Liouville Operator Approach to Symplecticity-Preserving RG method *

京大・情報　後藤振一郎 [1] (Shin-itiro GOTO),
名大・理　野崎一洋 [2] (Kazuhiro NOZAKI),
1)Department of Applied Mathematics and Physics, Kyoto University,
2)Department of Physics, Nagoya University.

abstract

We present a method to construct symplecticity-preserving renormalization group maps by using the Liouville operator, and obtain correctly reduced symplectic maps describing their long-time behavior even when a resonant island chain appears.

1　はじめに

特異摂動法としてのくりこみ法は Y. OONO らにより提唱され ([CGO96]), それ以来, 主に非線型現象を扱う理論物理の方法論の文脈で研究が進んできた. ここでのくりこみ法とは, 多重時間法や平均化法等の種々の系に対する洞察を必要とする特異摂動法 ([Nay]) を統一する方法の候補として注目を浴びている ([Got02],[Oon00]). このくりこみ法は, 系に対する深い洞察なしに系統的に所望の簡約方程式を導出する. 実際この方法を用いて種々の物理系の解析がなされている. しかしこれまでの研究は時間連続の系を対象にする場合が多く, 時間離散の系に関しての方法論としての知見は連続系に比べると少ない ([KM98],[GN01Prog]). シンプレクティックマップと呼ばれるシンプレクティック性を満たすクラスの時間離散系は重要なクラスに属すが, これに対する方法論の発展は重要である. それはシンプレクティックマップ系は, あるハミルトンフローのポアンカレマップと解釈されることと, 加速器科学等での実際の物理系にも現れるからである ([LL],[AA],[Tze01]). ここで, このくりこみ法のシンプレクティックマップへの適用は, 簡約系もシンプレクティク性を満たす必要があると考えられ, そこがくりこみ法がシンプレクティックマップに対してもうまく働くかのポイントになる. 正準方程式系に対する考察を行った論文 ([YN98]) を踏まえ, これまでに著者らによりシンプレクティック性を保存したくりこみ法の開発が行われてきたが, いずれも人為的な操作が必要であった ([GN01JPSJ][GNY02][TD03]). 今回の報告は極めて自然な形でのシンプレクティック性保存くりこみ法の提案を第一目的と

*The main part of this article written in Englsh is available at `http://xxx.lanl.gov/abs/nlin.CD/0309021`.

する ([GN03]). 我々の方法は, ハミルトン力学系一般に成立する, リウビル演算子がなす関係式を介してのシンプレクティック性の回復を行うものである. また, 相空間内に共鳴島構造を有していてもこの方法は有効である.

2 線型シンプレクティックマップ

ここでは我々の方法を説明するために, 厳密解が容易に求められる定数係数の線型シンプレクティックマップの解析を行う.

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= x^n + y^{n+1} \\ y^{n+1} &= y^n - a x^n + 2\varepsilon J x^n. \end{aligned}$$

ここで x^n, y^n は時刻 $n \in \boldsymbol{Z}$ での実数に値をとる正準共役な力学変数, $a, J \in \boldsymbol{R}$ はパラメター, $\varepsilon \in \boldsymbol{R}$ はスモールパラメターである. シンプレクティック性とは $dx^{n+1} \wedge dy^{n+1} - dx^n \wedge dy^n = 0$ のことである. また原点が楕円型不動点を持っていると仮定する. これは以下のように変形できる.

$$L_\theta x^n \equiv x^{n+1} - 2x^n \cos\theta + x^{n-1} = \varepsilon 2 J x^n, \quad \cos\theta \equiv 1 - a/2, \tag{1}$$

この節の冒頭に述べたように, この系 (1) は厳密解を簡単に書き下すように設定されている. その解は以下である.

$$\begin{aligned} x_E^n &= A \exp\Big(i \arccos(\cos\theta + \varepsilon J) n\Big) + \text{c.c.}, \\ &= A \exp\left[i \left(\theta + \varepsilon \frac{-J}{\sin\theta} + \varepsilon^2 \frac{-\cos\theta}{2\sin\theta} \left(\frac{J}{\sin\theta} \right)^2 + \cdots \right) n \right] + \text{c.c.}, \end{aligned} \tag{2}$$

ここで $A \in \boldsymbol{C}$ は積分定数で c.c. はこれ以前の項の複素共役項を表す. 我々はこの系を容易に積分できないとし, その仮定の上でこの系の簡約系を構成することを試みる. そのために時間連続系で発展してきたくりこみ法をそのまま離散系に拡張することを行う ([GMN99]). 先ず正則摂動解と呼ばれる, ε に関して自然数冪で展開された解の構成を行う ([Nay]). すなわち $x^n = x^{(0)n} + \varepsilon x^{(1)n} + \varepsilon^2 x^{(2)n} + \cdots$, を (1) へ代入する. すると以下のような各 ε の自然数冪オーダーでの満たすべき方程式系が得られる.

$$L_\theta x^{(0)n} = 0, \quad L_\theta x^{(1)n} = 2 J x^{(0)n}, \quad L_\theta x^{(2)n} = 2 J x_n^{(1)n}, \cdots.$$

そしてこの方程式系を解くことにより以下の摂動解を得る.

$$\begin{aligned} x^{(0)n} &= A \exp(i\theta n) + \text{c.c.}, \\ x^{(1)n} &= \frac{-iJA}{\sin\theta} n \exp(i\theta n) + \text{c.c.}, \\ x^{(2)n} &= \frac{-J^2 A}{2\sin^2\theta} \left(n^2 + i \frac{\cos\theta}{\sin\theta} n \right) \exp(i\theta n) + \text{c.c.}, \end{aligned}$$

ここで $A \in C$ は積分定数である．この解は永年項と呼ばれる $\propto n, n^2$ の項を含み，摂動解 $x^{(0)n} + \varepsilon x^{(1)n} + \varepsilon^2 x^{(2)n}$ が εn, $\varepsilon^2 n^2$ のようになり，暗に仮定していた $x^{(0)n} \geq \varepsilon x^{(1)n}$ 等の関係式を $\varepsilon n \sim 1$ なる n で破る．従ってその n 以降ではこの近似が妥当ではないことが予想される．この意味で，この解は良い近似になっている有効範囲が狭い．

ここでこの正則摂動解の永年項を除去するようにに "くりこみ変数 A^n" を導入する．

$$A^n \equiv A + \varepsilon \frac{-iJA}{\sin\theta} n + \varepsilon^2 \frac{-J^2 A}{2\sin^2\theta}\Big(n^2 + i\frac{\cos\theta}{\sin\theta} n\Big) + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \tag{3}$$

