黒体輻射とプランクの輻射法則

Black Body Radiation and Planck's Law of Radiation

徳島大学 · 総合科学部　伊東　由文 (Yoshifumi Ito)
Faculty of Integrated Arts and Sciences
The University of Tokushima

Abstract

Planck's radiation formula is the law of radiation which explains the phenomena of the black body radiation. At the beginning of the 20th century, the black body radiation and the hollow-space radiation are considered to be equivalent. Analyzing the phenomena of the hollow-space radiation, Planck's radiation formula was derived.

Nevertheless, even if the law of radiation of the hollow-space radiation is proved by the above, it is not to clarify the phenomena of the black body radiation itself. It is nothing else but Planck's radiation formula that was obtained by analyzing the phenomena of the hollow-space radiation.

Thereby, it is not yet clarified the law representing the relation between the temperature and the phenomena that the black body is glowing, or that the iron ore is glowing.

In this article, by analyzing the phenomena of the black body radiation itself in the view point of the new quantum theory, we derive the radiation formula. The obtained radiation formula is somewhat different from Planck's radiation formula. It is natural because of the difference of the way of understanding the phenomena.

We need the verification of the obtained result by new experiments and new observations.

序

投射されたすべての波長の輻射線を完全に吸収すると考えられた理想的物体を黒体という. これは, 1859 年にキルヒホッフによって導入された黒体の概念である.

黒体から放射される熱放射を黒体輻射という.

黒体輻射に関して, プランクの輻射公式が現象の実験観測結果と完全に一致していることが知られている. この意味で, プランクの輻射法則は黒体輻射の正しい輻射法則であ

ることが分かる. この輻射法則の発見は, プランクの作用量子といわれるプランクの定数 h の発見よって行われた.

本論文において, このプランクの輻射法則の真の意味を理解したい. すなわち, プランクの輻射公式は調和振動子のシュレーディンガー方程式の固有値の平均をとって導かれる. それではなぜ黒体は調和振動子の系と考えてよいのだろうか. このことを以下に明らかにしたい.

考える黒体は温度 T において熱平衡状態にあると考える.

このとき, 黒体を構成する微粒子は熱運動していると考えられる. この微粒子の運動は何らかの力の作用すなわちポテンシャルの作用によって運動していると考える. このとき, ポテンシャルの安定な平衡点の近くでは微粒子は調和振動子として運動していると考えてよい. 微粒子の大きさに比べ周りの空間は十分大きいので, 数学的近似において, 調和振動子は全空間において調和振動していると考える. 実際, 各微粒子は質点と考えられている.

このような数理モデルを用いて, 調和振動子の集団のエネルギー期待値を新量子論の公理に基づいて計算して, プランクの輻射公式を導く.

実際, プランクの輻射公式がどうして正しいのか, その真の意味は新量子論を用いて研究して初めて完全な理解に到達することができたのである.

許容する L^2 密度の中からエネルギー期待値が停留値をとるように L^2 密度を選び出すと, これが定常状態で実際に実現される量子状態を決定する.

この L^2 密度はシュレーディンガー方程式に対する固有値問題の解として与えられる. この固有関数 $\psi_n(x)$ を用いて全量子系の量子状態を決める L^2 密度 $\psi(x)$ を固有関数展開によって求める.

すなわち, 複素数列 $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ がただ一つ存在して

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x)$$

と展開する.

この L^2 密度を用いて全量子系のエネルギー期待値を計算すると, これがプランクの輻射公式になっている.

すなわち, 質量 m で、角振動数 ω の調和振動子 ρ の古典力学的エネルギー

$$\frac{1}{2m}p(\rho)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x(\rho)^2$$

を, 考えている量子系の構成する確率空間 Ω 上の確率変数と考えて期待値を計算すると,

$$E[\frac{1}{2m}p(\rho)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x(\rho)^2]$$

$$= \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{\exp[\frac{\hbar\omega}{k_B T}] - 1}$$

が従う.

これは, 1 次元調和振動子からなる全量子系のエネルギー期待値であり, プランクの輻射公式と一致する. これがプランクの輻射公式の新しい意味である.

黒体輻射の定常状態においては, 1 次元調和振動子からなる量子系は固有量子系の混合状態として実現されている. この混合の割合が数列 $\{|c_n|^2\}_{n=0}^{\infty}$ によって定まっている.

