

On the paper "Blows Ups of Complex Solutions of the 3D Navier-Stokes System and RG Method" by Ya Sinai and et al.

奈良女子大学・理・数学 柳澤 卓 (Yanagisawa Taku)
Department of Mathematics, Nara Women's University

概要

Sinai-Li によるプレプリント "Blows Ups of Complex Solutions of the 3D-Navier-Stokes System and Renormalization Group Method" (arXiv:physics/0610101 v1) by Dong Li and Ya. G. Sinai の解説をおこなう。

1 Navier-Stokes 方程式の数学的理論 (概観)

Navier-Stokes 方程式とは、水などの縮まない（非圧縮性）流体の挙動を記述する基礎方程式である次の非線型偏微分方程式をさす：

$$(NS) \begin{cases} u_t - \mu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \end{cases} \quad (1)$$

ここに、 $u = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t)) \in \mathbb{R}^3$ は空間座標 $x \in \mathbb{R}^3$ 時刻 $t > 0$ における流体の速度ベクトルを、 $p = p(x, t) \in \mathbb{R}$ は同じく x, t における圧力を表す； $\mu > 0$ は粘性係数を表し、以下では簡単のため 1 であると仮定する； $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $(u \cdot \nabla)u = \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial}{\partial x_j} u$ であるとする。

更に、方程式 (1) に次の初期条件を課す：

$$(I.C.) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^3. \quad (2)$$

ここに、 $u_0(x)$ は初期速度ベクトルを与える既知の実数値ベクトル値関数を表す。

数学の立場からは、この Navier-Stokes 方程式の初期値問題 (1), (2) に対する解の存在およびその一意性を解明することが、最も基本的かつ重要な課題の 1 つである。この課題に対する数学的理論の出発点は、Leray (および Hopf) による次の結果である¹。

Theorem [Leray, Hopf].

初期値 u_0 が³、エネルギー有限かつ非圧縮である、すなわち、

$$u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3) : \operatorname{div} u_0 = 0 \text{ in } \mathbb{R}^3 \quad (3)$$

を満たすと仮定する

このとき、Navier-Stokes 方程式の初期値問題 (1), (2) の次のエネルギー不等式 (E.I.) を満足する時間大域的弱解 u が存在する：

$$(E.I.) \quad \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 d\tau \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \quad \text{for } \forall t > 0.$$

¹より詳しい Navier-Stokes 方程式に対する数学的理論の解説については、例えば [3] を参照して頂きたい。

Remark.1.

1. 上記 Theorem 中の弱解の一意か否かについては、未だ明らかになっていない。
2. 初期値 u_0 が十分小さい場合、あるいは粘性係数 ν が十分大きい場合は、(E.I) を満足する (1), (2) の時間大域的古典解が存在することが示されている。また、流れが 2 次元の場合 (すなわち、 $u_3 \equiv 0$ かつ u_1, u_2 が x_3 に独立な場合) には、(3) を満たす任意の初期値に対して (1), (2) の時間大域的 (2 次元の) 古典解が存在することが示されている。
3. (3) を満たす任意の初期値に対してつねに 3 次元 Navier-Stokes 方程式の初期値問題 (1), (2) の時間大域的古典解が一意的に存在するのか、あるいは (3) を満たす特定の初期値に対しては初期値問題 (1), (2) の解は有限時間で爆発する²のかという問題は、いまだ未解決の数学的課題として残されている。

2 Li – Sinai による結果

このような中で、Li と Sinai は [4](以下 [Li-Sinai] と引用) において、くりこみ群の考え方に基づく Navier-Stokes 方程式に対する考察を行い、以下に述べる結果を得た。

まず、Navier-Stokes 方程式 (1) に Fourier 変換を施して得られる次の方程式を考える³:

$$\begin{cases} v_t + |k|^2 v + i \int_{\mathbb{R}^3} \langle v(k - k'), k \rangle P_k v(k', t) dk' = 0, \\ \langle v(k, t), k \rangle = 0, \quad \text{for } k \in \mathbb{R}^3, t > 0. \end{cases} \quad (4)$$

ここに、複素数値ベクトル値関数 v は u の Fourier 像:

$$v(k, t) = \hat{u}(k, t) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i \langle k, x \rangle} u(x, t) dx$$

を表し、 P_k は $k \in \mathbb{R}^3$ の直交補空間への射影:

$$P_k v = v - \frac{\langle v, k \rangle}{\langle k, k \rangle} k$$

を表す; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{C}^3$ における内積, すなわち $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^3 v_i \overline{w_i}$ を表す。

この方程式 (4) の初期値 $v(k, 0) = v_0(k)$ に対する解は、Duhamel の原理により次の積分方程式の解として与えられる:

$$\begin{aligned} v(k, t) = \exp \{-t|k|^2\} v_0(k) + i \int_{\mathbb{R}^3} \exp \{-(t-s)|k|^2\} ds \int_{\mathbb{R}^3} \langle v(k - k', s), k \rangle P_k v(k', s) dk', \\ \langle v(k, t), k \rangle = 0 \quad \text{for } \forall k \in \mathbb{R}^3, t > 0. \end{aligned} \quad (5)$$

²すなわち、解 u に関わる何らかの (エネルギーやエンタルピー等の) 量が有限時間に発散し、 u が古典解としての滑らかさを失う。

³実際、 $v = \hat{u}$ とし (3) の第 2 式と $\hat{u} = \tilde{u}$ 等を用いると、

$$\begin{aligned} \widehat{(u \cdot \nabla) u}_\ell &= \sum_{j=1}^3 v_j * i k_j v_\ell \\ &= i \int_{\mathbb{R}^3} \langle v_j(k - k'), k' \rangle v_\ell(k') dk' \\ &= i \int_{\mathbb{R}^3} \langle v_j(k'), k - k' \rangle v_\ell(k - k') dk' \\ &= i \int_{\mathbb{R}^3} \langle v_j(k'), k \rangle v_\ell(k - k') dk', \\ &= i \int_{\mathbb{R}^3} \langle v_j(k - k'), k \rangle v_\ell(k') dk', \quad \ell = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

が成り立つことに注意 (t 変数は略してある)。

[Li-Sinai] は、この積分方程式 (5) の ((2) の初期値 u_0 の Fourier 像 $\widehat{u_0}(k)$ とは無関係な) ある初期値 $v_0(k)$ に対する解は有限時間で爆発することを示した。

Theorem [Li – Sinai].

ある測度正の閉区間 $S \subset \mathbb{R}_+^4$ と空でない部分集合 $X \subset L_\sigma^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ ⁵ が存在し、任意の $T_0 \in S$ (爆発時刻) および $\tilde{v} \in X$ (初期位相) に対して、次が成立する: (T_0 に依存する) ある A_{T_0} (初期振幅) が存在して、初期値 $v_0(k) = A_{T_0} \tilde{v}(k)$ に対する積分方程式 (5) は、一意的な解 v を時間区間 $[0, T_0)$ 上でもつ。更に、この解 v に対して、次の (A), (B) が成り立つ:

$$(A) \begin{cases} 0 < \forall T' < T_0, \exists C_{0,T'}, C_{1,T'} > 0 \text{ s.t.} \\ |v(k, t)| \leq C_{0,T'} \exp \{-C_{1,T'} |k|\} \text{ for } 0 < \forall t \leq T', \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} \lim_{t \uparrow T_0} \|v(k, t)\|_{L^2(\mathbb{R}_k^3)} = +\infty, \\ \lim_{t \uparrow T_0} \|kv(k, t)\|_{L^2(\mathbb{R}_k^3)} = +\infty, \\ \lim_{t \uparrow T_0} \|v(k, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_k^3)} = +\infty. \end{cases}$$

Remark.2.