我々の解釈による離散系に単純に拡張されたくりこみ法とは，このくりこみ変数 A^n が満たすべき差分方程式に過ぎない．A^n が満たす差分方程式を構成するには (i) A^{n+1} と A^n の差をとり，

$$A^{n+1} - A^n = \bigg(-i\varepsilon\frac{J}{\sin\theta} - \varepsilon^2\frac{J^2}{2\sin^2\theta}\Big(2n + 1 + i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Big)\bigg)A + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \tag{4}$$

次に，(ii) A^n, A^{n+1} で方程式が閉じるように，A を A^n を用いて書き直す．くりこみ変換の定義から逆変換 (A を A^n により表す変換) は以下のように求まる．

$$A = \Big(1 + i\varepsilon\frac{Jn}{\sin\theta} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\Big)A^n. \tag{5}$$

これを (4) に代入することにより "単純くりこみマップ" は以下のように導出される．

$$A^{n+1} = \bigg(1 + \frac{-i\varepsilon J}{\sin\theta} + \frac{1}{2!}\Big(\frac{-i\varepsilon J}{\sin\theta}\Big)^2 - i\varepsilon^2\frac{J^2\cos\theta}{2\sin^3\theta}\bigg)A^n + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \tag{6}$$

その解は以下で与えられる．

$$A^n = \bigg(1 + \frac{-i\varepsilon J}{\sin\theta} + \frac{1}{2!}\Big(\frac{-i\varepsilon J}{\sin\theta}\Big)^2 - i\varepsilon^2\frac{J^2\cos\theta}{2\sin^3\theta} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\bigg)^n A^0. \tag{7}$$

一方で先程与えた厳密解 (2) から A^n の従う方程式は以下で与えられる．

$$A^n = A^0 \exp\bigg[i\Big(\varepsilon\frac{-J}{\sin\theta} - \varepsilon^2\frac{\cos\theta}{2\sin\theta}\Big(\frac{J}{\sin\theta}\Big)^2 + \cdots\Big)n\bigg]. \tag{8}$$

ここで注意することは，今示した "単純くりこみ法" では一般にシンプレクティック性が保存されないことである．シンプレクティックマップの簡約系を構成を目指していたのに，得られた簡約系は非シンプレクティックとなってしまったのである．(6) から実際に，$dA^{n+1} \wedge dA^{*\ n+1} - dA^n \wedge dA^{*\ n} \neq 0$, であることが直接計算により示される．ここで A^* は A の複素共役を表す．なお著者らは一般に k 次までの正則摂動解を考慮したくりこみに対しては $\mathcal{O}(\varepsilon^k)$ 次までシンプレクティック性を保存していると予想している．また，$|A^n|^2$ が厳密解の情報により保存量であるが，単純くりこみマップ (6) では保存量ではない．

この単純くりこみ法の欠点を改善するために, “シンプレクティック性保存くりこみ法” の構築を考える. 先ず, 以下の自励ハミルトンフローの満たす性質に着目する.

$$Z(t+\mu) = \Big(1 + \mu\mathcal{L}_H + \frac{\mu^2}{2!}\mathcal{L}_H^2 + \Big)Z(t) = \exp(\mu\mathcal{L}_H)Z(t), \tag{9}$$

ここで H はあるハミルトニアン, Z は正準変数 $(q_1,..,q_N,p_1,...,p_N)$ の関数, $t \in \boldsymbol{R}$ は 時間変数, $\mu \in \boldsymbol{R}$ はパラメーターである. また,

$$\mathcal{L}_H Z \;\; \equiv \;\; \{Z,H\} \equiv \sum_{j=1}^{N}\Big(\frac{\partial Z}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial Z}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j}\Big), \tag{10}$$

$\mathcal{L}_H^2 Z = \mathcal{L}_H(\mathcal{L}_H Z) = \{\{Z,H\},H\}$, 等である. ここで (10) 中の $\mathcal{L}_\mathcal{H}$ はリウビル演算子と呼ばれる一階の微分演算子である. この関係式 (10) を $Z^{n+1} \equiv Z(t+\mu), Z^n \equiv Z(t)$ とみなすことによりハミルトニアン H に付随するマップが構成される.

$$Z^{n+1} = \Psi(Z^n;\mu), \qquad \Psi(Z^n;\mu) \equiv \exp(\mu\mathcal{L}_H)Z(t)|_{Z(t)\equiv Z^n}. \tag{11}$$

この関係式を頼りに単純くりこみマップをシンプレクティックくりこみマップに変形する. 先ず (11) 中のパラメター μ をスモールパラメーター ε と置く $(\mu = \varepsilon)$. 次に (11) にはハミルトニアン H が必要であるが, 単純くりこみマップでは H の表式が分からない. この H の表式を見つけるには以下の手続きを踏めばよい.

1 (9) 中のハミルトニアン H を ε の自然数冪で展開 ($H = H^{(1)} + \varepsilon H^{(2)} + \cdots$), 次の関係式を得る.

$$\begin{aligned} Z(t+\varepsilon) &= \Big(1 + \varepsilon\mathcal{L}_H + \frac{\varepsilon^2}{2!}\mathcal{L}_H^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\Big)Z(t) \\ &= \Big\{1 + \varepsilon\mathcal{L}_{H^{(1)}} + \varepsilon^2\Big(\frac{\mathcal{L}_{H^{(1)}}^2}{2!} + \mathcal{L}_{H^{(2)}}\Big) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\Big\}Z(t). \end{aligned} \tag{12}$$

2 $H^{(1)}$ は 単純くりこみマップにおいて $(A^{n+1} - A^n)/\varepsilon \to dA/dt$, $(\varepsilon \to 0)$ とすることにより求まる. $H^{(2)}, H^{(3)}, ...$ は $H^{(1)}$ の具体的な表式と (12) を比べることにより ε の低次から次々と決定される.

3 シンプレクティック性保存くりこみマップを得るには 2. で得られた時間連続ハミルトン系を何らかの方法 (例えばシンプレクティック積分法) で差分化すればよい. この時, 時間ステップは ε にとる.

