ に依存しているように見えるが、$\tau = \mu^2/2$ と変数変換すると

$$\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}\tau} = -\varepsilon A_1, \quad \frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}\tau} = -\varepsilon\frac{1}{3}A_2,$$

となり、時間発展演算子の集合 $\{\varphi_\tau\}$ は群構造を回復する。この繰り込み群方程式は簡単に解けて、繰り込まれた解は

$$x^{RG}(t) = A_{1,0}\mathrm{e}^{-\varepsilon(t^2-t_0^2)/2} + A_{2,0}t\mathrm{e}^{-\varepsilon(t^2-t_0^2)/3!}$$

となる。この解と厳密解と正則摂動解の比較を図１に示した。正則摂動解に比べそれほど近似精度が上がっているとは言いがたいが、少なくとも発散を押えることに成功している。

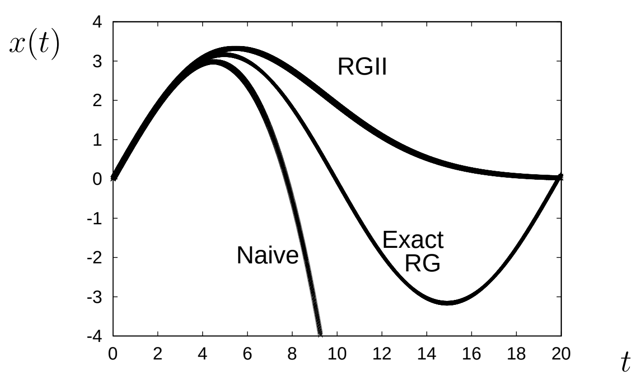


図 1: 厳密解 (Exact)、正則摂動解 (Naive) と繰り込まれた解 (RG) の比較。繰り込まれた解は、厳密解と同じ曲線を描く。正則摂動解は、時間の増加とともに負方向へ発散する。曲線 RGII は、自励系となるように工夫した繰り込み群方程式から得られた繰り込み解で、０ に収束する。横軸は時間 t で縦軸は $x(t)$ を表す。初期条件は $x(0) = 0, y(0) = 1$ で、$\varepsilon = 0.1$.

3.3 0次が非線形な場合

0次が非線形な場合にも、線形だが対角化不可能な場合と同様に2変数以上が分離不可能であることが多い。この場合に繰り込み群の方法がどのように働くかを見てみよう。

考える系は、ダスト付き Friedman-Robertson-Walker 宇宙における宇宙の大きさに対する方程式

$$\ddot{\alpha}+\frac{3}{2}(\dot{\alpha})^2=-\frac{\varepsilon}{2}\mathrm{e}^{-2\alpha} \tag{11}$$

である。ただし、$\tilde{\alpha}(t)=\mathrm{e}^{\alpha(t)}$ が宇宙の大きさを表す。この方程式の正則摂動解は、

$$x_1(t)=\alpha(t)=\ln(t+A_1)^{2/3}+A_2+\varepsilon\left[a_1(t+A_1)^{-1}+a_2-\frac{9}{20}(t+A_1)^{2/3}\exp(-2A_2)\right],$$
$$x_2(t)=\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}(t)=\frac{2}{3}(t+A_1)^{-1}+\varepsilon\left[-a_1(t+A_1)^{-2}-\frac{3}{10}(t+A_1)^{-1/3}\exp(-2A_2)\right],$$

である。図2 に 正則摂動解と厳密解の比較を示す。厳密解の $\tilde{\alpha}(t)$ がベキ的に 0 に近付く時刻で、正則摂動解はまだ大きくなっており、定性的に違う振舞を示していると言える。繰り込みによってこの正則摂動解を改善しよう。

1次の斉次項 $\phi^{(1)}$ と 永年項 $\psi^{(s)}$ とをそれぞれ

$$\phi^{(1)}(t;A,a)=\begin{pmatrix}a_1(t+A_1)^{-1}+a_2\\ -a_1(t+A_1)^{-2}\end{pmatrix},\quad \psi^{(s)}(t;A)=\begin{pmatrix}-\frac{9}{20}(t+A_1)^{2/3}\exp(-2A_2)\\ -\frac{3}{10}(t+A_1)^{-1/3}\exp(-2A_2)\end{pmatrix},$$