1. 初期位相 $\tilde{v}(k)$ が空間 $L_\sigma^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ に属することと評価式 (A) より、上記 Theorem における (5) の解 $v(k, t)$ の Fourier 逆像 $\tilde{v}(x, t)$ は、(3) を満足する初期値 $u_0(x) = \tilde{v}(x)$ に対する元の Navier-Stokes 方程式の初期値問題 (1), (2) の時間区間 $(0, T_0)$ 上正則な **複素数値** 解⁶ となっていることに注意する。
2. 一方、(B) から $\tilde{v}$ のエネルギーおよびエンストロフィーは、極限 $t \uparrow T_0$ で発散することが分かる⁷。すなわち、この $\tilde{v}$ は、時刻 T_0 で爆発する 3 次元 Navier-Stokes 方程式の **複素数値** 解となっている。
3. 爆発解を導く初期位相を与える集合 X_{T_0} は、10 個のパラメーターにより記述される。

3 Theorem の証明の概略

3.1. 積分方程式 (5) の初期振幅に関するべき級数解, および recurrent equation

積分方程式 (5) における初期値 $v_0(k)$ を次で与える:

$$v_0(k) = A \tilde{v}(k) \text{ for } k \in \mathbb{R}^3. \quad (6)$$

ここに、 $A \in \mathbb{R}$ は初期振幅を表し、 $\tilde{v}(k)$ は初期位相を与える $\mathbb{C}^3$ -値関数で $\tilde{v}(k) \perp k$ を満たすものとする。

(5) の近似解を、次の Iteration scheme を通して構成していく:

$$v_A^1(k, t) = \exp \{-t|k|^2\} v_0(k) = \exp \{-t|k|^2\} A \tilde{v}(k),$$

$$v_A^{j+1}(k, t) = v_A^j(k, t) + i \int_0^t \exp \{-(t-s)|k|^2\} ds \int_{\mathbb{R}^3} \langle v_A^j(k-k', s), k \rangle P_k v_A^j(k', s) dk', \quad j \geq 1.$$

上記 scheme において逐次代入を繰り返すと、(5) の解を与える $\{v_A^j\}_{j=1}^\infty$ の (形式的) 極限

$$v_A(k, t) = \lim_{j \rightarrow \infty} v_A^j(k, t),$$

⁴ $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} | t > 0\}$ であるとする。

⁵関数空間 $L_\sigma^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ は、複素数値ベクトル値関数 $\tilde{v}(k)$ で $L^2(\mathbb{R}_k^3)$ に属し、かつ $\tilde{v}(k) \perp k = 0$ for a.e. $k \in \mathbb{R}^3$ をみたすもの全体の集合を表すとする。

⁶正確には、正則な複素数値解の定数倍。

⁷しかし、評価式 (A) が成立するので、 $(0, T_0)$ 上では $\tilde{v}$ のエネルギーおよびエンストロフィーは共に有限であることに注意。

は, A に関する次のべき級数として与えられることがわかる:

$$v_A(k, t) = Ah_1(k, t) + \int_0^t \exp \{-(t-s)|k|^2\} \sum_{p \geq 1} A^p h_p(k, s) ds. \quad (7)$$

ここに,

$$h_1(k, s) = \exp \{-s|k|^2\} \tilde{v}(k) \quad (8)$$

$$h_2(k, s) = i \int_{\mathbb{R}^3} \langle \tilde{v}(k-k'), k \rangle P_k \tilde{v}(k') \exp \{-s|k-k'|^2 - s|k'|^2\} d^3 k', \quad (9)$$

$$\begin{aligned} h_p(k, s) &= i \int_0^s ds_2 \int_{\mathbb{R}^3} \langle \tilde{v}(k-k'), k \rangle P_k h_{p-1}(k', s) \exp \{-s|k-k'|^2 - (s-s_2)|k'|^2\} d^3 k' \\ &+ i \sum_{p_1 + p_2 = p} \int_0^s ds_1 \int_0^s ds_2 \int_{\mathbb{R}^3} \langle h_{p_1}(k-k', s_1), k \rangle P_k h_{p_2}(k', s) \exp \{-(s-s_1)|k-k'|^2 - (s-s_2)|k'|^2\} d^3 k' \\ &\quad p_1, p_2 > 1 \\ &+ i \int_0^s ds_1 \int_{\mathbb{R}^3} \langle h_{p-1}(k-k', s_1), k \rangle P_k \tilde{v}(k') \exp \{-(s-s_1)|k-k'|^2 - s|k'|^2\} d^3 k', \quad (10) \end{aligned}$$

である。⁸

ここで,

$$\tilde{k} = k\sqrt{s}, \quad \tilde{k}' = k'\sqrt{s}, \quad \tilde{s}_1 = \frac{s_1}{s}, \quad \tilde{s}_2 = \frac{s_2}{s}$$

とおき, g_p を

$$g_p(\tilde{k}, s) = h_p\left(\frac{\tilde{k}}{\sqrt{s}}, s\right), \quad p \geq 1$$

と定義すると, (8)-(10) より g_p に関する次の recurrent equation が従う⁹:

$$g_1(\tilde{k}, s) = \exp \{-|\tilde{k}|^2\} \tilde{v}\left(\frac{\tilde{k}}{\sqrt{s}}\right), \quad (11)$$

$$g_2(\tilde{k}, s) = \frac{i}{s^2} \int_{\mathbb{R}^3} \langle \tilde{v}\left(\frac{\tilde{k}-\tilde{k}'}{\sqrt{s}}\right), \tilde{k} \rangle P_{\tilde{k}} \tilde{v}\left(\frac{\tilde{k}'}{\sqrt{s}}\right) \exp \{-|\tilde{k}-\tilde{k}'|^2 - |\tilde{k}'|^2\} d^3 \tilde{k}', \quad (12)$$

$$\begin{aligned} g_p(\tilde{k}, s) &= \frac{i}{s} \int_0^1 d\tilde{s}_2 \int_{\mathbb{R}^3} \langle \tilde{v}\left(\frac{\tilde{k}-\tilde{k}'}{\sqrt{s}}\right), \tilde{k} \rangle P_{\tilde{k}} g_{p-1}(\tilde{k}'\sqrt{\tilde{s}_2}, \tilde{s}_2 s) \exp \{-|\tilde{k}-\tilde{k}'|^2 - (1-\tilde{s}_2)|\tilde{k}'|^2\} d^3 \tilde{k}' \\ &+ i \sum_{p_1 + p_2 = p} \int_0^1 d\tilde{s}_1 \int_0^1 d\tilde{s}_2 \int_{\mathbb{R}^3} \langle g_{p_1}((\tilde{k}-\tilde{k}')\sqrt{\tilde{s}_1}, \tilde{s}_1 s), \tilde{k} \rangle P_{\tilde{k}} g_{p_2}(\tilde{k}'\sqrt{\tilde{s}_2}, \tilde{s}_2 s) \\ &\quad p_1, p_2 > 1 \\ &\quad \times \exp \{-(1-\tilde{s}_1)|\tilde{k}-\tilde{k}'|^2 - (1-\tilde{s}_2)|\tilde{k}'|^2\} d^3 \tilde{k}' \\ &+ \frac{i}{s} \int_0^1 d\tilde{s}_1 \int_{\mathbb{R}^3} \langle g_{p-1}((\tilde{k}-\tilde{k}')\sqrt{\tilde{s}_1}, \tilde{s}_1 s), \tilde{k} \rangle P_{\tilde{k}} \tilde{v}\left(\frac{\tilde{k}'}{\sqrt{s}}\right) \exp \{-(1-\tilde{s}_1)|\tilde{k}-\tilde{k}'|^2 - |\tilde{k}'|^2\} d^3 \tilde{k}'. \quad (13) \end{aligned}$$

更に, (13) において次の変数変換を施す:

⁸ $h_p(k, s) \perp k$ が任意の $p \geq 1$ に対して成立していることに注意。

⁹ (12) の $g_2(\tilde{k}, s)$ は s に関して可積分 ($s^{-1/2}$ の特異性) であること, (13) の $g_p(\tilde{k}, s)$, $p \geq 3$, は初期位相 $\tilde{v}(\frac{\tilde{k}}{\sqrt{s}})$ の $\tilde{k}$ に関する p 回の (重みつき) 合成積で表すことができることに注意する。

1. 十分大きな正数 $\tilde{k}^{(0)} > 0$ に対して,

$$\tilde{\kappa}^{(0)} = (0, 0, \tilde{k}^{(0)}),$$

とおき, $\tilde{\mathcal{K}}^{(r)}$ を次で定義する:

$$\tilde{\mathcal{K}}^{(r)} = r\tilde{\kappa}^{(0)}, \quad r \in \mathbb{N}.$$

2. $\tilde{k}$ のかわりに新たな独立変数 $Y = (Y_1, Y_2, Y_3) \in \mathbb{R}^3$ を次の関係式を介して導入する:

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= \tilde{\mathcal{K}}^{(p)} + \sqrt{p}Y \\ &= p\tilde{\kappa}^{(0)} + \sqrt{p}Y. \end{aligned}$$