このことは, 純理論的には導けなくて, 実験データと合わせるために経験上の知識を用いている.

すなわち,

$$|c_n|^2 = (1 - \exp[-\frac{\hbar\omega}{k_B T}])(\exp[-\frac{\hbar\omega}{k_B T}])^n,$$
$$(n = 0, 1, 2, \cdots)$$

と定めている. ここで, T は絶対温度を表し, k_B はボルツマン定数を表す.

その結果, 第 n 固有値 $\mathcal{E}_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ は第 n 固有関数によって決定される量子確率分布に従う第 n 固有量子系のエネルギー期待値であることが示される. さらに, 各調和振動子のエネルギーは必ずしも離散的ではなく, 実現される固有量子系のエネルギー期待値が離散的な値をとり, その最小値が正の値をとることが分かった. すなわち, 最小の固有値 $\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ は固有量子系のエネルギー期待値の最小値である. したがって, エネルギー量子と呼ばれていたプランクの定数 h は, 固有量子系のエネルギー期待値の最小単位ということになる. これによって, プランクのエネルギー量子の新しい意味が分かった.

1 黒体輻射と考える物理系

黒体輻射の問題とは次のようなものである. ある温度に熱せられた物体はどのような色の光を放射するであろうか. 物体が熱せられると, 温度の低いときには赤い色の光を放射しているが, 温度が上がるに従って次第に白い色の光を放射するようになる. この現象を原子論的に説明するとどういうことになるかという問題である.

すなわち, 物体の熱エネルギーが, どのような色の光のエネルギーとして観測されるかという問題である.

一般に, 固体 · 液体 · 気体からの熱エネルギーの放射エネルギーは, 電磁波として放射され, 放出される電磁波のスペクトルは, 赤外線 · 可視光 · 紫外線, X 線と γ 線をすべて含んでいる.

このような物体の熱放射の問題を黒体について考えようというのである.

1859 年に, キルヒホッフとブンゼンは, 各元素はそれぞれに固有な波長の光を放射し, それと同じ波長の光だけを吸収するという事実を実験的に確かめた. これをキルヒホッフ · ブンゼンの法則という.

同じく, 1859 年に, キルヒホッフは理論的考察から次の重要な法則を導いた. すなわち, 熱平衡にある物質が輻射線に対してもつ放射能と吸収能の比は物質によらない値をとり, この値は輻射線の振動数と温度だけに依存するという法則である. この法則を証明する際に, キルヒホッフは黒体という概念を導入した.

投射されたすべての波長の輻射線を完全に吸収すると考えられた理想的物体を黒体という. これはキルヒホッフによって導入された黒体の概念である.

このように, 黒体が高温では光を放射することが実験事実として知られている. このようにして, 黒体から放射される熱放射を黒体輻射という. 黒体は, 温度 T を決定すると, 一定の熱放射の振動数スペクトル分布を与える理想化された物体である.

このことを用いて, 放射光の色, すなわち, 光の波長を観測することによって, 黒体の温度を知ることができる. このことが, 19 世紀から 20 世紀初頭にかけて製鉄業等において, 溶鉱炉内の銑鉄等の温度を測るために用いられていた重要な技術であった.

黒体輻射に関して, プランクの輻射公式が現象の実験観測結果と完全に一致していることが知られている. この意味で, プランクの輻射法則は黒体輻射の正しい輻射法則であることが分かる. この輻射法則の発見は, 1900 年にプランクがエネルギー量子あるいは作用量子といわれるプランクの定数 h を発見することによって行われた.

黒体輻射の問題等の量子現象についての研究の初期段階において, 現象と理論との不一致が見られたということは, 古典力学の限界というより, 現象の正しい理解や説明の仕方がわかっていなかったということが本当の事実である. そういう暗中模索の中で, とにかく実験データと完全に一致するプランクの輻射公式が得られていたということは驚くべきことである.

それにもかかわらず, 旧量子論の初期の頃には, 量子現象がどんな現象を意味しているのかについては明確な認識はまだできていなかった. ましてや, シュレーディンガー方程式はどこにも使われていなかった. 現在では, シュレーディンガー方程式を用いないで量子現象を理解できないということが分かっている.

本論文において, このプランクの輻射法則の真の意味を新量子論に基づいて理解したい. すなわち, プランクの輻射公式は調和振動子のシュレーディンガー方程式の固有値の平均をとって導かれることが示される. それではなぜ黒体は調和振動子の系と考えてよいのだろうか. このことを以下に明らかにしたい.