とする。すると、a_1,a_2 は

$$a_1(A(\mu),\mu)=-3e^{-2A_2(\mu)}(\mu+A_1(\mu))^{5/3}/10,$$
$$a_2(A(\mu),\mu)=3e^{-2A_2(\mu)}(\mu+A_1(\mu))^{2/3}/4,$$

となる。これをもとに繰り込み群方程式を作ると、

$$\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}\mu}=\varepsilon\frac{3}{4}e^{-2A_2}(\mu+A_1)^{2/3},\quad \frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}\mu}=-\varepsilon\frac{1}{2}e^{-2A_2}(\mu+A_1)^{-1/3},$$

となり、繰り込まれた解

$$x_1^{RG}(t)=\ln(t+A_1(t))^{2/3}+A_2(t),\quad x_2^{RG}(t)=2/[3(t+A_1(t))],$$

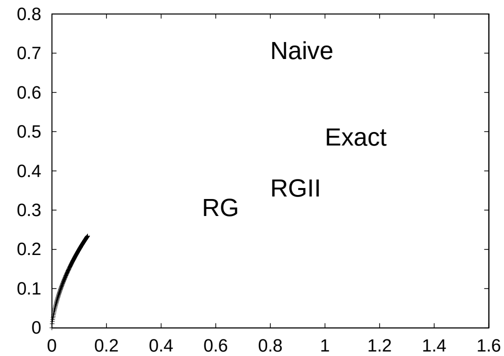
は元の方程式 (11) を満たすため厳密解である。

次に、繰り込み群方程式が自律系となるように繰り込み方を変えて見よう。今の場合、

$$a_1=0,\quad a_2=\frac{9}{20}(\mu+A_1)^{2/3}\exp(-2A_2)$$

と置くと繰り込み群方程式が

$$\frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}\mu}=0,\quad \frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}\mu}=-\varepsilon\frac{3}{10}(\mu+A_2)^{-1/3}\exp(-2A_2)$$


0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
Naive
Exact
RGII
RG

関数 $g^{(\gamma)}$ は、摂動項 $g(x)$ のうち永年項に関係する項 $g^{(s)}$ としない項 $g^{(ns)}$ に分けたものである。また、記号$\ll f(x^{RG})\gg_2$ は、$f(x^{RG})$ をテイラー展開した ε の２次以上の項を表す。このとき、次の定理が成り立つ。

定理：方程式 (1) の１次の繰り込み解を $x^{RG}(t)$ とする。このとき、次が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}x^{RG}}{\mathrm{d}t}(t) - \left[f(x^{RG}(t)) + \varepsilon g(x^{RG}(t))\right] \\
&= \varepsilon^2 \left[\left(\frac{\partial \psi^{(ns)}}{\partial A}(t; A(t))\right) \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial A}(t; A(t))\right)^{-1} g^{(s)}(\phi^{(0)}(t; A(t))) \right. \\
&\qquad \left. - Dg(\phi^{(0)}(t; A(t)))\psi^{(ns)}(t; A(t)) \right] \\
&\quad - \ll f(x^{RG})\gg_2 - \varepsilon \ll g(x^{RG})\gg_2 .
\end{aligned} \tag{12}
$$

証明: 繰り込み解 $x^{RG}(t) = \phi^{(0)}(t; A(t)) + \varepsilon\psi^{(ns)}(t; A(t))$ を t で微分すると、

$$
\frac{\mathrm{d}x^{RG}}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial t}(t; A(t)) + \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial A}(t; A(t))\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\mu}(t) + \varepsilon \left[\frac{\partial \psi^{(ns)}}{\partial t}(t; A(t)) + \frac{\partial \psi^{(ns)}}{\partial A}(t; A(t))\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\mu}(t)\right].
$$

ここに、時刻 μ で永年項を斉次項で消す条件

$$
\phi^{(1)}(\mu; A(\mu), a(A(\mu), \mu)) + \psi^{(s)}(\mu; A(\mu)) = 0,
$$

を μ で微分すると (引数はすべて $t = \mu, A = A(\mu)$ で評価)

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial t} + \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \mu} + \frac{\partial \psi^{(s)}}{\partial t} \\
&= Df(\phi^{(0)})\phi^{(1)} + \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial A}\frac{\partial a}{\partial \mu} + Df(\phi^{(0)})\psi^{(s)} + g^{(s)}(\phi^{(0)}) \\
&= \frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial A}\frac{\partial a}{\partial \mu} + g^{(s)}(\phi^{(0)}).
\end{aligned}
$$