3. $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2$ のかわりに, 新たな変数 θ_1, θ_2 を次により定義する:

$$1 - \tilde{s}_j = \frac{\theta_j}{p_j^2}, \quad j = 1, 2.$$

4. $\tilde{k}'$ のかわりに, 新たな独立変数 $Y' \in \mathbb{R}^3$ を次により定義する:

$$\tilde{k}' = \tilde{\mathcal{K}}^{(p_2)} + \sqrt{p}Y'.$$

5. 新たな従属変数 $\tilde{g}_p(Y, s)$ を

$$\tilde{g}_p(Y, s) = g_p(\tilde{\mathcal{K}}^{(p)} + \sqrt{p}Y, s)$$

と定義する。

6. 最後に,

$$\gamma = \frac{p_1}{p}$$

とおき, この γ を新たな独立変数とみなす¹⁰。

このとき, (13) の中間の項の被積分関数に現れる各部分は次のように書き換えられる¹¹:

$$\begin{aligned} \langle g_{p_1}((\tilde{k}' - \tilde{k}')\sqrt{\tilde{s}_1}, \tilde{s}_1 s), \tilde{k} \rangle &= \langle g_{p_1}((\tilde{\mathcal{K}}^{(p_1)} + \sqrt{p}(Y - Y'))\sqrt{\tilde{s}_1}, \tilde{s}_1 s), p\tilde{\kappa}^{(0)} + \sqrt{p}Y \rangle \\ &= p \langle g_{p_1}((\tilde{\mathcal{K}}^{(p_1)} + \sqrt{p_1} \frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}})\sqrt{\tilde{s}_1}, \tilde{s}_1 s), \tilde{\kappa}^{(0)} + \frac{Y}{\sqrt{p}} \rangle, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} P_{\tilde{k}} g_{p_2}(\tilde{k}'\sqrt{\tilde{s}_2}, \tilde{s}_2 s) &= P_{p\tilde{\kappa}^{(0)} + \sqrt{p}Y} g_{p_2}((\tilde{\mathcal{K}}^{(p_2)} + \sqrt{p}Y)\sqrt{\tilde{s}_2}, \tilde{s}_2 s) \\ &= P_{\tilde{\kappa}^{(0)} + \frac{Y}{\sqrt{p}}} g_{p_2}((\tilde{\mathcal{K}}^{(p_2)} + \sqrt{p_2} \frac{Y}{\sqrt{1-\gamma}})\sqrt{\tilde{s}_2}, \tilde{s}_2 s), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \exp \{-(1 - \tilde{s}_1)|\tilde{k} - \tilde{k}'|^2 - (1 - \tilde{s}_2)|\tilde{k}'|^2\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{\theta_1}{p_1^2} |\tilde{\mathcal{K}}^{(p_1)} + \sqrt{p_1} \frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}|^2 - \frac{\theta_2}{p_2^2} |\tilde{\mathcal{K}}^{(p_2)} + \sqrt{p_2} \frac{Y'}{\sqrt{1-\gamma}}|^2 \right. \\ &\quad \left. = \exp \left\{ -\theta_1 |\tilde{\kappa}^{(0)} + \frac{Y - Y'}{\sqrt{p}\gamma}|^2 - \theta_2 |\tilde{\kappa}^{(0)} + \frac{Y'}{\sqrt{p}(1-\gamma)}|^2 \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

¹⁰従って,

$$1 - \gamma = \frac{p_2}{p}$$

が成立する。3 の変数変換と, この γ を新たな独立変数とみなす点が重要。

¹¹ $\sqrt{p} = \sqrt{p_2} \sqrt{\frac{p}{p_2}} = \frac{\sqrt{p_2}}{\sqrt{1-\gamma}}, \sqrt{p} = \frac{\sqrt{p_1}}{\sqrt{\gamma}} = \frac{\sqrt{p_2}}{\sqrt{1-\gamma}}$ となることを用いる。

更に, $d^3k' = p^{3/2}dY'$, $ds_i = \frac{d\theta_i}{p_i^2}$ であることに注意すると, 結局 (13) は, $\tilde{g}_p(Y, s)$, $p \gg 1$, に対する次の表記式に書き換えられる¹²。

$$\begin{aligned} \tilde{g}_p(Y, s) = g_p(\tilde{\mathcal{K}}^{(p)} + \sqrt{p}Y, s) = ip^{5/2} [& \sum_{\substack{p_1 + p_2 = p \\ p_1, p_2 > \sqrt{p}}} \int_0^{p_1^2} d\theta_1 \int_0^{p_2^2} d\theta_2 \frac{1}{p_1^2 \cdot p_2^2} \\ & \times \int_{\mathbb{R}^3} \langle g_{p_1}((\tilde{\mathcal{K}}^{(p_1)} + \sqrt{p_1} \frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}) \sqrt{\tilde{s}_1}, \tilde{s}_2 s), \tilde{\kappa}^{(0)} + \frac{Y}{\sqrt{p}} \rangle P_{\tilde{\kappa}^{(0)} + \frac{Y}{\sqrt{p}}} g_{p_2}((\tilde{\mathcal{K}}^{(p_2)} + \sqrt{p_2} \frac{Y'}{\sqrt{1-\gamma}}) \sqrt{\tilde{s}_2}, \tilde{s}_2 s) \\ & \times \exp \{ -\theta_1 |\tilde{\kappa}^{(0)} + \frac{Y - Y'}{\sqrt{p}\gamma}|^2 - \theta_2 |\tilde{\kappa}^{(0)} + \frac{Y'}{\sqrt{p}(1-\gamma)}|^2 \} d^3Y'] + p\mathcal{R}_p(Y, s). \quad (17) \end{aligned}$$

ここに, 剰余項 $p\mathcal{R}_p(Y, s)$ は, (13) の中間項にあらわれる和を, $p_1 \leq \sqrt{p}$ あるいは $p_2 \leq \sqrt{p}$ となるときにとったものに対応する。[Li-Sinai] では, この $\mathcal{R}_p$ に関して, 適当な位相の下で

$$\mathcal{R}_p \longrightarrow 0 \quad \text{as } p \rightarrow \infty$$

が成立するとしている。

3.2. 極限 $p \rightarrow \infty$ における, $\tilde{g}_p$ の普遍的部分の抽出: The renormalization group equation

$p \rightarrow \infty$ のときの, $\tilde{g}_p$ の漸近形を求めていく。特に, $\tilde{g}_p$ の漸近形における p に依存しない普遍的部分 (くりこみ変換の固定点) を抽出し, その支配方程式を導くことを目標とする。

$p \rightarrow \infty$ のとき, (17) においては

$$p_1, p_2 \sim O(p)$$

なる p_1, p_2 について和をとった部分が dominant であるので¹³, $p \gg 1$ かつ $Y, Y' \sim O(1)$ のときは, (17) における Gaussian term の部分は,

$$\exp \{ -\theta_1 |\tilde{\kappa}^{(0)} + \frac{Y - Y'}{\sqrt{p}\gamma}|^2 - \theta_2 |\tilde{\kappa}^{(0)} + \frac{Y'}{\sqrt{p}(1-\gamma)}|^2 \} \sim \exp \{ -(\theta_1 + \theta_2) |\tilde{\kappa}^{(0)}|^2 \}$$

と近似できる。更に, このとき

$$\tilde{s}_j = 1 - \frac{\theta_j}{p_j^2} \sim 1, \quad j = 1, 2$$

となることにも注意すれば, (17) の θ_1, θ_2 に関する積分と Y' に関する積分が分離できることが分かり, 次が示される:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_p(Y, s) \sim i p^{5/2} & \sum_{\substack{p_1 + p_2 = p \\ p_1, p_2 > \sqrt{p}}} \int_0^\infty d\theta_1 \int_0^\infty d\theta_2 \\ & \times \frac{1}{p_1^2 \cdot p_2^2} \int_{\mathbb{R}^3} \langle \tilde{g}_{p_1}(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}, s), \tilde{\kappa}^{(0)} + \frac{Y}{\sqrt{p}} \rangle P_{\tilde{\kappa}^{(0)} + \frac{Y}{\sqrt{p}}} \tilde{g}_{p_2}(\frac{Y'}{\sqrt{1-\gamma}}, s) \exp \{ -(\theta_1 + \theta_2) |\tilde{\kappa}^{(0)}|^2 \} d^3Y' \\ = \frac{i}{|\tilde{\kappa}^{(0)}|^4} p^{5/2} & \sum_{\substack{p_1 + p_2 = p \\ p_1, p_2 > \sqrt{p}}} \frac{1}{p_1^2 \cdot p_2^2} \int_{\mathbb{R}^3} \langle \tilde{g}_{p_1}(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}, s), \tilde{\kappa}^{(0)} + \frac{Y}{\sqrt{p}} \rangle P_{\tilde{\kappa}^{(0)} + \frac{Y}{\sqrt{p}}} \tilde{g}_{p_2}(\frac{Y'}{\sqrt{1-\gamma}}, s) d^3Y'. \quad (18) \end{aligned}$$