考える黒体は温度 T において熱平衡状態にあると考える.

このとき, 黒体を構成する微粒子は熱運動していると考えられる. この微粒子の運動は何らかの力の作用すなわちポテンシャルの作用によって運動していると考える. このとき, ポテンシャルの安定な平衡点の近くでは微粒子は調和振動子として運動していると考えてよい. 微粒子の大きさに比べ周りの空間は十分大きいので, 数学的近似において, 調和振動子は全空間において調和振動していると考える. 実際, 各微粒子は質点と考えられている.

このような調和振動子の集団のエネルギー期待値を新量子論の公理に基づいて計算して, プランクの輻射公式を導く.

プランクの輻射公式についての考察は, 伊東 [4], 第 6 章で述べるデバイのモデルの考察からも支持されるであろう.

伊東 [4], 6.5 節で述べるデュロン · プティの法則などから考えて, 3 次元調和振動子のモデルを考えるのが良いと思われる. このとき, 3 次元調和振動子のモデルについては, その各々の運動の自由度毎に考えることができるから, 以下の節においては主として 1 次元調和振動子のモデルを考察することにする.

本論文の結果に関しては, 伊東 [2], [3], [4], 伊東 · 萱間 · 鴨下 [1] を参照.

2 数理モデルの設定

ここでは, 1 次元調和振動子のモデルを考える. このとき, 考える量子系はこのような質量 m の調和振動子 ρ を根元事象とする集団である. この集団は, 数学的には確率空間 $\Omega = \Omega(\mathcal{B}, P)$ になっていると考えている.

調和振動子型のポテンシャルの安定な平衡点を原点とする座標系において, 1 個の調和振動子 ρ の位置座標を $x = x(\rho)$, 運動量座標を $p = p(\rho)$ と表す.

変数 x は空間 $\boldsymbol{R}^1$ において変動し, 変数 p は双対空間 $\boldsymbol{R}_1$ において変動すると考える.

このとき, 伊東 [2], [3], [4], 伊東 · 萱間 · 鴨下 [1] における新量子論の公理 II における L^2 密度 $\psi(x)$ は位置変数 x の量子確率分布法則を表し, そのフーリエ変換 $\hat{\psi}(p)$ は運動量変数の量子確率分布法則を表す.

このとき, 1 個 1 個の調和振動子は, ニュートンの運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

に従って運動している. ここで, k はある定数を表す.

この定数 k は, ニュートン力学ではバネ定数といわれている. しかし, ここで考えているモデルの場合にはバネは存在しないから, バネ定数ということは意味がない. 単に位置座標 x に比例する引力が作用していると考えているのである. このとき, 定数 k はこの比例定数を表していると考えているのである. この引力は調和振動子型のポテンシャルによる力の作用の形である.

その解は, 角振動数

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

の正弦振動で表される. ここで, 運動量は

$$p(\rho) = m\frac{dx(\rho)}{dt}$$

によって定義されている.

したがって, 各調和振動子 ρ のエネルギーはニュートン力学によって定まっているもので, その値は

$$\frac{1}{2m}p(\rho)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x(\rho)^2$$

によって与えられる. 第 1 項は調和振動子 ρ の運動エネルギーを表し, 第 2 項は調和振動子 ρ のポテンシャルエネルギーを表している. この全エネルギーは各調和振動子毎に一定値をとり, 保存量になっている.

このエネルギー変数は量子系を表す確率空間 Ω 上で定義されている量子確率変数と考える. これは連続確率変数になっている.

定常状態の実現される時刻を 0 としておく. ここで, 定常状態は熱平衡状態において実現されているとする.

このエネルギー変数の期待値, すなわちエネルギー期待値の計算は, 新量子論の公理 II を用いて次のように行われる. すなわち, $x = x(\rho)$ と $p = p(\rho)$ の量子確率分布を決定する許容 L^2 密度 $\psi(x)$ とそのフーリエ変換 $\hat{\psi}(p)$ に対して, A を $\boldsymbol{R}^1$ の領域, B を $\boldsymbol{R}_1$ の領域とするとき, 関係式

$$P(\{\rho \in \Omega; x(\rho) \in A\}) = \int_A |\psi(x)|^2 dx,$$

$$P(\{\rho \in \Omega; p(\rho) \in B\}) = \int_B |\hat{\psi}(p)|^2 dp$$

が成り立つことを用いて, 次のように計算が行われる :

$$E[\frac{1}{2m}p(\rho)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x(\rho)^2]$$

$$= E[\frac{1}{2m}p(\rho)^2] + E[\frac{1}{2}m\omega^2 x(\rho)^2]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m}p^2|\hat{\psi}(p)|^2 dp + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}m\omega^2 x^2|\psi(x)|^2\}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \{\frac{\hbar^2}{2m}|\frac{d\psi(x)}{dx}|^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2|\psi(x)|^2\}dx.$$