考察しているマップ (6) の場合, 極限 $\varepsilon \to 0$ をとり

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{iJ}{\sin\theta}A = \frac{\partial H}{\partial A^*} = \mathcal{L}_{H^{(1)}}A, \quad \frac{dA^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial A} = \mathcal{L}_{H^{(1)}}A^*,$$

となる．ここで $\frac{dA}{dt}$ は $(A^{n+1}-A^{n})/\varepsilon$, $\frac{dA^*}{dt}$ は $(A^{*\ n+1}-A^{*\ n})/\varepsilon$ による．これにより，

$$H^{(1)}=-i\frac{J|A|^2}{\sin\theta},\quad \mathcal{L}^2_{H^{(1)}}A=\{\{A,H^{(1)}\},H^{(1)}\}=\frac{-J^2A}{\sin^2\theta},$$

が得られる．さらにこれを用いると，以下の関係式が成立することが分かる．

$$\begin{aligned}&\Big\{1+\varepsilon\mathcal{L}_{H^{(1)}}+\varepsilon^2\Big(\frac{\mathcal{L}^2_{H^{(1)}}}{2}+\mathcal{L}_{H^{(2)}}\Big)\Big\}A\\&=A+\varepsilon\frac{-iJA}{\sin\theta}+\varepsilon^2\Big(\frac{-J^2A}{2\sin^2\theta}+\frac{\partial H^{(2)}}{\partial A^*}\Big).\end{aligned}$$

単純くりこみマップ (6) の右辺とあわせると，

$$H^{(2)}=\frac{-iJ^2\cos\theta|A|^2}{2\sin^3\theta}.$$

以上により，非シンプレクティックの単純くりこみマップから $\varepsilon\to 0$ により得られたハミルトニアン $H=H^{(1)}+H^{(2)}$ により導出される正準方程式は，

$$\frac{dA}{dt}=\frac{-iJ}{\sin\theta}A+\varepsilon\frac{-iJ^2\cos\theta}{2\sin^3\theta}A=\frac{\partial H}{\partial A},\qquad \frac{dA}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial A^*}.$$

この解は，

$$A(t)=A(0)\exp\Big\{i\Big(\frac{-J}{\sin\theta}+\varepsilon\frac{-J^2\cos\theta}{2\sin\theta^3}\Big)t\Big\},$$

であり，これはこの解の具体的表式から次のシンプレクティックマップをもたらす．

$$A^{n+1}=A^n\exp\Big\{i\varepsilon\Big(\frac{-J}{\sin\theta}+\varepsilon\frac{-J^2\cos\theta}{2\sin^3\theta}\Big)\Big\}.$$

ここで離散化の際の時間ステップは ε にとった．これが (1) におけるシンプレクティック化くりこみマップである．

以上の手続きをまとめると以下の図になる．

<u>A symplecticity-preserving RG method for symplectic maps</u>

[discrete-time]　　　　[continuous-time]

Symp. maps

naive RG $\downarrow$

naive RG maps (dissipative maps) $\xrightarrow{\text{Liouville operator}}$ RG Eqs. (canonical Eqs.)

Symp.-Pres. RG maps $\xleftarrow{\text{Symp.-Pres. discretizations}}$ RG Eqs. (canonical Eqs.)

3　２次元非線型シンプレクティックマップ

非線型シンプレクティックマップの場合には一般にカオス系となるが, その場合でも我々の方法に変更は生じない. ２次元相空間に大きな共鳴島構造が生じない場合はシンプレクティックくりこみマップはその解が解析的に表式を持つ. 大きな共鳴島が生じる場合でも我々の方法により簡約系が得られる.

3.1　共鳴島構造を生じない場合

次の形のシンプレクティックマップの簡約を考察する.

$$
\begin{aligned}
x^{n+1} &= x^n + y^{n+1} \\
y^{n+1} &= y^n - ax^n + 2\varepsilon J(x^n)^3,
\end{aligned}
$$

ここで x^n, y^n は前節と同様, 時刻 n での実数値をとる互いに正準共役な力学変数で ε はスモールパラメーター, a, J は $\mathcal{O}(1)$ のパラメーターであり, 相空間原点は楕円型と仮定する. このマップは以下のように変形できる.

$$
L_\theta x^n = \varepsilon 2J(x^n)^3, \tag{13}
$$

以下これを考察する. L_θ の定義は線型の場合と同じである.

くりこみマップを以下のように導出する. 先ず正則摂動展開, $x^n = x^{(0)n} + \varepsilon x^{(1)n} + x^{(2)n} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$, により

$$
L_\theta x^{(0)n} = 0, \quad L_\theta x^{(1)n} = 2J(x^{(0)n})^3, \quad L_\theta x^{(2)n} = 6J(x^{(0)n})^2 x^{(1)n}. \tag{14}
$$

そしてその解は,

$$
\begin{aligned}
x^{(0)n} &= A\mathrm{e}^{i\theta n} + \mathrm{c.c.} \qquad (15)\\
x^{(1)n} &= \frac{-3i|A|^2AJ}{\sin\theta} n\mathrm{e}^{i\theta n} + \frac{JA^3}{\cos 3\theta - \cos\theta}\mathrm{e}^{3i\theta n} + \mathrm{c.c.} \qquad (16)\\
x^{(2)n} &= \Big\{\frac{-9}{2}\frac{J^2|A|^4A}{\sin^2\theta}n^2 - i\frac{J^2|A|^4A}{\sin\theta}\Big(\frac{3}{\cos 3\theta - \cos\theta} + \frac{9\cos\theta}{2\sin^2\theta}\Big)n\Big\}\mathrm{e}^{i\theta n} \\
&\quad + \Big\{\frac{-9iJ^2|A|^2A^3}{(\cos 3\theta - \cos\theta)\sin\theta}n + \frac{J^2|A|^2A^3}{2(\cos 3\theta - \cos\theta)^2}\Big\{12 - 18\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}\Big\}\Big\}\mathrm{e}^{3i\theta n} \\
&\quad + \Big\{\frac{3JA^5}{(\cos 5\theta - \cos\theta)(\cos 3\theta - \cos\theta)}\Big\}\mathrm{e}^{5i\theta n} + \mathrm{c.c.}, \qquad (17)
\end{aligned}
$$

と求まる. ここで $\cos\theta \neq \cos 3\theta, \quad \cos\theta \neq \cos 5\theta$. を仮定する. この仮定が成立しない場合は次の小節で考察する. 永年項を拾いくりこみ変換を定義する.

$$
\begin{aligned}
A^n &\equiv A + \varepsilon\frac{-3i|A|^2AJ}{\sin\theta}n \\
&\quad + \varepsilon^2\Big\{\frac{-9}{2}\frac{J^2|A|^4A}{\sin^2\theta}n^2 - i\frac{J^2|A|^4A}{\sin\theta}\Big(\frac{3}{\cos 3\theta - \cos\theta} + \frac{9\cos\theta}{2\sin^2\theta}\Big)n\Big\}.
\end{aligned} \tag{18}
$$