更に, (18) を非圧縮条件 $\tilde{g}_r(Y, s) \perp Y$ を用いて簡約化していく:

¹² 最左辺の最初に現れる p のべきが, $5/2$ になることに注意。

¹³ このことは, 以下の議論から容易に正当化される。

まず, $\gamma = \frac{p_1}{p}$, $1 - \gamma = \frac{p_2}{p}$ であること注意し, 非圧縮条件を用いると

$$\langle \tilde{g}_{p_1}(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}, s), \tilde{\kappa}^{(0)} + \frac{Y}{\sqrt{p}} \rangle = \frac{1}{\sqrt{p}} [\frac{\gamma - 1}{\sqrt{\gamma}} \langle \tilde{g}_{p_1}(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}, s), \frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}} \rangle + \sqrt{1 - \gamma} \langle \tilde{g}_{p_1}(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}, s), \frac{Y'}{\sqrt{1 - \gamma}} \rangle] \quad (19)$$

が従うことが分かる。そこで,

$$\tilde{g}_p(Y, s) = (G_1^{(p)}(Y, s), G_2^{(p)}(Y, s), \frac{1}{\sqrt{p}} F^{(p)}(Y, s))$$

とおき, 再び非圧縮条件を用いると, $Y \sim O(1)$, $p \gg 1$ のとき,

$$Y_1 G_1^{(p)}(Y, s) + Y_2 G_2^{(p)}(Y, s) + \tilde{\kappa}^{(0)} F^{(p)}(Y, s) \sim 0 \quad (20)$$

を示すことができる。ここで, 簡単なオーダーの比較を行うと (19), (20) から, $Y \sim O(1)$, $p \gg 1$ のとき,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{g}_{p_1}(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}, s), \tilde{\kappa}^{(0)} + \frac{Y}{\sqrt{p}} \rangle \\ \sim \frac{1}{\sqrt{p}} [\frac{\gamma - 1}{\sqrt{\gamma}} (\frac{Y_1 - Y'_1}{\sqrt{\gamma}} G_1^{(p_1)}(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}, s) + \frac{Y_2 - Y'_2}{\sqrt{\gamma}} G_2^{(p_1)}(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}, s)) \\ + \sqrt{1 - \gamma} (\frac{Y'_1}{\sqrt{1 - \gamma}} G_1^{(p_1)}(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}, s) + \frac{Y'_2}{\sqrt{1 - \gamma}} G_2^{(p_1)}(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}, s))] \quad (21) \end{aligned}$$

を導くことができる。

一方, (18) に現れる射影作用素についても, 定義に戻ることににより漸近的に恒等作用素とみなせることが分かる:

$$P_{\tilde{\kappa}^{(0)} + \frac{Y}{\sqrt{p}}} \tilde{g}_{p_2}(\frac{Y'}{\sqrt{1 - \gamma}}, s) \sim \tilde{g}_{p_2}(\frac{Y'}{\sqrt{1 - \gamma}}, s). \quad (22)$$

以上, (18) と (21), (22) から, $\tilde{g}_p(Y, s)$ の, $Y \sim O(1)$, $p \gg 1$ のときの漸近形は次で与えられることが示された。

$$\begin{aligned} \tilde{g}_p(Y, s) \sim \frac{i}{|\tilde{\kappa}^{(0)}|^4} \sum_{\substack{p_1 + p_2 = p \\ p_1, p_2 > \sqrt{p}}} \frac{p^2}{p_1^2 \cdot p_2^2} \\ \times \int_{\mathbb{R}^3} [\frac{\gamma - 1}{\sqrt{\gamma}} (\frac{Y_1 - Y'_1}{\sqrt{\gamma}} G_1^{(p_1)}(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}, s) + \frac{Y_2 - Y'_2}{\sqrt{\gamma}} G_2^{(p_1)}(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}, s)) \\ + \sqrt{1 - \gamma} (\frac{Y'_1}{\sqrt{1 - \gamma}} G_1^{(p_1)}(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}, s) + \frac{Y'_2}{\sqrt{1 - \gamma}} G_2^{(p_1)}(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}, s))] \tilde{g}_{p_2}(\frac{Y'}{\sqrt{1 - \gamma}}, s) d^3 Y'. \quad (23) \end{aligned}$$

ここで [Li-Sinai] は, 極限 $p \rightarrow \infty$ における $\tilde{g}_p(Y, s)$ の漸近形の普遍的部分に関する次の Anzats を与えている。

$\tilde{g}_p(Y, s)$ の漸近形に対する Anzats: 十分大きな自然数 p をとり固定し, $Y \sim O(1)$ とする。このとき, ある閉区間 $[S_-^{(p)}, S_+^{(p)}] (\subset \mathbb{R}_+)$ 上, $\tilde{g}_r(Y, s)$, $r = 1, 2, \dots, p - 1$, は次の形で与えられる:

$$\tilde{g}_r(Y, s) = \Lambda(s)^{r-1} r w^{\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}}(Y) (H(Y) + \delta^{(r)}(Y, s)) \quad \text{for } \forall s \in [S_-^{(p)}, S_+^{(p)}]. \quad (24)$$

ここに, $\Lambda(s)$ は p, r, Y に依らない s に関する滑らかな関数, $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$ は p, r, Y, s に依らない定数であり, $w^{\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}}(Y)$ は次の形の Gaussian density である:

$$w^{\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}}(Y) = \frac{\sigma^{(1)}}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{\sigma^{(1)}}{2} (|Y_1|^2 + |Y_2|^2) \right\} \sqrt{\frac{\sigma^{(2)}}{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{\sigma^{(2)}}{2} |Y_3|^2 \right\}.$$

更に, $H(Y)$, $\delta^{(r)}(Y, s)$ は,

$$\begin{aligned} H(Y) &= (H_1(Y_1, Y_2, Y_3), H_2(Y_1, Y_2, Y_3), 0), \\ \delta^{(r)}(Y, s) &= (\delta_1^{(r)}(Y, s), \delta_2^{(r)}(Y, s), \delta_3^{(r)}(Y, s)), \end{aligned}$$

で与えられ, 誤差項 $\delta^{(r)}$ は適当な位相の下¹⁴

$$\delta^{(r)} \longrightarrow 0 \text{ as } r \longrightarrow \infty$$

を満たす。

この Ansatz の正当性に関する命題は, 次節の Claim 2 として述べることにして, ここでは, この Ansatz が正しいことを認めた上で, (24) の漸近形における p に依存しない普遍部分である $H(Y)$ に対する支配方程式を求めていこう。

そのために, (24) における誤差項 $\delta^{(r)} = 0$ としたものを, (23) に代入して式変形を行っていく¹⁵ :

