繰りこみ群とミレニアム問題

伊東恵一 [1]

立教大学 数理物理学研究センター

10-11 Nov., 2016

[1] email:keiichi.r.ito@gmail.com, ito@kurims.kyoto-u.ac.jp

Clay Institute　のホームページから

1. Construction of 4D YM Field Theory (Jaffe, Witten)
   Jaffe, Balaban 達が試みる (1980)
2. Solution of Navier-Stokes Equation (Feffermann)
   Sinai 達が試みる (2005)

いかなる解析がこれらの問題の分析に必要か

繰り込み群を用いた最近の研究

1. Boltzmann 方程式 (Erdös, Yau)
2. Pauli-Fierz 模型 (Semi-Classical QED)
3. ポアンカレ予想 (σ model と Ricci 方程式, Perelman's theory ,)

繰り込み理論の歴史と思想

1. 量子場理論で高エネルギー（短距離）での発散を有限個の初期パラメータに押し込める.
2. 統計力学での相転移点での臨界指数を求める, 数学的基礎づけ (ブロックスピン変換など)
3. 非線形方程式の発散指数のしょり
4. 発散する確率偏微分方程式を繰り込み理論で押し込める

繰り込み群=多重スケール分析非線形な理論では, すべてのエネルギーレベルが干渉しあうので, 結合定数はエネルギーレベル毎に変わる。実スケールでの理論は微小スケールの理論（非線形）から多くの非線形的相互作用を経て作られる。

その多様な手法

1. 汎関数積分では, (x, p) 相空間で局在する関数を選んでそこで積分, 各ステップで、補正項を加え, 次に移る
2. 特異点をもつ非線形方程式では, 特異点の次数に合わせ, スケールを調整しつつおこなう.
3. 特異点をもつ非線形方程式では, 特異点の指数を求める

講演の概要

1. 第一部: KPZ 方程式の解の存在について, Wilson 流繰り込み群からの分析
2. 第二部: ミレニアム問題に対応するシグマ問題の相転移問題。これは「クオーク粒子幽閉」問題と関連する. 非線型対称性をもつ系での汎関数積分法

界面表面の進展は面の曲率に比例し, $h(x,t)$ を界面の高さとし KPZ eq. が得られる. 裸の方程式は

$$\begin{aligned} \partial_t h &= \partial_x^2 h + V(\partial_x h) + \Xi \\ V(\partial_x h) &= (\partial_x h)^2 - C_\varepsilon \end{aligned}$$

ただし Ξ は white noise:

$$E(\Xi(x,t)\Xi(y,s)) = \delta(x-y)\delta(s-t)$$

曲率に起因する $V(\partial_x h)$ は発散項を生ずる. C_ε は繰り込み定数. 繰り込み群では積分方程式を経由する (新しい繰り込み理論):

$$\begin{aligned} h &= G * (V + \Xi) \\ G &= (\partial_t - \partial_x^2)^{-1} = (4\pi t)^{-1/2} \exp[-(x-y)^2/2t] \end{aligned}$$

Spohn は h を 3 成分 $u = (u_1, u_2, u_3)$ に拡張：

$$\begin{aligned}
&\partial_t u = \partial_x^2 u + V(u) + \Xi \\
&V = (\partial_x u, M\partial_x u) - C \in R^3, \\
&M = (M^{(1)}, M^{(2)}, M^{(3)}), M^{(i)} = 3 \times 3 \text{ 行列} \\
&C \in R^3 = \text{発散する繰り込み補正項}
\end{aligned}$$

Kupiainen の Wilson 流の解析。

$$\begin{aligned}
u &= G * (V(u) + \Xi) + e^{t\Delta} u_0 \\
G(x,t) &= e^{t\Delta} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp[-x^2/2t]
\end{aligned}$$

G から $0 < t < \varepsilon^2$ 部を削除. $\chi(t)$ を $[0,1]$ の特性関数とし

$$\begin{aligned}
u &= G_\varepsilon * (V(u) + \Xi) + e^{t\Delta} u_0 \\
G_\varepsilon(x,t) &= e^{t\Delta}(x,0)(1 - \chi(\varepsilon^{-2} t)) \\
C &= C_\varepsilon
\end{aligned}$$

Kupiainen は Wilson 流繰り込みで以下を示した

定理 ある $C_\varepsilon > 0$ があって, ほとんどすべての Ξ に対してある, $t(\Xi) > 0$ が存在しすべての $\varepsilon > 0$ に対して解 $u^\varepsilon(t,x)$ が $t \in [0, t(\Xi)]$ で存在し $u \in \mathcal{D}'([0, t(\Xi)] \times T)$ に収束する. u は χ の形によらない.