これにより単純くりこみマップを構成すると,

$$
\begin{aligned}
A^{n+1} &= A^n + \varepsilon \frac{-3iJ}{\sin\theta}|A^n|^2 A^n + \varepsilon^2 \Big\{ \frac{1}{2!}\Big(\frac{-3iJ}{\sin\theta}|A^n|^2\Big)^2 A^n \\
&\quad - \Big(\frac{9i\cos\theta}{2\sin^3\theta}J^2 + \frac{3iJ^2}{\sin\theta(\cos 3\theta - \cos\theta)}\Big)|A^n|^4 A^n \Big\}, \qquad (19)
\end{aligned}
$$

が得られる. この系はシンプレクティック性を有していないので, この非シンプレクティックマップを近似するシンプレクティックマップを以下のように探す. 実数に値をとる変数 A_1^n, A_2^n ($A^n = A_1^n + iA_2^n$), により単純くりこみマップ (19) を書き換えれば,

$$
\begin{aligned}
A_1^{n+1} &= A_1^n + \varepsilon \frac{3J}{\sin\theta}(A_1^{n2} + A_2^{n2})A_2^n + \varepsilon^2 \Big[\frac{-1}{2!}\Big\{\frac{3J}{\sin\theta}(A_1^{n2} + A_2^{n2})\Big\}^2 A_1^n \\
&\quad + \Big\{\frac{9\cos\theta}{2\sin^3\theta} + \frac{3}{\sin\theta(\cos 3\theta - \cos\theta)}\Big\} J^2 (A_1^{n2} + A_2^{n2})^2 A_2^n \Big], \qquad (20) \\
A_2^{n+1} &= A_2^n + \varepsilon \frac{-3J}{\sin\theta}(A_1^{n2} + A_2^{n2})A_1^n + \varepsilon^2 \Big[\frac{-1}{2!}\Big\{\frac{3J}{\sin\theta}(A_1^{n2} + A_2^{n2})\Big\}^2 A_2^n \\
&\quad - \Big\{\frac{9\cos\theta}{2\sin^3\theta} + \frac{3}{\sin\theta(\cos 3\theta - \cos\theta)}\Big\} J^2 (A_1^{n2} + A_2^{n2})^2 A_1^n \Big]. \qquad (21)
\end{aligned}
$$

線型シンプレクティックマップの節で示した一般論に従い, この系の $\varepsilon \to 0$ 極限をとることにより以下を得る,

$$
\begin{aligned}
\frac{dA_1}{dt} &= \frac{3J}{\sin\theta}\Big(A_1^2 + A_2^2\Big)A_2 = \frac{\partial H}{\partial A_2} = \mathcal{L}_{H^{(1)}} A_1, \\
\frac{dA_2}{dt} &= -\frac{3J}{\sin\theta}\Big(A_1^2 + A_2^2\Big)A_1 = -\frac{\partial H}{\partial A_1} = \mathcal{L}_{H^{(1)}} A_2,
\end{aligned}
$$

ここで $H^{(1)} = \frac{3J(A_1^2+A_2^2)^2}{4\sin\theta}$ である. 従って以下の関係が成立していることがわかる.

$$
\begin{aligned}
&\Big\{1 + \varepsilon\mathcal{L}_{H^{(1)}} + \varepsilon^2\Big(\frac{\mathcal{L}_{H^{(1)}}^2}{2!} + \mathcal{L}_{H^{(2)}}\Big)\Big\} A_1(t) \\
&= A_1 + \varepsilon\frac{3J}{\sin\theta}(A_1^2 + A_2^2)A_2 + \varepsilon^2\Big\{\frac{-1}{2!}\Big(\frac{3J}{\sin\theta}\Big)^2\Big(A_1^2 + A_2^2\Big)^2 A_1 + \frac{\partial H^{(2)}}{\partial A_2}\Big\}, \qquad (22) \\
&\Big\{1 + \varepsilon\mathcal{L}_{H^{(1)}} + \varepsilon^2\Big(\frac{\mathcal{L}_{H^{(1)}}^2}{2!} + \mathcal{L}_{H^{(2)}}\Big)\Big\} A_2(t) \\
&= A_2 + \varepsilon\frac{-3J}{\sin\theta}(A_1^2 + A_2^2)A_1 + \varepsilon^2\Big\{\frac{-1}{2!}\Big(\frac{3J}{\sin\theta}\Big)^2\Big(A_1^2 + A_2^2\Big)^2 A_2 - \frac{\partial H^{(2)}}{\partial A_1}\Big\}. \qquad (23)
\end{aligned}
$$

従い, $H^{(2)}$ は単純くりこみマップ (20)–(21) と (22)–(23) を比べることにより,

$$
H^{(2)} = \Big\{\frac{9\cos\theta}{2\sin\theta^3} + \frac{3}{\sin\theta(\cos 3\theta - \cos\theta)}\Big\}\frac{J^2(A_1^2 + A_2^2)^3}{6}.
$$

と計算される. 結局 $H = H^{(1)} + \varepsilon H^{(2)}$ は以下のように構成された.

$$
\begin{aligned}
H &= \alpha(A_1^2 + A_2^2)^2 + \beta(A_1^2 + A_2^2)^3. \\
\alpha &\equiv \frac{3J}{4\sin\theta}, \qquad \beta \equiv \varepsilon\Big\{\frac{9\cos\theta}{2\sin^3\theta} + \frac{3}{\sin\theta(\cos 3\theta - \cos\theta)}\Big\}\frac{J^2}{6}.
\end{aligned}
$$

この系は正準変換 $A_1 = \sqrt{2I}\sin\Theta, A_2 = \sqrt{2I}\cos\Theta$, $(dA_1 \wedge dA_2 = d\Theta \wedge dI)$ により

$$
\frac{d\Theta}{dt} = 8\alpha I + 24\beta I^2 = \frac{\partial H}{\partial I}, \qquad \frac{dI}{dt} = 0 = -\frac{\partial H}{\partial \Theta},
$$

と解析しやすい系に移ることができる. 指数関数でくりこみ変数を書けば以下である.

$$
A = A_1 + iA_2 = \sqrt{2I(0)}\exp\Big(-i\Big(8\alpha I(0) + 24\beta I(0)^2\Big)t - i\theta(0) + i\pi/2\Big).
$$

解の具体的表示により, シンプレクティック性保存のくりこみマップは時間差分間隔 ε を用いて,

$$
A^{n+1} = A^n \exp\Big[i\varepsilon\Big\{\frac{-3J|A^n|^2}{\sin\theta} + \varepsilon J^2|A^n|^4\Big(-\frac{9\cos\theta}{2\sin^3\theta} - \frac{3}{\sin\theta(\cos 3\theta - \cos\theta)}\Big)\Big\}\Big]. \tag{24}
$$

ここで $\sqrt{2I(t)} = |A(t)| = \mathrm{const.}$ の関係を用いた. この表式は発見論的ではあるが, より簡便な方法である "指数化法" により求めることができる ([GN01JPSJ]). 更に (24) の解が容易に求められるので, 回転数等の解析的表式が求められる ([GN01JPSJ]).