$$\begin{aligned} \tilde{g}_p(Y, s) &\sim \frac{i}{|\tilde{\kappa}(0)|^4} \sum_{\substack{p_1 + p_2 = p \\ p_1, p_2 > \sqrt{p}}} \frac{p^2}{p_1^2 \cdot p_2^2} \Lambda(s)^{p_1 + p_2 - 2} p_1 \cdot p_2 \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{\gamma - 1}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{Y_1 - Y'_1}{\sqrt{\gamma}} H_1\left(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}\right) + \frac{Y_2 - Y'_2}{\sqrt{\gamma}} H_2\left(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}\right) \right) \right. \\ &+ \sqrt{1 - \gamma} \left(\frac{Y'_1}{\sqrt{1 - \gamma}} H_1\left(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}\right) + \frac{Y'_2}{\sqrt{1 - \gamma}} H_2\left(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}\right) \right) \left. \right] H\left(\frac{Y'}{\sqrt{1 - \gamma}}\right) w^{\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}}\left(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}\right) w^{\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}}\left(\frac{Y'}{\sqrt{1 - \gamma}}\right) d^3 Y' \\ &= \frac{i}{|\tilde{\kappa}(0)|^4} p \Lambda(s)^{p-2} \sum_{\substack{p_1 + p_2 = p \\ p_1, p_2 > \sqrt{p}}} \frac{1}{p} \frac{p^2}{p_1 \cdot p_2} \gamma^{3/2} (1 - \gamma)^{3/2} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{\gamma - 1}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{Y_1 - Y'_1}{\sqrt{\gamma}} H_1\left(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}\right) + \frac{Y_2 - Y'_2}{\sqrt{\gamma}} H_2\left(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}\right) \right) \right. \\ &+ \sqrt{1 - \gamma} \left(\frac{Y'_1}{\sqrt{1 - \gamma}} H_1\left(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}\right) + \frac{Y'_2}{\sqrt{1 - \gamma}} H_2\left(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}\right) \right) \left. \right] H\left(\frac{Y'}{\sqrt{1 - \gamma}}\right) \\ &\quad \times \gamma^{-3/2} w^{\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}}\left(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}\right) (1 - \gamma)^{-3/2} w^{\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}}\left(\frac{Y'}{\sqrt{1 - \gamma}}\right) d^3 Y' \\ &= \frac{i}{|\tilde{\kappa}(0)|^4} p \Lambda(s)^{p-2} \sum_{\gamma = \frac{p_1}{p}} \frac{1}{p} \gamma^{1/2} (1 - \gamma)^{1/2} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{\gamma - 1}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{Y_1 - Y'_1}{\sqrt{\gamma}} H_1\left(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}\right) + \frac{Y_2 - Y'_2}{\sqrt{\gamma}} H_2\left(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}\right) \right) \right. \\ &+ \sqrt{1 - \gamma} \left(\frac{Y'_1}{\sqrt{1 - \gamma}} H_1\left(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}\right) + \frac{Y'_2}{\sqrt{1 - \gamma}} H_2\left(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}\right) \right) \left. \right] H\left(\frac{Y'}{\sqrt{1 - \gamma}}\right) \\ &\quad \times \frac{\sigma^{(1)}}{2\pi\gamma} \exp \left\{ -\frac{\sigma^{(1)}}{2\gamma} (|Y_1 - Y'_1|^2 + |Y_2 - Y'_2|^2) \right\} \frac{\sigma^{(1)}}{2\pi(1 - \gamma)} \exp \left\{ -\frac{\sigma^{(1)}}{2(1 - \gamma)} (|Y'_1|^2 + |Y'_2|^2) \right\} \\ &\quad \times \sqrt{\frac{\sigma^{(2)}}{2\pi\gamma}} \exp \left\{ -\frac{\sigma^{(2)}}{2\gamma} |Y_3 - Y'_3|^2 \right\} \sqrt{\frac{\sigma^{(2)}}{2\pi(1 - \gamma)}} \exp \left\{ -\frac{\sigma^{(2)}}{2(1 - \gamma)} |Y'_3|^2 \right\} d^3 Y'. \end{aligned} \tag{25}$$

この (25) と, (24) (において $\delta^{(r)} = 0$ とおいたもの) をあわせると,

¹⁴ どのような位相なのか等この部分は不正確な表現になっているが, 正確な主張については §3.3 の Claim 2 を見よ。

¹⁵ 最後の等式を導く際, $\frac{p^2}{p_1 \cdot p_2} = \frac{1}{\gamma(1 - \gamma)}$ であることを使う。また, 最後の式における和は $\gamma = \frac{p_1}{p}$, $\sqrt{p} < p_1 < p - \sqrt{p}$, についてとらえていることに注意。

$$\begin{aligned}
\Lambda(s) \times w^{\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}}(Y) H(Y) &\sim \frac{i}{|\tilde{\kappa}(0)|^4} \sum_{\gamma=\frac{p_1}{p}} \frac{1}{p} \gamma^{1/2} (1-\gamma)^{1/2} \\
&\times \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{\gamma-1}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{Y_1-Y'_1}{\sqrt{\gamma}} H_1\left(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}}\right) + \frac{Y_2-Y'_2}{\sqrt{\gamma}} H_2\left(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}}\right) \right) \right. \\
&+ \left. \sqrt{1-\gamma} \left(\frac{Y'_1}{\sqrt{1-\gamma}} H_1\left(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}}\right) + \frac{Y'_2}{\sqrt{1-\gamma}} H_2\left(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}}\right) \right) \right] H\left(\frac{Y'}{\sqrt{1-\gamma}}\right) \\
&\times \frac{\sigma^{(1)}}{2\pi\gamma} \exp \left\{ -\frac{\sigma^{(1)}}{2\gamma} (|Y_1-Y'_1|^2 + |Y_2-Y'_2|^2) \right\} \frac{\sigma^{(1)}}{2\pi(1-\gamma)} \exp \left\{ -\frac{\sigma^{(1)}}{2(1-\gamma)} (|Y'_1|^2 + |Y'_2|^2) \right\} \\
&\times \sqrt{\frac{\sigma^{(2)}}{2\pi\gamma}} \exp \left\{ -\frac{\sigma^{(2)}}{2\gamma} |Y_3-Y'_3|^2 \right\} \sqrt{\frac{\sigma^{(2)}}{2\pi(1-\gamma)}} \exp \left\{ -\frac{\sigma^{(2)}}{2(1-\gamma)} |Y'_3|^2 \right\} d^3 Y'
\end{aligned} \tag{26}$$

が成立することが分かる。[Li-Sinai] は、極限 $p \rightarrow \infty$ をとると (26) 右辺における γ に関する和の部分が、 $[0, 1]$ 上の γ に関する Riemann 積分に収束することに着目し、次の $H(Y)$ に対する支配方程式 (the renormalization equation) を導いた：

$$\begin{aligned}
\Lambda(s) \frac{\sigma^{(1)}}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{\sigma^{(1)}}{2} (|Y_1|^2 + |Y_2|^2) \right\} \sqrt{\frac{\sigma^{(2)}}{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{\sigma^{(2)}}{2} |Y_3|^2 \right\} H(Y) &= \frac{i}{|\tilde{\kappa}(0)|^4} \int_0^1 \gamma^{1/2} (1-\gamma)^{1/2} d\gamma \\
&\times \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sigma^{(1)}}{2\pi\gamma} \exp \left\{ -\frac{\sigma^{(1)}}{2\gamma} (|Y_1-Y'_1|^2 + |Y_2-Y'_2|^2) \right\} \frac{\sigma^{(1)}}{2\pi(1-\gamma)} \exp \left\{ -\frac{\sigma^{(1)}}{2(1-\gamma)} (|Y'_1|^2 + |Y'_2|^2) \right\} \\
&\times \sqrt{\frac{\sigma^{(2)}}{2\pi\gamma}} \exp \left\{ -\frac{\sigma^{(2)}}{2\gamma} |Y_3-Y'_3|^2 \right\} \sqrt{\frac{\sigma^{(2)}}{2\pi(1-\gamma)}} \exp \left\{ -\frac{\sigma^{(2)}}{2(1-\gamma)} |Y'_3|^2 \right\} \\
&\times \left[\frac{\gamma-1}{\sqrt{\gamma}} \left(\frac{Y_1-Y'_1}{\sqrt{\gamma}} H_1\left(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}}\right) + \frac{Y_2-Y'_2}{\sqrt{\gamma}} H_2\left(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}}\right) \right) \right. \\
&+ \left. \sqrt{1-\gamma} \left(\frac{Y'_1}{\sqrt{1-\gamma}} H_1\left(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}}\right) + \frac{Y'_2}{\sqrt{1-\gamma}} H_2\left(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}}\right) \right) \right] H\left(\frac{Y'}{\sqrt{1-\gamma}}\right) d^3 Y'.
\end{aligned} \tag{27}$$

特に、 H_1, H_2 が Y_1, Y_2 のみに依存するときの $H(Y) = (H_1(Y_1, Y_2), H_2(Y_1, Y_2))$ の支配方程式は、

$$\begin{aligned}
\Lambda(s) \frac{\sigma^{(1)}}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{\sigma^{(1)}}{2} |Y|^2 \right\} H(Y) &= \frac{i}{|\tilde{\kappa}(0)|^4} \int_0^1 d\gamma \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\sigma^{(1)}}{2\pi\gamma} \exp \left\{ -\frac{\sigma^{(1)}}{2\gamma} |Y-Y'|^2 \right\} \frac{\sigma^{(1)}}{2\pi(1-\gamma)} \exp \left\{ -\frac{\sigma^{(1)}}{2(1-\gamma)} |Y'|^2 \right\} \\
&\times \left[-(1-\gamma)^{3/2} \left(\frac{Y_1-Y'_1}{\sqrt{\gamma}} H_1\left(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}}\right) + \frac{Y_2-Y'_2}{\sqrt{\gamma}} H_2\left(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}}\right) \right) \right. \\
&+ \left. \gamma^{1/2} (1-\gamma) \left(\frac{Y'_1}{\sqrt{1-\gamma}} H_1\left(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}}\right) + \frac{Y'_2}{\sqrt{1-\gamma}} H_2\left(\frac{Y-Y'}{\sqrt{\gamma}}\right) \right) \right] H\left(\frac{Y'}{\sqrt{1-\gamma}}\right) d^2 Y'
\end{aligned} \tag{28}$$