ここで, フーリエ変換に対するプランシュレルの等式が用いられている.

ここで, このエネルギー期待値を

$$J[\psi] = \int_{-\infty}^{\infty} \{\frac{\hbar^2}{2m}|\frac{d\psi(x)}{dx}|^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2|\psi(x)|^2\}dx.$$

とおく. この $J[\psi]$ をエネルギー汎関数ということがある.

許容 L^2 密度 ψ の中から実際に平衡状態を実現する L^2 密度 ψ を決定するために, 原理 I の変分原理を用いる.

このとき, 次の変分問題を解くことが問題である.

問題 **I**. 許容 L^2 密度 ψ の中で, エネルギー汎関数 $J[\psi]$ を停留値とするように L^2 密度 ψ を決定せよ.

3 数学的解析

2 節の問題 I の変分問題を解いて, オイラー方程式として, 次のシュレーディンガー方程式

$$(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2)\psi(x) = \mathcal{E}\psi(x)$$

が導かれる. $\mathcal{E}$ はラグランジュの未定乗数である.

すなわち, 問題 I の解 ψ は上のシュレーディンガー方程式の解として求められる.

上の固有値問題の解として, 次の固有値 $\mathcal{E}_n$ と固有関数 $\psi_n(x)$ が得られる. すなわち,

$$\mathcal{E}_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega,$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}}H_n(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x)\cdot\exp[-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2],$$

$$(n = 0, 1, 2, \cdots).$$

ここで,

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\cdot\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}.$$

とおいた.

このとき,

$$J[\psi_n] = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega,\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

が成り立つ. すなわち, シュレーディンガー方程式の固有値 $\mathcal{E}_n$ は各固有量子系のエネルギー期待値を表している.

いま, 関数 $\psi(x)$ は L^2 密度であるとする. このとき, 複素数列 $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ がただ一つ存在して,

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x)$$

と展開される. このとき, 関数 $\psi(x)$ は L^2 密度であるから, 規格化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$$

を満たしている. したがって,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = 1$$

が成り立つ.

いま, この L^2 密度 $\psi(x)$ が, 全量子系 Ω の定常状態となっている初期状態の量子確率分布を与えているとすると, 全量子系 Ω のエネルギー期待値は

$$J[\psi] = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 J[\psi_n]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$$

となる.

このとき変数分離の方法を逆にたどって, 時間依存のシュレーディンガー方程式を導く.

まず, 関数

$$\psi_n(x,t) = \psi_n(x) \exp[-i\frac{\mathcal{E}_n}{\hbar}t]$$

を考える. この両辺を時間変数 t で偏微分すると,

$$i\hbar\frac{\partial \psi_n(x,t)}{\partial t} = \mathcal{E}_n \psi_n(x) \cdot \exp[-i\frac{\mathcal{E}_n}{\hbar}t]$$

が従う. いま, 調和振動子系のハミルトニアン H を

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

と表すと,

$$H\psi_n(x) = \mathcal{E}_n \psi_n(x), \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

が成り立っている. したがって,

$$i\hbar\frac{\partial \psi_n(x,t)}{\partial t} = H\psi_n(x) \cdot \exp[-i\frac{\mathcal{E}_n}{\hbar}t]$$

$$= H\psi_n(x,t)$$

を得る.

いま, 関数 $\psi(x,t)$ を関係式

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x,t)$$

によって定義すると, これは時間依存のシュレーディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = H\psi(x,t)$$

の解であることがわかる.

解 $\psi(x,t)$ は各 t の値に対して, x の関数として L^2 密度になっている. すなわち, 規格化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = 1$$

が変数 t に無関係に成り立っている.

このとき, 上の $\psi(x)$ を初期条件とする解 $\psi(x,t)$ は

$$\psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x) \exp[-i\frac{\mathcal{E}_n}{\hbar}t]$$

によって与えられる.