3.2 共鳴島構造を生じる場合

シンプレクティックマップ (13) において, $\cos\theta = \cos 3\theta$ に近いパラメターをとる場合について考察する. θ を $\theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon\theta^{(1)} + \varepsilon^2\theta^{(2)} + \cdots$, のように展開する. すると (13) は次の形の方程式になる.

$$
L_{\pi/2}x^n = \varepsilon\Big(2J(x^n)^3 - 2\theta^{(1)}x^n\Big) - 2\varepsilon^2\theta^{(2)}x^n, \tag{25}
$$

ここで $L_{\pi/2}x^n \equiv x^{n+1} + x^{n-1}$. 正則摂動展開により以下の方程式系を得る.

$$
\begin{aligned}
L_{\pi/2}x^{(0)n} &= 0, \\
L_{\pi/2}x^{(1)n} &= 2J(x^{(0)n})^3 - 2\theta^{(1)}x^{(0)n}, \\
L_{\pi/2}x^{(2)n} &= 6J(x^{(0)n})^2x^{(1)n} - 2\theta^{(1)}x^{(1)n} - 2\theta^{(2)}x^{(0)n}.
\end{aligned}
$$

その解は以下で与えられる.

$$
\begin{aligned}
x^{(0)n} &= Ai^n + \mathrm{c.c.} \\
x^{(1)n} &= (-i)i^n n\Big[J(A^{*3} + 3|A|^2A) - \theta^{(1)}A\Big] + \mathrm{c.c.} \\
x^{(2)n} &= i^n n^2\Big[\frac{3}{2}J^2\Big(-2|A|^4A + |A|^2A^{*3} + A^5\Big) \\
&\quad + J\theta^{(1)}\Big(3|A|^2A - A^{*3}\Big) - \frac{\theta^{(1)2}}{2}A\Big] + i^n ni\theta^{(2)}A + \mathrm{c.c.}.
\end{aligned}
$$

永年項を拾い, くりこみ変換を定義する.

$$\begin{aligned} A^n &\equiv A + \varepsilon(-i)n\Big\{J(A^{*3} + 3|A|^2 A) - \theta^{(1)}A\Big\} \\ &\quad + \varepsilon^2 n^2\Big\{\frac{3}{2}J^2(-2|A|^4 A + |A|^2 A^{*3} + A^5) + J\theta^{(1)}(3|A|^2 A - A^{*3}) - \\ &\quad \frac{\theta^{(1)2}}{2}A\Big\} + \varepsilon^2 ni\theta^{(2)}A + \text{c.c.}. \end{aligned}$$

くりこみ逆変換をくりこみ変換の定義により求めると,

$$A = A^n + \varepsilon in\Big\{J\Big((A^{*\,n})^3 + 3|A^n|^2 A^n\Big) - \theta^{(1)}A^n\Big\}.$$

以上より単純くりこみマップが以下のように求まる.

$$\begin{aligned} A_1^{n+1} &= A_1^n + \varepsilon\Big(4J(A_2^n)^3 - \theta^{(1)}A_2^n\Big) + \varepsilon^2\Big\{-24J^2(A_1^n)^3(A_2^n)^2 \\ &\quad + 2J\theta^{(1)}\Big((A_1^n)^3 + 3A_1^n(A_2^n)^2\Big) - \frac{\theta^{(1)2}}{2}A_1^n - \theta^{(2)}A_2^n\Big\}, \qquad (26) \\ A_2^{n+1} &= A_2^n + \varepsilon\Big(-4J(A_1^n)^3 + \theta^{(1)}A_1^n\Big) + \varepsilon^2\Big\{-24J^2(A_1^n)^2(A_2^n)^3 \\ &\quad + 2J\theta^{(1)}\Big((A_1^n)^3 + 3(A_1^n)^2 A_2^n\Big) - \frac{\theta^{(1)2}}{2}A_2^n - \theta^{(2)}A_1^n\Big\}. \qquad (27) \end{aligned}$$

ここで実数に値をとる変数 A_1^n, A_2^n $(A^n = A_1^n + iA_2^n)$ により方程式を書き換え, 極限 $\varepsilon \to 0$ をとることにより $H^{(1)}$ が求まる.

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= 4JA_2^3 - \theta^{(1)}A_2 = \frac{\partial H^{(1)}}{\partial A_2}, \\ \frac{dA_2}{dt} &= -4JA_1^3 + \theta^{(1)}A_1 = -\frac{\partial H^{(1)}}{\partial A_1}, \\ H^{(1)}(A_1, A_2) &= (JA_1^4 - \theta^{(1)}A_1^2/2) + (JA_2^4 - \theta^{(1)}A_2^2/2). \end{aligned}$$

この段階で,

$$\begin{aligned} & A(t) + \varepsilon\mathcal{L}_H A(t) + \frac{\varepsilon^2\mathcal{L}_H^2}{2!}A(t) \\ & = A(t) + \varepsilon\{A(t), H^{(1)}\} + \varepsilon^2\Big(\{A(t), H^{(2)}\} + \frac{1}{2!}\{\{A(t), H^{(1)}\}, H^{(1)}\}\Big), \end{aligned}$$

が計算できるので, $H^{(2)}$ が単純くりこみマップ (26)–(27) との比較により決定され, 結局ハミルトニアンは以下のようなる.

$$H = H^{(1)} + \varepsilon H^{(2)} = J(A_1^4 + A_2^4) - \frac{\theta^{(1)} + \varepsilon\theta^{(2)}}{2}(A_1^2 + A_2^2).$$