注意 繰り込み定数は発散する.

$$C_\varepsilon = m_1 \varepsilon^{-1} + m_2 \log \varepsilon^{-1} + m_3$$

Block Spin 変換は上記の積分方程式を逐次にとくものでスケール変換 s_ε で $t \to \varepsilon^2 t, x \to \varepsilon x$ を行う. 点 $x = \varepsilon$ が $x = 1$ に, 点 $x = 1$ が $x = \varepsilon^{-1} = L^N$ に変更される:

$$v^{(\varepsilon)}(\varphi) = \varepsilon^{1/2}(\partial_x \varphi, M \partial_x \varphi) + \varepsilon^{3/2} C_\varepsilon$$

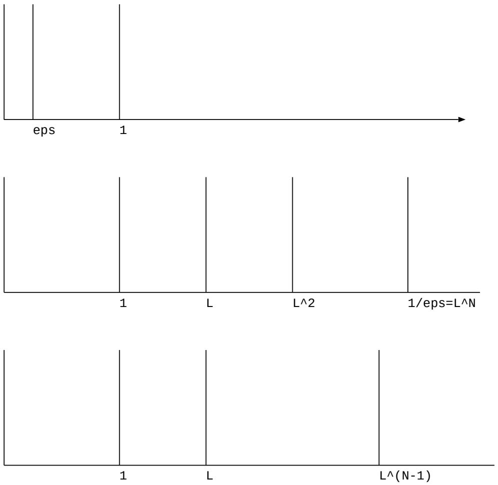
とし

$$\varphi = G_1 * (v^\varepsilon(\varphi) + \xi)$$

を解く:

1. $G_1 = G_{L^2} + (G_1 - G_{L^2})$ とし $|x| > L$ と $1 < |x| < L$ に分離
2. $(G_1 - G_{L^2})$ 部の積分方程式を解き G_{L^2} に代入. $s \equiv s_{L^{-1}}$ でスケールダウンして, G_{L^2} を G_1 にして繰り返す

ε を 1 に, 1 を $\varepsilon^{-1} = L^N$ に変換, スケール変換を N 回でもとに



すなわち

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 \\
\varphi_1 &= G_{L^2} * (v^\varepsilon(\varphi_1 + \varphi_2) + \xi) \\
\varphi_2 &= (G_1 - G_{L^2}) * (v^\varepsilon(\varphi_1 + \varphi_2) + \xi)
\end{aligned}
$$

次に G を不変にする スケーリング作用素

$$
sf(t,x) = L^{1/2} f(t/L^2, x/L) \quad (\to s^{-1} f(t,x) = L^{-1/2} f(L^2 t, Lx))
$$

を導入して、$G_{L^2} \to G_1$ にする:

$$
\varphi_1 = s\varphi', \varphi_2 = s\zeta
$$

$$\begin{aligned}
\varphi' &= s^{-1} G_{L^2} * (v^\varepsilon(s(\varphi' + \zeta)) + \xi) \\
&= G_1 * (S v^\varepsilon(\varphi' + \zeta) + \xi) \\
&= G_1 * (\underbrace{S v^\varepsilon(\varphi' + \zeta(\varphi'))}_{R v^\varepsilon(\varphi')} + \xi) \\
&= G_1 * (R v^\varepsilon(\varphi') + \xi) \\
\zeta &= \Gamma * (S v^\varepsilon(\varphi' + \zeta) + \xi) \\
\Gamma &= G_{1/L^2} - G_1 = e^{t\Delta}(x,0)(\chi(t) - \chi(L^2 t))
\end{aligned}$$