で与えられることに注意する¹⁶。

¹⁶[Li-Sinai] の論文では、(28) における $\Lambda(s)$ と $\frac{i}{|\tilde{\kappa}(0)|^4}$ が欠落している。 $\tilde{g}_r$ の漸近形 (24) を少し修正することにより $\frac{1}{|\tilde{\kappa}(0)|^4}$ をとることはできるが、 $\Lambda(s)$ の方をどのように取り扱うかについては不明である。以下では、[Li-Sinai] にあるように (28) から $\Lambda(s)$ と $\frac{i}{|\tilde{\kappa}(0)|^4}$ をとった方程式が $H(Y)$ の支配方程式であるとして議論を進める。

3.3.Theorem の証明

まず, $\tilde{g}_p$ の漸近形における普遍部分 H (すなわち, 非線型積分方程式 (28) あるいは (27) の解) の存在に関して [Li-Sinai] は, Hermite 多項式についての展開を用いることにより, 次の事実が成立すると主張している。

Claim 1 [Li-Sinai].

$\sigma^{(1)} = 1$ とする。(28) の次の形の解 (の族) が存在する¹⁷:

$$H_j(Y_1, Y_2) = \sum_{m_1 \geq 0, m_2 \geq 0} h_{m_1, m_2}^j H_{m_1}(Y_1) H_{m_2}(Y_2), \quad j = 1, 2.$$

ここに, $H_m(z)$ は $\frac{1}{2\pi} \exp \{-\frac{1}{2}|z|^2\}$ に関する m 次の Hermite 多項式を表し, 複素数値係数 h_{m_1, m_2}^j ¹⁸ は次の評価式を満たす: ある定数 $C > 0$, $0 < \rho < 1/4$ が存在して

$$|h_{m_1, m_2}^j| \leq C \frac{\rho^{m_1+m_2}}{\Gamma(\frac{m_1+m_2+7}{2})} \quad \text{for } m_1 \geq 0, m_2 \geq 0,$$

が成立。

ここで, 一般の $\sigma^{(1)} > 0$ に対する (28) の解は, この Claim 1 の解 $H_j(Y)$, $j = 1, 2$, をスケール変換した

$$H_j^{\sigma^{(1)}}(Y) = \sqrt{\sigma^{(1)}} H_j(\sqrt{\sigma^{(1)}} Y), \quad j = 1, 2, \quad (29)$$

で与えられることに注意しておく。

次に, $\tilde{g}_r(Y, s)$ の漸近形に関する Ansatz の正当性に関して [Li-Sinai] の主張していることをまとめると, 次のようになる。

Claim 2 [Li-Sinai].

$\mathbb{R}_+$ 上のある滑らかな関数 $\Lambda(s)$, および正定数 $\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}$ と十分大きな自然数 p_0 が存在して, 次が成立する: 任意の自然数 $p \geq p_0$ に対して, 閉区間 $[S_-^{(p)}, S_+^{(p)}]$, $0 < S_-^{(p)} < S_+^{(p)}$, と (空でない) 部分集合 $X_p \subset L_\sigma^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ で,

1. $\cap_{p \geq p_0} [S_-^{(p)}, S_+^{(p)}]$ ($\equiv S$ とおく) は測度正の閉区間,

2. $\cap_{p \geq p_0} X_p$ ($\equiv X$ とおく) は, $L_\sigma^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ の (10 個のパラメータで表される) 空でない部分集合,

となるものが存在して, 任意の $\tilde{v} \in X_p$ を初期位相とする $\tilde{g}_r(Y, s)$ ¹⁹, $r = 1, 2, \dots, p-1$, に対しては

$$\tilde{g}_r(Y, s) = \Lambda(s)^{r-1} r w^{\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}}(Y) (H^{\sigma^{(1)}}(Y) + \delta^{(r)}(Y, s)) \quad \text{for } \forall s \in [S_-^{(p)}, S_+^{(p)}], \forall Y \sim O(1), \quad (30)$$

なる表現が成立する。

特に, 任意の $\tilde{v} \in X$ を初期位相とするときは, 任意の $p \geq p_0$ に対して, $\tilde{g}_r(Y, s)$, $r = 1, 2, \dots, p-1$, は次の漸近形

$$\tilde{g}_r(Y, s) = \Lambda(s)^{r-1} r w^{\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}}(Y) (H^{\sigma^{(1)}}(Y) + \delta^{(r)}(Y, s)) \quad \text{for } \forall s \in S, \forall Y \sim O(1), \quad (31)$$

をもち, 誤差項 $\delta^{(r)}$ は, $r \rightarrow \infty$ のとき

$$\|\delta^{(r)}(Y, s)\|_{L^2(\mathbb{R}_Y^3; w^{\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}}(Y))} \longrightarrow 0 \quad \text{for } \forall s \in S, \quad (32)$$

の意味で 0 に収束する。

¹⁷勿論, この解 (の族) 以外にも (28) の解が存在する可能性がある。後出の Claim 3 を参照せよ。

¹⁸この係数 $h_{m_1, m_2}^j \in \mathbb{C}$ は, 3 つのパラメータに依存して決定される。特に, これら 3 つのパラメータを実数としたとき, 対応する h_{m_1, m_2}^j も実数値をとる。

¹⁹すなわち, $\tilde{v} \in X_p$ を初期位相として (13) を通して決定される $\tilde{g}_r(Y, s)$ 。前出の脚注 9 も参照せよ。

ここに, $H^{\sigma^{(1)}}(Y) = (H_1^{\sigma^{(1)}}(Y), H_2^{\sigma^{(1)}}(Y), 0)$ ²⁰ は方程式 (27) の解を, $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}_Y^3; w^{\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}}(Y))}$ は $w^{\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}}(Y)$ の重みをつけた $L^2(\mathbb{R}_Y^3)$ - ノルムを, それぞれ表す。

この Claim 2 を用いることより, **Theorem** の主張は次のように示される。

まず, 初期値 $v_0(k) = A\tilde{v}(k)$ に対する非線形積分方程式 (5) のべき級数解は, (7) でみたように

$$v_A(k, t) = A \exp \{-t|k|^2\} \tilde{v}(k) + \int_0^t \exp \{-(t-s)|k|^2\} \sum_{p>1} A^p g_p(k\sqrt{s}, s) ds$$

で与えられることを思い出そう。

一方で, 独立変数 Y の定義から

$$\tilde{g}_p(Y, s) = g_p(p\kappa^{(0)} + \sqrt{p}Y, s)$$

であったので,

$$g_p(\sqrt{k}T_0, T_0) = \tilde{g}_p\left(\frac{\sqrt{T_0}(k - p\kappa^{(0)}/\sqrt{T_0})}{\sqrt{p}}, T_0\right)$$

が従う。ここに, $\kappa^{(0)} = (0, 0, \tilde{k}^{(0)})$ であり, $\tilde{k}^{(0)}$ は十分大きな正定数。

ここで Claim 2 を用いると, $T_0 \in S$, $\tilde{v} \in X$ から決定される g_p , $p \geq p_0$, に対して,

$$A^p g_p(k\sqrt{T_0}, T_0) \sim A^p \Lambda(T_0)^{p-1} p w^{(\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)})}\left(\frac{\sqrt{T_0}(k - (p\kappa^{(0)})/\sqrt{T_0})}{\sqrt{p}}\right) H^{\sigma^{(1)}}\left(\frac{\sqrt{T_0}(k - (p\kappa^{(0)})/\sqrt{T_0})}{\sqrt{p}}\right)$$

が成立。従って, A を $A = \Lambda(T_0)^{-1} (\equiv A_{T_0})$ ととり, 更に, $w^{(\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)})}(Y)$ が Gaussian term であることと, $H^{\sigma^{(1)}}(Y)$ が Hermite 多項式で与えられることに注意すると, $p \gg 1$ に対して,

$$A^p g_p(k\sqrt{T_0}, T_0) \sim \Lambda_{T_0} p \chi_{D_p}(k) \quad (33)$$

となることが分かる。ここに, $\chi_{D_p}(k)$ は, 集合

$$D_p = \{k \in \mathbb{R}^3 \mid |k_i| \leq O(\sqrt{p}) \text{ for } i = 1, 2, |k_3 - (p\tilde{k}^{(0)})/\sqrt{T_0}| \leq O(\sqrt{p})\}$$