いま, 経験的事実から, ボルツマン因子を用いて,

$$|c_n|^2 = (1 - \exp[-\frac{\hbar\omega}{k_B T}])(\exp[-\frac{\hbar\omega}{k_B T}])^n,$$

$$(n = 0, 1, 2, \cdots)$$

とする. ここで, T は絶対温度を表し, k_B ボルツマン定数を表す. この定数の値は

$$k_B = 1.380 \times 10^{-16} \mathrm{erg} \cdot \mathrm{deg}^{-1}$$

である.

このとき, 初期分布が平衡状態であるとすると, エネルギー期待値は,

$$J[\psi] = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 J[\psi_n]$$

$$= (1 - \exp[-\frac{\hbar\omega}{k_B T}])\hbar\omega \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2} + n)(\exp[-\frac{\hbar\omega}{k_B T}])^n,$$

$$= \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{\exp[\frac{\hbar\omega}{k_B T}] - 1}$$

となる. これはプランクの輻射公式と一致する.

ここで, 次の級数の和の公式を使った:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a + nd) r^n = \frac{a}{1-r} + \frac{dr}{(1-r)^2},\ |r| < 1.$$

4　黒体輻射とプランクの輻射公式の意味

3 節までの考察によって, 1 次元調和振動子からなる量子系 Ω は, 定常状態において次のような構造をもつことが分かる. Ω は

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \Omega_n \qquad (\text{直和})$$

のように直和に分けられている.

このとき, すべての集合 $A \in \mathcal{B}$ に対して,

$$P(A) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\Omega_n) P_{\Omega_n}(A)$$

が成り立つ. ここで, $P_{\Omega_n}(A)$ は条件付き確率を表す.

このとき, $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して, 確率空間 $(\Omega_n, \mathcal{B} \cap \Omega_n, P_{\Omega_n})$ を第 n 固有量子系ということにする. このとき, これまでの結果から, $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対し,

$$P(\Omega_n) = |c_n|^2 = (1 - \exp[-\frac{\hbar\omega}{k_B T}])(\exp[-\frac{\hbar\omega}{k_B T}])^n$$

であることが分かる. このとき,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(\Omega_n) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 = 1.$$

このとき, $\boldsymbol{R}^1$ の領域 A と $\boldsymbol{R}_1$ の領域 B に対して

$$P_{\Omega_n}(\{\rho \in \Omega_n; x(\rho) \in A\}) = \int_A |\psi_n(x)|^2 dx,$$

$$P_{\Omega_n}(\{\rho \in \Omega_n; p(\rho) \in B\}) = \int_B |\hat{\psi}_n(p)|^2 dp$$

が成り立っている. したがって, 固有量子系 Ω_n のエネルギー期待値は

$$E_{\Omega_n}[\frac{1}{2m} p(\rho)^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x(\rho)^2]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \{\frac{\hbar^2}{2m} |\frac{\psi_n(x)}{dx}|^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 |\psi_n(x)|^2\} dx$$

$$= J[\psi_n] = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega, \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

である. このとき, 全量子系と固有量子系の関係から, 全量子系のエネルギー期待値 $\overline{E}$ は,

$$\overline{E} = E[\frac{1}{2m} p(\rho)^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x(\rho)^2]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(\Omega_n) E_{\Omega_n}[\frac{1}{2m}p(\rho)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x(\rho)^2]$$
$$= \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{\exp[\frac{\hbar\omega}{k_B T}] - 1}$$

が従う.

これは, 1 次元調和振動子からなる全量子系のエネルギー期待値であり, プランクの輻射公式と一致する. これがプランクの輻射公式の新しい意味である.

黒体輻射の定常状態においては, 1 次元調和振動子からなる量子系は固有量子系の混合状態として実現されている. この混合の割合が数列 $\{|c_n|^2\}_{n=0}^{\infty}$ によって定まっている. このことは, 純理論的には導けなくて, 実験データと合わせるために経験上の知識を用いている.

その結果, 第 n 固有値 $\mathcal{E}_n$ は第 n 固有量子系のエネルギー期待値であることが示された. さらに, 各調和振動子のエネルギーは必ずしも離散的ではなく, 実現される固有量子系のエネルギー期待値が離散的な値をとり, その最小値が正の値をとることが分かった. すなわち, 最小の固有値 $\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ は固有量子系のエネルギー期待値の最小値である. したがって, エネルギー量子と呼ばれていたプランクの定数 h は, 固有量子系のエネルギー期待値の最小単位ということになる. これによって, プランクのエネルギー量子の新しい意味が分かった.