ここで

$$(Sv)(\phi) = L^2 s^{-1} v(s\phi)$$

は $v = (\partial_x \varphi)^k$ に対して縮小写像 $(k > 3)$

$$S(\partial_x \varphi)^k = L^{(3-k)/2} (\partial_x \varphi)^k$$

第一近似で

$$\begin{aligned}\zeta &= \Gamma * (Sv^{\varepsilon}(\varphi' + \zeta) + \xi) \\ &\sim \Gamma * Sv^{\varepsilon}(\varphi') + \Gamma * \xi\end{aligned}$$

これを代入して

$$\begin{aligned}\varphi' &= G_1 * (Sv^{\varepsilon}\{\varphi' + \theta + \Gamma * (Sv^{\varepsilon}(\varphi')\} + \xi) \\ &\sim G_1 * (Sv^{\varepsilon}(\varphi' + \theta)) \\ &= L^{1/2}\varepsilon^{1/2}(\partial_x(\varphi' + \theta), M\partial_x(\varphi' + \theta)) + L^{3/2}\varepsilon^{3/2}C_{\varepsilon} \\ \theta &= \Gamma * \xi\end{aligned}$$

縮小写像性によって, $(\partial_x \varphi)^k$ の高次項は収束する.

$$\Gamma = e^{t\Delta}(\chi(t) - \chi(L^2 t))$$

は 1 と L^{-1} のスケールに生きていて, ζ はもとまり $\varphi' + \zeta = \varphi' + \zeta(\varphi')$ として, 繰り返す. この Γ は性質のいい積分核で繰り込み変換で重要な役を担う. ζ は θ (Γ で平滑化された ξ) で表わされ, $\varepsilon = L^{-N}$ として N 回行い

$$(\partial_x \varphi + \theta, M(\partial_x \varphi + \theta)) - C$$

$C \sim -\mathbf{E}(\theta(t,x)\theta(s,y)) = m_1 L^N + m_2 N + O(1)$ という繰り込み補正項 (この場合定数項) を導出する.

4D 格子ゲージ, 2D シグマモデル, NV 方程式での困難

1. 系は非線形で, 線型項またはガウシアン項を見つけ難い。　局所的にガウスが見つかってもグローバルにはガウスにはならない. これらをつぎ足さねばならない
2. 近似を上げていくと係数が発散するか, 増加する項があらわれる (relevant 項といわれる)

２次元スピンモデルの歴史

２次元スピンモデルは単純だが難しい

1. ２次元イジング模型: 自発磁化の存在, 厳密解
   R.Peierls (1936), L.Onsager (1944)
2. ２次元 XY モデル ($O(2)$ 不変モデル)
   Kosterlitz-Thouless 転移 (Nobel prize 2016) の存在証明
   J.Fröhlich and T.Spencer (1982)
3. ２次元ハイゼンベルグ模型 ($SO(N)$ 不変モデル) で相転移不存在
   (未証明、４次元の格子ゲージ模型と類似) (このお話)

[イジングモデル] Peierls の議論: 方形領域の境界スピンを $+1$, 中心（原点）スピンを -1 に設定. 任意の配位 $\{s_x \in \pm 1\}$ に対し

$$\exp[\beta \sum_{nn}(s_i s_j - 1)] = \exp[-2\beta \sum_i |\gamma_i|],\ \gamma_0 \ni \{0\}$$

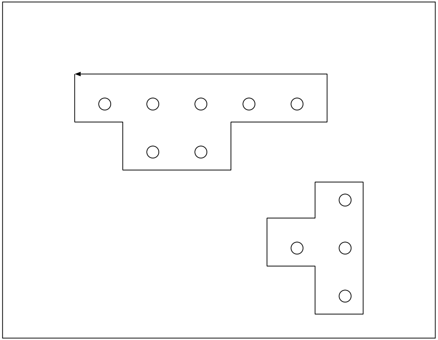
原点スピン s_0 が -1 である確率は境界壁 γ の内部に含まれる確率:

$$Prob(s_0 = -1) < \sum_{\gamma \ni 0} \exp[-2\beta|\gamma|] < 1/2, \quad \beta \gg 1$$

$$\to \langle s_0 \rangle > 0$$

[回転対称性] スピンが上下ではなく, 滑らかに回転！Ising モデルと違って境界壁があいまいで定義できない. どうすればいいんだ! Peierls の議論が拡張できないまま 85 年たった!