の特性関数を表す。

よって, (33) から直ちに

$$\lim_{t \uparrow T_0} \left\| \int_0^t \exp \{-(t-s)|k|^2\} A^p g_p(k\sqrt{s}, s) \right\|_{L^2(\mathbb{R}_k^3)} \sim p \rightarrow \infty, \quad \text{as } p \rightarrow \infty$$

が導かれ,

$$\lim_{t \uparrow T_0} \|v(k, t)\|_{L^2(\mathbb{R}_k^3)} = +\infty$$

が示される。Theorem の (B) における他の式も同様に示される。

(A) の評価式を導出する為には, より詳細に Claim 2 の証明を見ていく必要があると思われる。

3.4. Claim 2 の証明の方針²¹

まず, 十分大きな p に対して, $\tilde{g}_r(Y, s)$, $r = 1, \dots, p-1$, を (30) の形で表示したとしよう:

$$\tilde{g}_r(Y, s) = \Lambda^{r-1}(s) r w^{\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}}(Y) (H^{\sigma^{(1)}}(Y) + \delta^{(r)}(Y, s)).$$

このとき, 上の $\delta^{(r)}(Y, s)$, $r = 1, \dots, p-1$, から $\delta^{(p)}(\gamma, Y, s)$ を次のように構成する²²:

²⁰ $H_j^{\sigma^{(1)}}(Y)$, $j = 1, 2$, は (29) で与えられた関数。

²¹ 初期値の選び方に関わる本質的な部分であるが, 私にはまだ理解しきれていない。従って, ここでは, [Li-Sinai] における証明の大筋を示し, 理解できていない部分を指摘するに留める。

²² $\delta^{(r)}$ も非圧縮条件を満足するので, $\delta_3^{(r)}$ は $\delta_j^{(r)}$, $j = 1, 2$ で表すことができることに注意。

(a) $\delta^{(p)}(\gamma, Y, s) = \delta^{(r)}(Y, s)$ for $\gamma = \frac{r}{p}$, $r = 1, \dots, p-1$,

(b) $\delta^{(p)}(1, Y, s)$ は (28) を $H^{\sigma^{(1)}}(Y)$ のまわりで線型化した次の方程式²³の解として定める²⁴:

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ -\frac{\sigma^{(1)}}{2}(|Y_1|^2 + |Y_2|^2) - \frac{\sigma^{(2)}}{2}|Y_3|^2 \right\} \frac{\sigma^{(1)}}{2\pi} \sqrt{\frac{\sigma^{(2)}}{2\pi}} \delta_j^{(p)}(1, Y, s) \\ &= \int_0^1 d\gamma \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sigma^{(1)}}{2\pi\gamma} \sqrt{\frac{\sigma^{(2)}}{2\pi\gamma}} \frac{\sigma^{(1)}}{2\pi(1-\gamma)} \sqrt{\frac{\sigma^{(1)}}{2\pi(1-\gamma)}} \\ & \times \exp \left\{ -\frac{\sigma^{(1)}(|Y_1 - Y'_1|^2 + |Y_2 - Y'_2|^2)}{2\pi\gamma} - \frac{\sigma^{(2)}|Y_3 - Y'_3|^2}{2\pi\gamma} - \frac{\sigma^{(1)}(|Y'_1|^2 + |Y'_2|^2)}{2\pi(1-\gamma)} - \frac{\sigma^{(2)}|Y'_3|^2}{2\pi(1-\gamma)} \right\} \\ & \quad \left\{ [-(1-\gamma)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{Y_1 - Y'_1}{\sqrt{\gamma}} H_1^{\sigma^{(1)}} \left(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}} \right) + \frac{Y_2 - Y'_2}{\sqrt{\gamma}} H_2^{\sigma^{(1)}} \left(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}} \right) \right) \right. \\ & \quad + \gamma^{\frac{1}{2}}(1-\gamma) \left(\frac{Y'_1}{\sqrt{1-\gamma}} H_1^{\sigma^{(1)}} \left(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}} \right) + \frac{Y'_2}{\sqrt{1-\gamma}} H_2^{\sigma^{(1)}} \left(\frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}} \right) \right)] \delta_j^{(p)}(1-\gamma, \frac{Y'}{\sqrt{1-\gamma}}, s) \\ & \quad + [-(1-\gamma)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{Y_1 - Y'_1}{\sqrt{\gamma}} \delta_1^{(p)}(\gamma, \frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}, s) + \frac{Y_2 - Y'_2}{\sqrt{\gamma}} \delta_2^{(p)}(\gamma, \frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}, s) \right) \\ & \quad \left. + \gamma^{\frac{1}{2}}(1-\gamma) \left(\frac{Y'_1}{\sqrt{1-\gamma}} \delta_1^{(p)}(\gamma, \frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}, s) + \frac{Y'_2}{\sqrt{1-\gamma}} \delta_2^{(p)}(\gamma, \frac{Y - Y'}{\sqrt{\gamma}}, s) \right)] H_j^{\sigma^{(1)}} \left(\frac{Y'}{\sqrt{1-\gamma}}, s \right) \right\} d^3 Y', \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (34)$$

上記 (a), (b) により, 分点 $\gamma = \frac{r}{p}$, $r = 1, \dots, p$, 上の値が確定した $\delta^{(p)}(\gamma, Y, s)$ を, 線型補間により $[0, 1]$ 上に拡張し, それを再び $\delta^{(p)}(\gamma, Y, s)$ と表す。

次に, $\delta^{(p+1)}(\gamma, Y, s)$ を, 上で定義した $\delta^{(p)}(\gamma, Y, s)$ から次のように定義する:

(i) $\delta^{(p+1)}(\gamma, Y, s) = \delta^{(p)}(\frac{p+1}{p}\gamma, Y, s)$ for $0 \leq \gamma \leq \frac{p}{p+1}$,

(ii) $\delta^{(p+1)}(1, Y, s)$ は (34) における $\delta^{(p)}$ を $\delta^{(p+1)}$ におきかえた方程式の解として定める²⁵。

こうして得られた $\delta^{(p+1)}(\gamma, Y, s)$ を, $[\frac{p}{p+1}, 1]$ 間も線型補間して得られる関数を再び $\delta^{(p+1)}(\gamma, Y, s)$ と表す。

以上の手続きを通して, 次の作用素が定義できる R_p ²⁶:

$$R_p : \delta^{(p)}(\gamma, Y, s) \longrightarrow \delta^{(p+1)}(\gamma, Y, s).$$

更に, この作用素 R_p を p に関して連続化した作用素 L_θ を次のように導入する。

まず, 関数空間 Δ を

$$\Delta = \{ \delta(\gamma, Y) \in \mathbb{C}^3 \mid \delta(\gamma, \cdot) \in \text{Lip}([0, 1]; L_\sigma^2(\mathbb{R}_Y^3 : w^{\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}}(Y))) \}$$

と定義する。 $0 < \theta < 1$ なる任意の実数 θ に対して, 空間 Δ 上の作用素

$$L_\theta : \Delta \longrightarrow \Delta$$

を次で定義する: $\gamma_j = (1 + \theta)^{-j}$, $j = 0, 1, \dots$, とおき,

²³ここに, (34) 右辺に被積分関数として現れる $\delta^{(p)}(\gamma, Y, s)$ としては, (a) により分点 $\gamma = \frac{r}{p}$, $r = 1, \dots, p-1$, 上定義された関数を, 線型補間により $[0, 1]$ 上に拡張した関数をとることとする。従って, (34) は $\delta^{(p)}(1, Y, s)$ に関する線型方程式となる。

²⁴すなわち, この段階で renormalization を行う。後出の (ii)' の手続きも同じ。

²⁵脚注 23 と同様に, (34) に対応する方程式の右辺に被積分関数として現れる $\delta^{(p+1)}$ としては, 折れ線により $[\frac{p}{p+1}, 1]$ 間を補間したのちの関数をとることとする。

²⁶この R_p は, (13) を通して定義されるくりこみ変換: $\{g_r \mid r < p\} \mapsto \{g_r \mid r < p+1\}$ の, 固定点 $H^{\sigma^{(1)}}$ のまわりでの ($p \rightarrow \infty$ における漸近的) 線型化作用素とみなすことができる。