上に得られた全量子系のエネルギー期待値 $\overline{E}$ は 1 次元調和振動子 1 個当たりの平均のエネルギーを表している. 実際に観測可能な大きさの値を得るためには, たとえば, 1 モル当たりの平均のエネルギーを考えてみるのがよいであろう.

1 モル当たりのエネルギーの平均値 $\overline{E}_M$ は

$$\overline{E}_M = \frac{1}{2}N\hbar\omega + \frac{N\hbar\omega}{\exp[\frac{\hbar\omega}{k_B T}] - 1}$$

に等しい. ここで, N はアボガドロ数を表す. この定数の値は

$$N = N_A = 6.02544 \times 10^{23}\mathrm{mol}^{-1}$$

である.

3 次元調和振動子の場合には, 運動の自由度が 3 に等しいので, そのエネルギーの平均値は 1 次元調和振動子の場合の 3 倍に等しい. ゆえに, 1 粒子当たりのエネルギーの平均値 $\overline{E}$ と 1 モル当たりのエネルギーの平均値 $\overline{E}_M$ は, それぞれ,

$$\overline{E} = \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{3\hbar\omega}{\exp[\frac{\hbar\omega}{k_B T}] - 1}$$

$$\overline{E}_M = \frac{3}{2}N\hbar\omega + \frac{3N\hbar\omega}{\exp[\frac{\hbar\omega}{k_B T}] - 1}$$

に等しい.

どのようなモデルを採用すべきかは, 実験観測データとの比較によって決めなければならない.

デュロン · プティの法則などから考えて, 3 次元調和振動子のモデルを考えるのがよいと思われる.

5　近似モデル

本節では, 近似モデルについて考察する.

まず, 1 次元調和振動子の場合に, 次の近似モデルについての考察をする.

(1) $\hbar\omega \gg k_BT$ の場合. すなわち, 角振動数 ω が大きいときを考える. このことは, 相対的に温度 T が小さい場合になる.

このとき,

$$\exp[\frac{\hbar\omega}{k_BT}] \gg 1$$

だから, 近似式

$$\exp[\frac{\hbar\omega}{k_BT}] - 1 \doteqdot \exp[\frac{\hbar\omega}{k_BT}]$$

が成り立つ. ゆえに, 近似式

$$\overline{E} \doteqdot \frac{1}{2}\hbar\omega + \hbar\omega \exp[-\frac{\hbar\omega}{k_BT}],$$

$$\overline{E}_M \doteqdot \frac{1}{2}N\hbar\omega + N\hbar\omega \exp[-\frac{\hbar\omega}{k_BT}]$$

が成り立つ.

(2) $\hbar\omega \ll k_BT$ の場合. すなわち, 角振動数 ω が小さいときを考える. このことは, 相対的に温度 T が大きい場合になる.

このとき, 近似式

$$\exp[\frac{\hbar\omega}{k_BT}] - 1 \doteqdot \frac{\hbar\omega}{k_BT}$$

が成り立つから, 近似式

$$\overline{E} \doteqdot \frac{1}{2}\hbar\omega + k_BT,$$

$$\overline{E}_M \doteqdot \frac{1}{2}N\hbar\omega + Nk_BT$$

が成り立つ.

また, このとき, $\hbar\omega \ll k_BT$ だから, 右辺の第 1 項を無視すると,

$$\overline{E} \doteqdot k_BT,$$

$$\overline{E}_M \doteqdot Nk_BT$$

が従う.

$\overline{E}$ は 1 個の調和振動子当たりの平均エネルギーである. $\overline{E}_M$ は 1 モル当たりの平均エネルギーである. これは, エネルギー等分配則の一つの例である. これは高温において見られる法則性である.

次に, 3 次元調和振動子の場合の近似モデルについて考察する.

(3) $\hbar\omega \gg k_BT$ の場合. すなわち, 角振動数 ω が大きいときを考える. このことは, 相対的に温度 T が小さい場合になる.