[イジングモデルの境界壁] シャープな境界壁 γ:
○ : $s_i = -1$, 無し : $s_i = +1$



[イジングと O(N) 敷不変モデルの相違] スピンの flip-flop におけるエネルギー差が決定的に異なる.

2 次元シグマモデル=Landau-Ginzbrg(2 重井戸) モデル

$$\langle f(\phi)\rangle = \int f(\phi)\exp[-W_0(\phi)]\prod_x d^N\phi(x)$$

$$W_0 = \frac{1}{2}\langle\phi,(-\Delta+m_0^2)\phi\rangle + \frac{g_0}{2N}\langle :\phi^2:_G, :\phi^2:_G\rangle$$

$$:\phi^2:_G(x) = \sum_{i=1}^{N}\phi_i^2(x) - NG(0), \quad \beta = G(0)$$

$$(-\Delta)_{xy} = 4\delta_{xy} - \delta_{1,|x-y|}, \quad \text{Lattice Laplacian}$$

ただし $G(0)=\beta$ は $m_0^2 \sim 32e^{-4\pi\beta}$:

$$G(x) = \frac{1}{-\Delta+m_0^2}(x) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{ipx}}{m_0^2+2\sum(1-\cos p_i)}\prod\frac{dp_i}{2\pi}$$

むつかしさ

ただし $G(0)=\beta$ は $m_0^2 \sim 32e^{-4\pi\beta}$:

$$
\begin{aligned}
G(x) &= \frac{1}{-\Delta + m_0^2}(x) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ipx}}{m_0^2 + 2\sum(1-\cos p_i)} \prod \frac{dp_i}{2\pi} \\
&\sim \exp[-m_0|x|], \quad m_0 \to 0
\end{aligned}
$$

が異様に長い相関を示す. 摂動が破たんする.

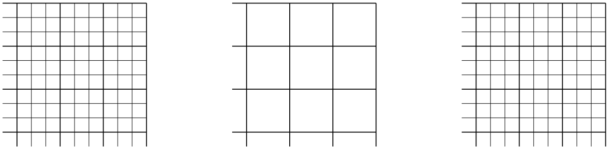
問題 この系はいかなる β に対しても相転移を示さない, 相関長がつねに有限である.

グリーン関数（共変関数) の平均化とスケール変換

$$
\begin{aligned}
G_0(x,y) &= \frac{1}{-\Delta + m_0^2}(x,y) \sim \frac{1}{|x-y|^{d-2}} \\
G_n(x,y) &= \frac{1}{L^4} \sum_{\zeta,\xi \in \Delta_0} G_{n-1}(Lx+\zeta, Ly+\xi) \\
\phi_n(x) &= (C\phi_{n-1})(x) = \frac{1}{L^2} \sum_{\zeta \in \Delta_0} \phi_{n-1}(Lx+\zeta)
\end{aligned}
$$

$C =$ ブロックスピン作用素

$=$ 算術平均 $(L^{-2}\sum)$ + スケーリング $(Lx \to x)$:



長い相関を持つガウス変数の分解:

$$\langle \phi_n(x)\phi_n(y)\rangle = G_n(x,y)$$

$$\begin{aligned}
\phi_n(x) &= \underbrace{A_{n+1}\phi_{n+1}}_{\text{平均化されたスピン}}(x) + \underbrace{z_n}_{\text{平均ゼロの揺動}}(x) \\
\langle \phi_n, G_n^{-1}\phi_n\rangle_{\Lambda_n} &= \langle \phi_{n+1}, G_{n+1}^{-1}\phi_{n+1}\rangle_{\Lambda_{n+1}} + \langle z_n, G_n^{-1}z_n\rangle_{\Lambda_n}
\end{aligned}$$