したがって、繰り込み群方程式

$$
\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\mu}(\mu) = -\varepsilon\frac{\partial a}{\partial \mu}(A(\mu), \mu),
$$

より、

$$
\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial A}(\mu; A(\mu))\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\mu}(\mu) = \varepsilon g^{(s)}(\phi^{(0)}(\mu; A(\mu))).
$$

μ は t_0 近傍で任意だから、$\mu = t$ と置くと、

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x^{RG}}{\mathrm{d}t}(t) &= f(\phi^{(0)}(t;A(t))) + \varepsilon g^{(s)}(\phi^{(0)}(t;A(t))) \\
&\quad + \varepsilon \left[Df(\phi^{(0)}(t;A(t)))\psi^{(ns)}(t;A(t)) + g^{(ns)}(\phi^{(0)}(t;A(t))) \right] \\
&\quad + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \psi^{(ns)}}{\partial A}(t;A(t)) \right) \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial A}(t;A(t)) \right)^{-1} g^{(s)}(\phi^{(0)}(t;A(t))) \\
&= f(\phi^{(0)}(t;A(t))) + \varepsilon g(\phi^{(0)}(t;A(t))) + \varepsilon Df(\phi^{(0)}(t;A(t))\psi^{(ns)}(t;A(t)) \\
&\quad + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \psi^{(ns)}}{\partial A}(t;A(t)) \right) \left(\frac{\partial \phi^{(0)}}{\partial A}(t;A(t)) \right)^{-1} g^{(s)}(\phi^{(0)}(t;A(t))).
\end{aligned}
$$

一方、$f(x^{RG}(t)) + \varepsilon g(x^{RG}(t))$ を Taylor 展開すると、

$$
\begin{aligned}
&f(x^{RG}(t)) + \varepsilon g(x^{RG}(t)) \\
&= f(\phi^{(0)}) + \varepsilon g(\phi^{(0)}) + \varepsilon Df(\phi^{(0)})\psi^{(ns)} + \varepsilon^2 Dg(\phi^{(0)})\psi^{(ns)} + \ll f(x^{RG}) \gg_2 + \varepsilon \ll g(x^{RG}) \gg_2 .
\end{aligned}
$$

以上により、定理の関係が成り立つ。□

定理より、すぐさま次の系が導かれる：
系：正則摂動解に非永年項がなければ、１次までの繰り込み解は厳密解になる

証明: このとき、$\psi^{(ns)} = 0$ である。したがって、$\ll f(x^{RG}) \gg_2 = \ll g(x^{RG}) \gg_2 = 0$ となり、定理の関係式の右辺は消える。よって、繰り込み解 x^{RG} は厳密解となる。

つまり、非永年項がなければ、繰り込み群方程式は元の方程式を簡約化していないことがわかった。

5　まとめ

本報告では、特異摂動法の一種である繰り込み群の方法について考察を行った。繰り込み群の方法では、永年項を摂動の０次解の積分定数に繰り込むことにより消去する。０次方程式が線形で、かつ線形作用素を表す行列が対角化可能である場合には、本質的には各変数が分離でき１変数の問題に帰着させることができるため、１次解に現れる永年項をどの積分定数に繰り込むべきかは自明であった。しかし、上記以外の場合にはある変数の０次解に２つ以上の積分定数が現れるため、どの永年項をどの積分定数に繰り込むべきか明らかではない。従来の繰り込み手順はこの非自明性を経験によって埋めており、十分に体系的な方法とは言えなかった。

そこで、注目している時刻 t_0 において永年項を消すように、１次斉次解に含まれる任意な積分定数を用いる方法を提案した。この方法を用いると、０次方程式が非線形系であっても、また線形だが作用素をあらわす行列が Jordan ブロックを持つような場合であっても、体系的かつ一意的に繰り込み群方程式を導出するこ

とができる。さらに、0次方程式が線形でかつ対角化可能である場合には従来の結果と一致する。

ここで導入した繰り込み法を用いると、繰り込まれた解が元の方程式の厳密解となる場合 (方程式 (10)(11)) とならない場合 (方程式 (7)) の双方があるが、正則摂動解に非永年項がなければ1次までの繰り込み解は厳密解になることを定理として示した。非永年項は繰り込み群方程式を作る時には関与しない項であり、いわば元の方程式の解から「捨てた」情報と言える。それゆえ、非永年項がない場合には捨てるべき情報が存在せず、繰り込まれた解が元の方程式の厳密解になったと考えられる。