このとき, 近似式

$$\overline{E} \doteqdot \frac{3}{2}\hbar\omega + 3\hbar\omega \exp[-\frac{\hbar\omega}{k_BT}],$$

$$\overline{E}_M \doteqdot \frac{3}{2}N\hbar\omega + 3N\hbar\omega \exp[-\frac{\hbar\omega}{k_BT}]$$

が成り立つ.

(4) $\hbar\omega \ll k_BT$ の場合. すなわち, 角振動数 ω が小さいときを考える. このことは, 相対的に温度 T が大きい場合になる.

このとき, 近似式

$$\begin{aligned}\overline{E} &\doteqdot \frac{3}{2}\hbar\omega + 3k_BT, \\ &\doteqdot 3k_BT, \\ \overline{E}_M &\doteqdot \frac{3}{2}N\hbar\omega + 3Nk_BT \\ &\doteqdot 3Nk_BT\end{aligned}$$

が成り立つ.

$\overline{E}$ は 1 個の調和振動子当たりの平均エネルギーである. $\overline{E}_M$ は 1 モル当たりの平均エネルギーである. これは, エネルギー等分配則の一つの例である. これは高温において見られる法則性である.

6 ウィーンの変位則

1893 年, ウィーンはウィーンの変位則を発見した. この法則は黒体の輻射エネルギーの分布を実験的に決定することによって, 黒体の温度 T を決定する方法を与える. このウィーンの変位則は実験結果とよく一致している.

ここでは, 4 節で得られたプランクの輻射公式を用いてウィーンの変位則を導くことを考える.

4 節で考えた $\overline{E}$ と $\overline{E}_M$ が最大になる場合の光の波長を決めることが問題である. 結果的には 1 次元と 3 次元の場合は同じになる. また,

$$\overline{E}_M = N\overline{E}$$

であるから, 3 次元モデルで, $\overline{E}_M$ の場合に考えればよい.

このとき, 角振動数 ω を持つ調和振動子のエネルギーが何色の光として観測されるかが問題である.

これに関しては, 次の光量子仮説に基づいて考えることにする.

光量子仮説. 角振動数 ω をもつ調和振動子のエネルギーは, 波長

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

をもつ光のエネルギーとして観測される. ここで, 光の振動数 ν は

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$$

によって定まる.

このとき, 関係式

$$\hbar\omega = h\nu$$

が成り立つ.

ここで, 定数 c は光速を表している.

これは, 物質粒子としての調和振動子のエネルギーが熱エネルギーとして放射されるときに観測される光のエネルギーに対応する光の波長を規定する仮説である. ある意味で, アインシュタインの光量子仮説の逆のことを規定している.

ウィーンの場合に対応して, 3 次元モデルにおいて, 黒体輻射の 1 モル当たりの平均エネルギー $\overline{E}_M$ を考えると, これは, ω が大きくなるとき, 限りなく大きくなる. したがって, $\overline{E}_M$ が最大となる場合の光の色を決めることはできない.

そこで, 黒体輻射の 1 モル当たりの平均エネルギーの代わりに黒体のモル比熱を考えてみることにする.

このとき, 黒体のモル比熱 C_M は,

$$C_M = 3N\frac{d\overline{E}_M}{dT}$$

$$= 3N\frac{\hbar^2\omega^2}{k_BT^2}\frac{\exp[\frac{\hbar\omega}{k_BT}]}{(\exp[\frac{\hbar\omega}{k_BT}]-1)^2}$$

$$= 3Nk_B(\frac{h\nu}{k_BT})^2\frac{\exp[\frac{h\nu}{k_BT}]}{(\exp[\frac{h\nu}{k_BT}]-1)^2}$$

となる.

ここで,

$$x = \frac{h\nu}{k_BT}$$

とおくと, C_M は

$$C_M = 3Nk_B\frac{x^2e^x}{(e^x-1)^2}$$

と表される.

いま, これが最大になる x の値を求める. ここで,

$$f(x) = \frac{x^2e^x}{(e^x-1)^2}$$

とおくとき, $f(x)$ が最大となる点 x_0 を求めればよい. ところが,

$$f'(x) < 0,\ (x > 0)$$

だから, $x \geq 0$ の範囲で, $x_0 = 0$ において $f(x)$ は最大値をとる. したがって,

$$\frac{h\nu}{k_BT} = x_0 = 0$$

のとき, モル比熱 C_M は最大になる.

このときの光の波長を λ_m とすると,

$$\nu = \frac{c}{\lambda_m}$$

を満たす.