共鳴島構造を生じない場合と異なるのは以下の点である, この系も１自由度ハミルトン系であるので, 可積分であるが, 解の具体的表示からの離散化は困難である. その場合には, ハミルトンフローを数値的に積分するアルゴリズムとして知られるシンプレクティック性を保存するように設計された “シンプレクティック積分法” を用いることにより離散化を行えばよい ([Yos93]). 例えば, 得られたハミルトニアン H を,

$$H = H_1 + H_2 = \Big(JA_1^4 - \frac{\theta'^{(1)}}{2} A_1^2 \Big) + \Big(JA_2^4 - \frac{\theta'^{(1)}}{2} A_2^2 \Big), \quad \theta'^{(1)} \equiv \theta^{(1)} + \varepsilon \theta^{(2)}.$$

のように分解し, シンプレクティック積分法

$$\mathrm{e}^{\varepsilon D_H} = \exp(\varepsilon \frac{D_{H_1}}{2}) \exp(\varepsilon D_{H_2}) \exp(\varepsilon \frac{D_{H_1}}{2}) + \mathcal{O}(\varepsilon^3).$$

により差分化を行うものとする. そのために以下を準備する. $\tau \in \boldsymbol{R}$ をパラメーターとして, H_1 単独で以下のフローを生成する.

$$\mathrm{e}^{\tau D_{H_1}}: \quad A_1(t+\tau) = A_1(t), \quad A_2(t+\tau) = A_2(t) + \Big(-4JA_1^3(t) + \theta'^{(1)} A_1(t) \Big) \tau.$$

同様に H_2 単独では,

$$\mathrm{e}^{\tau D_{H_2}}: \quad A_1(t+\tau) = A_1(t) + \Big(4JA_2^3(t) - \theta'^{(1)} A_2(t) \Big) \tau, \quad A_2(t+\tau) = A_2(t),$$

なる関係式を与える.

これによりシンプレクティック積分法に従い合成写像を構成すると, 最終的に以下のシンプレクティック性保存くりこみマップを得る.

$$\begin{aligned} A_1^{n+1} &= A_1^n + \varepsilon \Big[4J \Big\{ A_2^n + \frac{\varepsilon}{2} (-4JA_1^{n3} + \theta'^{(1)} A_1^n) \Big\}^3 \\ &\quad - \theta'^{(1)} \Big\{ A_2^n + \frac{\varepsilon}{2} (-4JA_1^{n3} + \theta'^{(1)} A_1^n) \Big\} \Big], \qquad (28) \\ A_2^{n+1} &= A_2^n + \frac{\varepsilon}{2} \Big(-4JA_1^{n3} + \theta'^{(1)} A_1^n \Big) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} \Big(-4JA_1^{n+1\ 3} + \theta'^{(1)} A_1^{n+1} \Big). \qquad (29) \end{aligned}$$

ここで差分化の際に生じる不定性の時間ステップは一般論により ε に選んだ.

3.3 シンプレクティック性保存くりこみ法の正当性の数値的検証

この小節では我々が提唱するシンプレクティック性保存くりこみ法の正しさを数値的に確かめる. まず, 共鳴島構造が相空間内に現れない場合について調べる (図１). シンプレクティック性を保存するくりこみマップは, その相構造において元のマップとの対応が良く, 正準性回復の操作は重要である事が確認される.

次に共鳴島構造が相空間に現れる場合について調べる (図２). 共鳴島構造を無視した場合におけるシンプレクティック性保存くりこみによる簡約結果を, 共鳴島構造を有する系に適用すると数値的にも正しくないことがわかる.

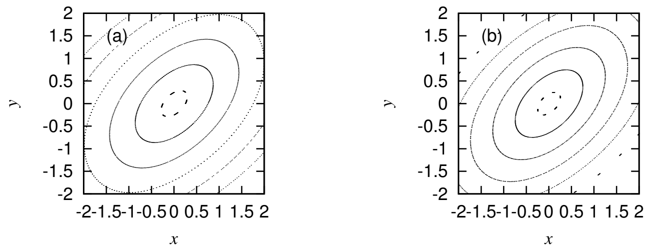

図 1: Phase portraits of the 2-dimensional symplectic map model when any big resonant islands does not appear, with the parameters are $\varepsilon = 0.01, a = 1.0, J = 1.0$: (a) the original map [Eq. (13)], (b) the Liouville operator approach to the RG method [Eq.(24) up to $\mathcal{O}(\varepsilon)$, x, y are reconstructed.].

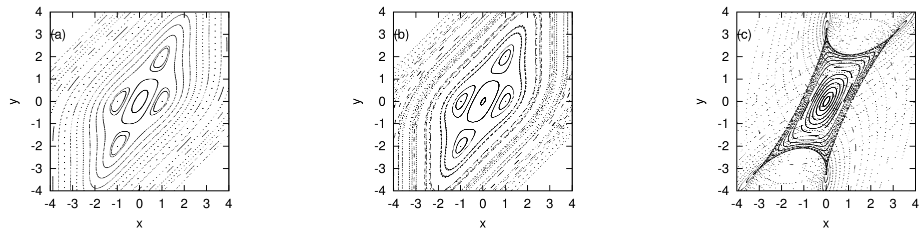

図 2: Phase portraits of the 2-dimensional symplectic map model when a resonant island appears, with the parameters are $\varepsilon = 0.01, J = 1.0$, and $\theta^{(1)} = 1.0$: (a) the original map [Eq. (25)], (b) the Liouville operator approach to the RG method [Eq. (28)–(29) up to $\mathcal{O}(\varepsilon)$, x, y are reconstructed.], (c) the exponentiated RG method [Eq.(24) up to $\mathcal{O}(\varepsilon)$, x, y are reconstructed.].

4 高次元非線型シンプレクティックマップ

前節まで考察してきた例題は２次元の相空間を持つ系であった．我々の方法は高次元系に対しても何ら問題は生じない．簡約系を得るための手続きは２次元系の場合と全く同じである．

4.1 共鳴島構造を生じない場合

以下の $2N$ 次元相空間上で定義されたシンプレクティックマップ系を考察する．

$$x_j^{n+1} - x_j^n = p_j^n \tag{30}$$

$$p_j^{n+1} - p_j^n = -a x_j^n + \varepsilon\Big(- \alpha (x_j^n)^3 + \nu \triangle_j^2 x_j^n \Big), \tag{31}$$

ここで ε がスモールパラメーター，a, α, ν は $\mathcal{O}(1)$ のパラメーターである．q_j^n, p_j^n は時刻 n での，サイト j に配置された正準共役な力学変数で実数値をとる．この系における

シンプレクティック性とは $\sum_j dx_j^{n+1} \wedge dp_j^{n+1} - \sum_j dx_j^n \wedge dp_j^n = 0,$ のことである．また, $\triangle_j^2 x_j^n \equiv x_{j+1}^n - 2x_j^n + x_{j-1}^n$ である.