(i)' $\gamma_{j+1} \leq \gamma \leq \gamma_j$, $j = 1, 2, \dots$, に対しては,

$$L_\theta(\delta(\gamma, Y)) = \delta(\gamma(1 + \theta), Y),$$

(ii)' $\gamma_1 \leq \gamma \leq 1$ に対しては,

$L_\theta(\delta(\cdot, Y)) = (34)$ の $\delta^{(p)}$ を $\delta^{(p_0)}$ でおきかえた方程式の解として定まる $\delta^{(p_0)}(1, Y, s)$ と

$L_\theta(\delta(\gamma_1, Y))$ を折れ線で補間した関数 (ここに, $p_0 = [\frac{1}{\theta}] + 1$),

とする。

直ちに, R_p は L_θ を用いて

$$R_p = L_{\frac{1}{p}}$$

で与えられることがわかるので, この L_θ は R_p , $p = 1, 2, \dots$, を p に関して連続化した作用素であると思なすことができる。

作用素 L_θ に対しては, 任意の $t > 0$ に対して極限

$$\lim_{\theta \rightarrow 0, n\theta \rightarrow t} L_\theta^n$$

が存在することが容易に示され, 極限 A^t に対しては次が成立する:

(a) $\{A^t\}_{t>0}$ は semi-group をなす。

(b) $0 < \gamma < 1$, $t > 0$ かつ $\gamma e^t < 1$ なる任意の γ, t に対して,

$$A^t \delta(\gamma, Y) = \delta(\gamma e^t, Y).$$

更に, この semi-group A^t の生成作用素 $\mathcal{A} (\equiv \lim_{t \downarrow 0} \frac{A^t - I}{t})$, $D(\mathcal{A}) = \Delta$, のスペクトルについて, [Li-Sinai] は次の事実を示している。

Claim 3 [Li-Sinai].

$$\text{Spec}(\mathcal{A}) = \{1, \frac{1}{2}, 0, \lambda_m^{(1)}, \lambda_m^{(2)} \mid m \geq 1\},$$

ここに,

$$\lambda_m^{(1)} = -\frac{m}{2}, \quad \lambda_m^{(2)} = -\frac{\sqrt{17} - 4 - m}{2}, \quad m \geq 1.$$

上記 $\mathcal{A}$ の固有値のうち $1, \frac{1}{2}, 0$ の重複度は, それぞれ, $1, 3, 6$ であり, $\lambda_m^{(1)}, \lambda_m^{(2)}$ の重複度は, おのこの $(m+3)(m+4)/2, m(m+5)/2$ である。

更に, $\mathcal{A}$ の固有関数系は空間 Δ を張る。

以下, $\mathcal{A}$ の固有値 $1, \frac{1}{2}$ に対する固有関数を $\Phi_i^{(u)}$, $i = 1, \dots, 4$, $\mathcal{A}$ の固有値 0 に対する固有関数を $\Phi_i^{(n)}$, $i = 1, \dots, 6$; $\mathcal{A}$ の固有値 $\lambda_m^{(1)}, \lambda_m^{(2)}$, $m \geq 1$, に対する固有関数の張る空間を $W^s(H^{\sigma^{(1)}})$ とおく。

生成作用素 $\mathcal{A}$ に対するこの不安定モード $\Phi^{(u)}$ と中立モード $\Phi^{(n)}$ の存在が, Claim 2 の証明を困難にしている。具体的には, 初期位相 $\tilde{v}(k)$ を

$$\tilde{v}(k) = w^{\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}}(Y)(H^{\sigma^{(1)}}(Y) + \sum_{j=1}^4 b_j^{(u)} \Phi_j^{(u)}(Y) + \sum_{j'=1}^6 b_{j'}^{(n)} \Phi_{j'}^{(n)}(Y) + \Phi(Y, b^{(n)}, b^{(u)})),$$

$$b_j^{(u)}, b_{j'}^{(n)} \in \mathbb{R}, \quad \Phi(Y, b^{(u)}, b^{(n)}) \in W^s(H^{\sigma^{(1)}}),$$

なる形で与えて²⁷, $\delta^{(r)} \rightarrow \infty$ としたときに, この不安定モードの影響をおさえるような $b_j^{(u)}, b_{j'}^{(n)}$, $\Phi(Y, b^{(u)}, b^{(n)})$ が存在することを示すことが Claim 2 の証明のポイントとなる。[Li-Sinai] では, このこ

²⁷ この不安定モードの係数 $b_j^{(u)}$, $j = 1, \dots, 4$, と中立モードの係数 $b_{j'}^{(n)}$, $j' = 1, \dots, 6$, が爆発解を導く初期位相を与える空間 X の 10 個のパラメータとなる。

とを, 上記 L_θ の定義における (ii)' の段階 (すなわち renormalization をおこなうとき) 毎に, 初期位相における不安定モードと中立モードの係数 $b_j^{(u)}$, $b_j^{(n)}$ を適宜おきかえることにより示しているようである。しかし, くりこみ変換を繰り返し作用させていったときに本当にこのような $b_j^{(u)}$, $b_j^{(n)}$, $\Phi(Y, b^{(u)}, b^{(n)})$ の存在 (範囲) の保障が示されているのか, また証明過程で何回か為された簡略化のたびに現れる誤差項の評価が本当に出来ているのか, 私には follow 出来ていない²⁸。

4 おわりに

その論証に不明な点も残るが, この論文は, Sinai 等による最近 10 年ほどの Navier-Stokes 方程式に関する一連の研究 ([6],[7],[8] 等) の中でも, 特に注目すべきアイデアと強力な方法論を含む (示唆する) 論文の一つであると思う。

最後に, 今後の課題として思いつくことを幾つか述べておく。

- (1) 前節でも不明であるとした, 爆発解を導く初期値 (特に初期位相) のクラスを classify するために [Li-Sinai] がおこなっている (Claim 2 の証明の核心にあたる) 議論を明確にすること: この部分の議論と合成積をくりかえした極限として非線型積分方程式 (27) が導出されるという部分の議論には, Sinai 等による 1970 年代の相転移モデルの研究で用いたくりこみ群による方法 ([1],[2], および [5] の 5 章) と, 本質的にほぼ同じアイデアが用いられているようである²⁹。従って, これらの結果も参考にしながら, 誤差項の評価も含めた詳細な検証をおこなっていく必要がある。手始めに, Navier-Stokes 方程式より取り扱い易い半線型熱方程式に対して, [Li-Sinai] の議論が適用できないかを検討してみるのも面白いかもしれない。
- (2) 方程式 (28) (あるいは (27)) の解空間の構造について更に詳しく調べること: このことは, [Li-Sinai] で構成された Navier-Stokes 方程式の複素数値爆発解と, 本来の Navier-Stokes 方程式の実数値 (爆発) 解との関係を考察する際に重要になるとと思われる。
- (3) 非線型偏微分方程式で従来用いられてきた手法を使って, [Li-Sinai] の Theorem に対する別証明を与えること: 複素数値 Navier-Stokes 方程式と MHD 方程式との関連からも, これは興味深い課題であると思う。

参考文献

- [1] Bleher, P.M. and Sinai, Ya. G.: *Investigation of the critical point in models of the type of Dyson's hierarchical models* Commun. Math. Phys. **33**,23-42 (1973).
- [2] Bleher, P.M. and Sinai, Ya. G.: *Critical indices for Dyson's asymptotically-Hierarchical Models*. Commun. Math. Phys. **45**, 247-278 (1975).
- [3] 小藺 英雄: 非圧縮性粘性流体の方程式, 数理科学, 9-14 (1997).
- [4] Dong Li and Sinai, Ya. G.: *Blow ups of complex solutions of the 3D-Navier-Stokes system and renormalization group method*. arXiv:physics/061010v1 [physics.flu-dyn] (2006).
- [5] Sinai, Ya. G. : *Theory of Phase Transitions: Rigorous Results*. Pergamon Press, Oxford, 1982.
- [6] Sinai, Ya. G. : *Power series for solutions of the Navier-Stokes system on $\mathbb{R}^3$* . J. Stat. Phys. **121**, 779-804 (2005).

²⁸[Li-Sinai] におけるこの部分の証明の記述は, 特に粗い。

²⁹この点は, 数理研での研究集会において高橋陽一朗氏と原隆氏にご指摘頂いた。

- [7] Sinai, Ya. G. : *Diagrammatic approach to the 3D-Navier-Stokes system.* Russian Math. Surveys **60**, 47-70 (2005).
- [8] Sinai, Ya. G. and Mattingly, J.C.: *An elementary proof of the existence and uniqueness theorem for the Navier-Stokes equations.* Commun. Contemp. Math. **1**, 497-516 (1999).