0次方程式において2変数以上が分離不可能となっている場合には、元の方程式が自励系であるにも関わらず、繰り込み群方程式が非自励系となる例が観察された。このとき、繰り込み群方程式は元の方程式よりも解くのが難しくなる場合がある。そこで、繰り込み群方程式を自励系とする方法を考案した。まず、分離不可能な2変数以上の中から適当ないくつかの変数を取り出し、これらの変数の永年項のみを繰り込むことを考える。つまり、注目しなかった変数に現れる永年項の繰り込みは考えないことにし、その代わりに繰り込み方に再び不定性を与えるのである。この不定性を利用して、繰り込み群方程式が自励系になるようにする。これは、繰り込み群方程式の時間発展が1パラメータ群となるようにする措置であり、繰り込みの群構造を回復するための仮定である。0次が非線形となる系においてこの処方箋を適用し、t_0 の近傍では厳密解の近似解を与え、大域的にも定性的な振舞を再現することができることを示した。せっかく消去した不定性が復活してしまうが、どのような選択の結果、どこに不定性が現れるのかが明白にわかるので、従来の方法よりは改善されていると言える。

なお本報告では、正則摂動解における永年項を指定してから繰り込み群の方法を適用しており、繰り込み解を完全に自動的に得るには至っていない。しかし、繰り込み群の方法とは近似解を与える方法であり、近似とはいらない情報を恣意的に削除することであるため、この恣意性が永年項の規定に残るのはやむをえないと考えられる。

課題としては、繰り込み群方程式を自励系とする処理はどのような理由で正当かできるのか、またそれは一意か、さらにどんな方程式に対して有効かを明らかにすることである。また、ここでは ε の1次までを考えたが、高次まで考えた場合への拡張も試みなければならない。また、得られた繰り込み解は、厳密解に比較してどの時間領域で、どの程度の精度が保証されていることになるのか、ということも明らかにしなければならない。さらに、偏微分方程式 [7, 8] や写像 [9, 10] においても、永年項を消去する目的で繰り込み群の方法が用いられているため、ここで提案した方法をこれらの系に対して拡張することも興味ある応用である。この拡張により、本報告で提案した方法を用いて、偏微分方程式の簡約化方程式を導出することも可能となるだろう。

参考文献

[1] L.-Y. Chen, N. Goldenfeld and Y. Oono, "Renormalization group theory and variational calculations for propagating fronts", Phys. Rev. E **49** (1994) 4502-11; "Renormalization group and singular perturbations: Multiple scales, boundary layers, and reductive perturbation theory", Phys. Rev. E **54** (1996) 376-94.

[2] Y. Nambu and Y.Y. Yamaguchi, "Renormalization of the long-wavelength solution of Einstein's equation", Phys. Rev. D **60** (1999) 104011.

[3] T. Kunihiro, "A geometrical formulation of the renormalization group method for global analysis", Prog. Theor. Phys. **94** (1995) 503-14.

[4] T. Maruo, K. Nozaki and A.Yosimori, "Derivation of the Kuramoto-Shivashinsky equation using the renormalization group method", Prog. Theor. Phys. **101** (1999) 243-9.

[5] Y. Hatta and T. Kunihiro, "Renormalization group method applied to kinetic equations: roles of initial values and time", hep-th/0108159.

[6] S. Ei, K. Fujii and T.Kunihiro, "Renormalization-group method for reduction of evolution equations; invariant manifolds and envelopes", Annals of Physics **280** (2000) 236-98.

[7] S. Goto, Y. Masutomi and K. Nozaki, "Lie-group approach to perturbative renormalization group method", Prog. Theor. Phys. **102** (1999) 471-97.

[8] K. Matsuba and K. Nozaki, "Renormalization group method and reductive perturbation method", J. Phys. Soc. Jpn. **66** (1007) 3315-7; "Derivation of amplitude equations by the renormalization group method", Phys. Rev. E **56** (1997) R4926-7.

[9] T. Kunihiro and J.Matsukidaira, "Dynamical reduction of discrete systems based on the renormalization-group method", Phys. Rev. E **57** (1997) 4817-20.

[10] S .Goto and K. Nozaki, "Asymptotic expansions of unstable and stable manifolds in time-discrete systems", Prog. Theor. Phys. **105** (2001) 99-107; "Regularized renormalization group reduction of symplectic maps" J. Phys. Soc. Jpn. **70** (2001) 49-54.