正則摂動解 $x_j^n = x_j^{(0)n} + \varepsilon x_j^{(1)n} + \cdots$ は以下で与えられる.

$$\begin{aligned} x_j^n &= \left\{ A_j + i\varepsilon n \frac{1}{2\sin\theta} \left(\nu \triangle_j^2 A_j - 3\alpha |A_j|^2 A_j \right) \right\} \exp(-i\theta n) \\ &\quad - \frac{\alpha A_j^3}{2(\cos 3\theta - \cos\theta)} \exp(-3i\theta) + \text{c.c.}. \end{aligned}$$

ここで $A_j \in \boldsymbol{C}$ は積分定数である．$\cos\theta$ の定義は (1) 中の定義と同じである．$\cos 3\theta \approx \cos\theta$ の場合は後の小節で議論する．永年項 $(\propto n)$ を処理するために以下のようにくりこみ変換を定義する.

$$A_j^n \equiv A_j + i\varepsilon n \frac{1}{2\sin\theta} \left(\nu \triangle_j^2 A_j - 3\alpha |A_j|^2 A_j \right).$$

これによる単純くりこみマップは

$$A_j^{n+1} = A_j^n + i\varepsilon \frac{1}{2\sin\theta} \left(\nu \triangle_j^2 A_j^n - 3\alpha |A_j^n|^2 A_j^n \right).$$

この単純くりこみマップにおいて ε を時間ステップとすると以下の微分方程式が得られる.

$$\frac{dA_j}{dt} = \frac{-i}{2\sin\theta} \left(\nu \triangle_j^2 A_j - 3\alpha |A_j|^2 A_j \right) = \frac{\partial H}{\partial A_j^*}, \qquad \frac{dA_j^*}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial A_j}.$$

ここで

$$H = \frac{-i}{2\sin\theta} \left[\nu \sum_j |A_{j+1} - A_j|^2 + \frac{3\alpha}{2} \sum_j |A_j|^4 \right],$$

である．シンプレクティック積分法を用いるため, $H = H^\alpha + H^\nu$, のように ν に比例する部分のハミルトニアンと α に比例する部分のハミルトニアンに分解する.

H^α がつくるハミルトニアンフローの解より

$$A_j(t+\tau') = A_j(t) \exp\left(\frac{-3i\alpha}{2\sin\theta} |A_j(t)|^2 \right),$$

が成立する事がわかる．ここで τ' は任意の実数 $(\equiv \varepsilon)$ である.

また, H^ν がつくるハミルトンからは以下が得られる.

$$\frac{dA_j}{dt} = \frac{i}{2\sin\theta} \nu \triangle_j^2 A_j.$$

これを陰的中点法：$\frac{dz}{dt} = f(z)$, に対するハミルトン系に対して $z^{n+1} = z^n + \tau' f\left(\frac{z^{n+1}+z^n}{2}\right)$, なるシンプレクティック差分化法 ($\tau'$ は差分間隔 $\equiv \varepsilon$) で差分化すると

$$\left(1 - \varepsilon \frac{i\nu}{4\sin\theta} \triangle_j^2 \right) A_j^{n+1} = \left(1 + \varepsilon \frac{i\nu}{4\sin\theta} \triangle_j^2 \right) A_j^n,$$

となる.

２つのフロー, すなわち H^ν と H^α を合成すれば以下のシンプレクティック性保存くりこみマップが得られる.

$$\Big(1-\varepsilon\frac{i\nu}{4\sin\theta}\triangle_j^2\Big)A_j^{n+1}=\Big(1+\varepsilon\frac{i\nu}{4\sin\theta}\triangle_j^2\Big)\exp\Big(i\varepsilon\frac{-3\alpha}{2\sin\theta}|A_j^n|^2\Big)A_j^n. \qquad (32)$$

我々の方法により結合型のシンプレクティックマップの簡約により (32) を導いたが, これは離散非線型シュレーディンガー方程式として知られているマップである. なお時間発展の数値的検証は文献 [Got02] を参照されたい. 文献 [Got02] での簡約系の導出法は今回の方法とは異なるが, 得られる簡約マップは同じである.

4.2 共鳴島構造を生じる場合

２次元の場合で示したように $\cos\theta\approx\cos 3\theta$ のパラメーター領域に関して解析を行う. $\theta=\pi/2+\varepsilon\theta^{(1)}$ と表される系を考える. この場合における正則摂動展開による (30)–(31) の解は以下で与えられる.

$$x_j^n=A_ji^n+\varepsilon n\frac{i^n}{2i}\Big[\nu\triangle_j^2A_j-\alpha(A_j^{*\,3}+3|A_j|^2A_j)-2\theta^{(1)}A_j\Big]+\mathrm{c.c.}.$$

くりこみ変換は永年項 $(\propto n)$ を取り除くために以下のように定義する.

$$A_j^n\equiv A_j+\varepsilon n\frac{1}{2i}\Big[\nu\triangle_j^2A_j-\alpha(A_j^{*\,3}+3|A_j|^2A_j)-2\theta^{(1)}A_j\Big].$$

この系の連続連続 $\varepsilon\to 0$ は以下を与える.

$$\begin{aligned}\frac{dA_j}{dt}&=\frac{1}{2i}\Big\{\nu\triangle_j^2A_j-\alpha(A_j^{*\,3}+3|A_j|^2A_j)-2\theta^{(1)}A_j\Big\}=\frac{\partial H}{\partial A_j^*}.\\ H&=i\theta^{(1)}\sum_j|A_j|^2+\frac{-1}{2i}\sum_j\Big\{\nu|A_{j+1}-A_j|^2+\frac{3\alpha}{2}|A_j|^4+\frac{\alpha}{4}\Big(A_j^4+A_j^{*4}\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

ここで $A_j=A_{j1}+iA_{j2}$, (A_{j1},A_{j2} は実数に値をとる変数) とくりこみ変数を表示すると,

$$\begin{aligned}\frac{dA_{j1}}{dt}&=-\theta^{(1)}A_{j2}+\frac{1}{2}\Big\{\nu\triangle_j^2A_{j2}-4\alpha A_{j2}^3\Big\}=\frac{\partial H}{\partial A_{j2}}\\ \frac{dA_{j2}}{dt}&=\theta^{(1)}A_{j2}-\frac{1}{2}\Big\{\nu\triangle_j^2A_{j1}-4\alpha A_{j1}^3\Big\}=-\frac{\partial H}{\partial A_{j1}}.\end{aligned}$$

