無限次相転移を導くくりこみ群方程式の変形

埼玉医大　物理　向田寿光

mukaida@saitama-med.ac.jp

導入　統計物理学におけるくりこみ群方程式とは、スピン模型等の統計模型に無限小のくりこみ変換を施したときの、結合定数 $g=(g_1,...,g_n)$ の変化をあらわす常微分方程式で、次のような形で得られる。

$$\frac{dg_i}{dt}=V_i(g),\qquad i=1,...,n \tag{1}$$

ここで $V(g)$ はベータ関数と呼ばれ、統計模型に具体的にくりこみ変換を施して得られるが、一般に g に関する摂動展開として求められ、

$$V_i(g)=\sum_j C_{ij}g_j+\sum_{j,k=1}^{n} C_{ijk}g_jg_k+\cdots \tag{2}$$

のようになる。

くりこみ群方程式を用いて、統計模型がもつ相転移現象を特徴づける様々な臨界指数を計算することが出来る。例えば相関長 ξ は温度 T が臨界温度 T_c に近づくにつれて発散することが知られているが、発散の様子はくりこみ群方程式の解が固定点（特異点）近傍を脱出するのに要する時間 $\bar{t}$ から求めることができる。すなわち

$$\xi=\text{constant}\ \times e^{\bar{t}} \tag{3}$$

である。式 (2) では、原点が固定点であるが、その周りで $V(g)$ を線型化した行列 C_{ij} がただ一つの正の固有値 λ を持つとしよう。くりこみ群方程式 (1) の解の初期値をパラメタ T を用いて動かし、丁度 $T=T_c$ のときに固定点に吸い込まれるようにする。このような状況では上の $\bar{t}$ は、T が T_c に近づくにつれて $\bar{t}=\log|T-T_c|^{-1/\lambda}+$ 定数のように大きくなるので、相関長は

$$\xi\sim|T-T_c|^{-\nu},\quad \nu=\frac{1}{\lambda} \tag{4}$$

の様に発散する。$\nu>0$ は相関長の臨界指数とよばれ、物理的に重要な量である。

相関長が式 (4) のように振る舞う相転移を 2 次の相転移というが、上述のように ν は方程式 (1) を積分することなく、ベータ関数を線型化したときの行列の固有値から求めることができる。一

方無限次の相転移とよばれる転移の場合、相関長は臨界温度付近で

$$\xi \sim \exp\left(A\left|T-T_c\right|^{-\sigma}\right) \tag{5}$$

のように振る舞う。このとき指数 σ を求めることが、物理的に重要であるが、無限次相転移に対応するベータ関数は、摂動の最低次で

$$V_i(g) = \sum_{j,k=1}^{n} C_{ijk} g_j g_k \tag{6}$$

のような形をしており、線型項がない。従って、2 次相転移の場合のように $V(g)$ を線型化して σ を求めることはできず、多くの場合くりこみ群方程式を実際に積分して $\bar{t}$ を求めていた。

積分することなく σ を求める方法は、文献 [1] によって示されたが、今回の発表では、[1] とは別の方法、つまり式 (6) に線型項を加えた

$$\bar{V}_i(g) = \epsilon g_i + \sum_{j,k=1}^{n} C_{ijk} g_j g_k, \quad \epsilon > 0 \tag{7}$$

を用いて、σ を求める方法を紹介する [2]。

結果　式 (6) で記述されるくりこみ群方程式が原点に吸い込まれる解を持っていたとすると、その解の原点における接線もこの方程式の解であることが、性質 $V(kg) = k^2 V(g)$ を用いるとわかる。この直線解は原点に吸い込まれる解なので、式 (7) はこの直線上に新たな固定点を持つ。この固定点の周りに式 (7) を線型化したとき、ただ一つの正の固有値 λ' を持つとしよう。このとき

$$\sigma = \frac{\epsilon}{\lambda'} \tag{8}$$

が成り立つ。

詳細　下記参考文献を参照して下さい。

参考文献

[1] C. Itoi and H. Mukaida, Phys. Rev. E **60**, 3688 (1999).

[2] H. Mukaida, e-print, cond-mat/0308461