したがって,

$$0 = x_0 = \frac{h\nu}{k_B T} = \frac{hc}{k_B \lambda_m T}$$

より, 近似的に, $\lambda_m T$ が十分大きな正の定数に等しいと考えることができる.

理論的には, $\lambda_m T = \infty$ となるけれども, 自然界には ∞ という物理量は存在しないから, $\lambda_m T$ は十分大きな正の定数に近似的に等しいと考えることは自然なことである.

これより, 次のウィーンの変位則が従う.

定理 (ウィーンの変位則). 上の記号を用いると, ある十分大きな正の定数 C に対し, 近似式

$$\lambda_m T \doteqdot C$$

が成り立つ.

定数 C は実験観測によるデータを用いて定められるべきものである.

このことより, 黒体の放射する光の色を観測することによって, 黒体の温度 T を近似的に決定することができる.

ウィーンの変位則が正しいことが分かれば, これは, 光量子仮説の一つの実証例になっている.

7 光量子とは何か

6 節において提出した光量子仮説から, 光量子とは何かという問題について, 以下のような考察を試みてみた. 実験観測によって実証することは将来の課題とした.

光量子仮説の主張は, アインシュタインの発見した光量子というのが, 調和振動子として運動する物質粒子と考えられるということを示唆している. このとき, 光量子の質量は 0 であってはならない.

いま, 光量子を質量 m の調和振動子であると考えることにとすると, この光量子の質量の値は, 実際に, 観測によって決定できる可能性がある.

いま, 光量子の系を調和振動子の系と考えると, その第 n 固有量子系のエネルギーの平均は,

$$\mathcal{E}_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega = (n + \frac{1}{2})h\nu, \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

となる. これが, アインシュタインの光量子仮説で, 振動数 ν の光に対応する光量子のエネルギーが $h\nu$ を単位として定まっているということの本当の意味と思われる.

このとき, 調和振動子の運動エネルギーの平均とポテンシャルエネルギーの平均が等しいことを考えると,

$$\mathcal{E}_n = \frac{1}{2}mv^2 \times 2 = mv^2 = (n + \frac{1}{2})h\nu$$

という式が得られる.

ここで, v は第 n 固有量子系の調和振動子としての光量子の速度の平均を表す.

ここで, $v = c$ であるとすると, 光量子 1 個当たりのエネルギーの平均値が mc^2 となり, アインシュタインのエネルギーの式が出てくる.

これより, 光量子の質量 m は

$$m = (n + \frac{1}{2})\frac{h\nu}{v^2}$$

に等しいことが分かる. $n = 0$ の場合には, 等式

$$m = \frac{h\nu}{2v^2}$$

が成り立つ.

この値は, 実際に, 観測によって決定できる可能性がある.

このような考察から, 光量子の質量 m が一定であるとすると, その速度は見える光の色に対応して変動するということになる. これはアインシュタインの特殊相対性原理の一つである光速が一定であるということに反することになる.

逆に, 光速が一定とすると, 光量子の質量は, 見える光の色に対応して変動することになる.

そこで考えられる問題は, 光量子の質量は一定であるか, あるいは, 光速は一定であるかという問題になる. 考えている状況は真空中とは限っていないから, 両者は両立できるのかもしれない. しかし, この問題設定では, 真空中であるかどうかの影響は考えられていない.

そこで, この問題は将来の検討課題として残さざるを得ない.

そこで, これを問題としておく.

問題　調和振動子と考えられた光量子の質量は常に一定であろうか, あるいは, その光量子の速度は常に一定であろうか.

上の光量子仮説から分かることは, 自然界に存在する光は, すべて, 恒星やその他の物体などの熱放射のエネルギーの現象形態であるということである. このことは, 光は, すべて, 調和振動子としての光量子のエネルギーの現象形態であることを意味する.

文　献

[1] 伊東由文 · 萱間顕誠 · 鴨下豊, 新量子論と輻射公式の新しい意味, 徳島大学総合科学部 自然科学研究, 第 16 巻, pp.1-10, 2003.

[2] 伊東由文, 新量子論. 現状と課題, 徳島大学総合科学部　自然科学研究, 第 18 巻, pp.1-14, 2004.

[3] 伊東由文, 新量子論. 現状と課題, 実解析学シンポジウム２００４大阪, pp.181-199, 2004.

[4] 伊東由文, 新量子論 I, プレプリント, 2005.