シンプレクティック積分法による差分化を行うために, ハミルトニアンを以下のように $H=H_1+H_2$ に分解する.

$$\begin{aligned}H_1&=\frac{-\theta^{(1)}}{2}\sum_j A_{j1}^2+\frac{1}{2}\Big\{\frac{-\nu}{2}(A_{j+1\ 1}-A_{j1})^2-\alpha A_{j1}^4\Big\}\\ H_2&=\frac{-\theta^{(1)}}{2}\sum_j A_{j2}^2+\frac{1}{2}\Big\{\frac{-\nu}{2}(A_{j+1\ 2}-A_{j2})^2-\alpha A_{j2}^4\Big\},\end{aligned}$$

が得られる. H_1, H_2 それぞれによるハミルトンフローをシンプレクティック積分法により合成することにより,

$$
\begin{aligned}
A_{j1}^{n+1} &= A_{j1}^{n} + \varepsilon\Big[-\theta^{(1)}A_{j2}^{n+1} + \frac{1}{2}\Big\{\nu \triangle_j^2 A_{j2}^{n+1} - 4\alpha(A_{j2}^{n+1})^3\Big\}\Big] \\
A_{j2}^{n+1} &= A_{j2}^{n} + \varepsilon\Big[\theta^{(1)}A_{j1}^{n} + \frac{-1}{2}\Big\{\nu \triangle_j^2 A_{j1}^{n} - 4\alpha(A_{j1}^{n})^3\Big\}\Big],
\end{aligned}
$$

が得られる.

この系は (32) との対応から, ある離散非線型シュレーディンガー方程式と呼べるであろう.

5 結語

我々はハミルトン力学系一般において成立する, リウビル演算子の満たす関係式を介してのシンプレクティック性保存くりこみ法を提案した. この方法により, 近化積分シンプレクティックマップにおいて永年項以外を無視した簡約シンプレクティックマップが欲しい ε の次数まで系統的に構成できるようになった. 更に, 今までの特異摂動法では到達が困難な共鳴島構造を有するパラメター領域においても, 共鳴島構造が無い場合と全く同様な手続きで簡約系を得ることができる. 今回提案した方法の更なる特色は, 時間ステップ幅が与えられた問題に入っていなくても良いことがあげられる. つまり, 差分幅が $\mathcal{O}(1)$ であっても何ら我々の方法に困難を与えない.

今回は簡約法を構成する手続きを紹介したが, 我々はこの方法を用いることにより共鳴島構造を決定する方法を提案している ([MGN03]). その論文では, 相空間内の共鳴島構造を決定する周期点の安定性をシンプレクティック性保存くりこみ法により解析していることを付記しておく.

Acknowledgement

One of the authors (S.G.) has been supported by a JSPS Fellowship for Young Scientists. The another author (K.N.) has been, in part, supported by a Grant-in-Aid for Scientific Research (C) 13640402 from the Japan Society for the Promotion of Science.

References

AA : *for example*, V. I. Arnold and A. Avez, "*Ergordic Problems in classical Mechanics*", *Benjamin-Cummings Reading, Massachusetts.* (和訳が吉岡書店から出版されている).

CGO96 : L. Y. Chen, N. Goldenfeld and Y. Oono, "*Renormalization group and sigular perturbations: Multiple scales, boundary layers, and reductive perturbation theory*", Phys. Rev. **E54** (1996), 376–394.

GMN99 : S. Goto, Y. Masutomi, and K. Nozaki, "*Lie-Group Approach to Perturbative Renormalization Group Method*", Prog. Theor. Phys. **102** (1999), 471–497.

GN01Prog : S. Goto and K. Nozaki, "*Asymptotic Expansions of Unstable and Stable Manifolds in Time-Discrete Systems*", Prog. Theor. Phys. **105** (2001), 99–107.

GN01JPSJ : S. Goto and K. Nozaki, "*Regularized Renormalization Group Reduction of Symplectic Maps*", J. Phys. Soc. Jpn. **70** (2001), 49–54.

Got02 : 後藤振一郎, "ハミルトン系に対するくりこみの方法と運動の簡約", 数理解析研究所講究録 vol. 1282, (2002),121–141.

GNY02 : S. Goto, K. Nozaki, and H. Yamada, "*Random Wandering around Homoclinic-Like Manifolds in a Symplectic Map Chain*", Prog. Theor. Phys. **107** (2002), 637–654.

GN03 : S. Goto, and K. Nozaki, "*Liouville Operator Approach to Symplecticity-Preserving Renormalization Group Method*", `http://xxx.lanl.gov/abs/nlin.CD/0309021`,(2003).

KM98 : T. Kunihiro, J. Matsukidaira, "*Dynamical reduction of discrete systems based on the renormalization-group method*" Phys. Rev. **E57** (1998), 4817–4820.

LL : *for example*, A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, "*Regular and Chaotic Dynamics (second edition)*", *Springer, Berlin* (1991).

MGN03 : T. Maruo, S. Goto and K. Nozaki, "*Renormalization Analysis of Resonance Structure in 2-D Symplectic Map*",`http://xxx.lanl.gov/abs/nlin.CD/0309072`, (2003).

Nay : *for example*, A.H. Nayfer, "*Introduction to Perturbation Techniques*", *Weiley, New York* (1981).

Oon00 : Y. Oono, "*RENORMALIZATION AND ASYMPTOTICS*", Int. J. Mod. Phys. **B14** (2000) 1327–1361. または, 大野克嗣, "くりこみ, 現象論, そして漸近解析 (別冊・数理科学『２０世紀の物理学』)", サイエンス社 (1998).

TD03 : S. I. Tzenov and R.C. Davidson, "*Renormalization group reduction of the Hénon map and application to the transverse betatron motion in cyclic accelerators*", New Journal of Physics **5** (2003), 67.

Tze01 : S.I. Tzenov, "*Renormalization Group Approach to the Beam-Beam Interaction in Circular Colliders*", `http://xxx.lanl.gov/abs/physics/0106101`, (2001).

YN98 : Y.Y. Yamaguchi and Y. Nambu, "*Canonical structure of renormalization group equation and separability of Hamiltonian sytems*", Prog. Theo. Phys. **100** (1998), 199–204.

Yos93 : H. Yoshida, "*Recent progress in the theory and application of symplectic integrators*", Celest. Mech. Dyn. Astron. **56** (1993), 27–43. または, 吉田春夫, "シンプレクティック数値解法", 数理科学, 384 (1995) JUNE, pp37 – 46.