が成立する行列 A_{n+1} と新ガウス変数 z_n が存在する。ここで $\Lambda_n = L^{-n}\cap\Lambda$ で

$$CA_{n+1} = 1, \quad Cz_n = 0$$

$$A_{n+1} = G_n C^+ G_{n+1}^{-1} : R^{\Lambda_{n+1}} \to R^{\Lambda_n}$$

$$Q : R^{\Lambda'_n} \to R^{\Lambda_n}, \quad CQ = 0$$
$$Q^+ G_n^{-1} Q = \Gamma_n^{-1}$$
$$z_n = Q \Gamma_n^{1/2} \xi$$

$\langle \phi, (-\Delta + m_0^2)\phi \rangle$ を多くのガウス変数 $\{z_n = Q\Gamma_n^{1/2}\xi_n\}$ に分解.

$$\langle \phi, G_0^{-1} \phi \rangle = \langle \phi_1, G_1^{-1} \phi_1 \rangle + \langle \xi_0, \underbrace{Q^+ G_0^{-1} Q}_{\Gamma_0^{-1}} \xi_0 \rangle$$
$$= \langle \phi_2, G_2^{-1} \phi_2 \rangle_{\Lambda_2} + \langle \xi_1, \underbrace{Q^+ G_1^{-1} Q}_{\Gamma_1^{-1}} \xi_1 \rangle_{\Lambda_1} + \langle \xi_0, \underbrace{Q^+ G_0^{-1} Q}_{\Gamma_0^{-1}} \xi_0 \rangle_{\Lambda_0}$$

$\Gamma_n = Q^+ G_n^{-1} Q$ 　はゼロ平均関数の上で厳密に正:

繰り込み変換の原型:

システムを長い距離で見直す. → 途中の自由度を組み込みつつ L^n m を 1 m に縮める.

$$\begin{aligned} \exp[-W_{n+1}(\phi_{n+1})] &= \int \exp[-W_n(A_{n+1}\phi_{n+1} + z_n)]d\mu_0(\xi) \\ W_0 &= \frac{1}{2}\langle \phi_0, (-\Delta)\phi_0\rangle + \frac{g_0}{2N}\langle : \phi_0^2 :, : \phi_0^2 :\rangle \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} z_0 &= Q\Gamma_0^{1/2}\xi, \quad \xi \text{は } N(0,1) \text{ に従う} \\ \Gamma_0 &= (Q^+(-\Delta)Q)^{-1} \end{aligned}$$

定理:

ϕ_{n+1} を $| : \phi_{n+1}^2 : |$ が大きい領域 D と $| : \phi_{n+1}(x)\phi_{n+1}(y) : |$ が大きくなる境界壁領域 R, それ以外の「小 or 滑らか」場所 K (後述) に分離すれば

$$
\begin{aligned}
&(n+1)\text{th Gibbs 測度} \\
&= \sum_{X=\cup X_i} \prod_i g_{X_i}^{D\cup R} \times \exp\left[-W_{n+1}^K(\phi_{n+1}) - F^{K\backslash X}(\phi_{n+1}) \right]
\end{aligned}
$$

ここで X_i は ξ の非局性によって $D \cup R$ から派生するポリマー展開項

$$
\begin{aligned}
&X_i \cap X_j = \emptyset, \cup X_i \supset D \cup R \\
&F^{K\backslash X}(\phi_{n+1}) = X \text{ を除いた部分の } \phi_{n+1} \text{ で小さい}
\end{aligned}
$$

かつ W^K_{n+1} は以下の形をとる

$$W^K_{n+1}$$
$$= \frac{1}{2}\langle \phi_{n+1}, G^{-1}_{n+1}\phi_{n+1}\rangle + \frac{1}{2N}\langle : \phi^2_{n+1} :_{G_{n+1}}, D_{n+1} : \phi^2_{n+1} :_{G_{n+1}}\rangle_K$$
$$+\frac{1}{2}\gamma_n\langle \phi^2_{n+1}, E^{\perp} G^{-1}_{n+1} E^{\perp}\phi^2_{n+1}\rangle_K$$

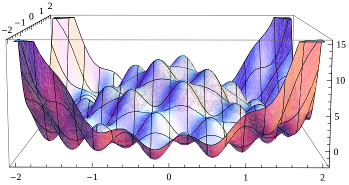
(i) 結合定数 D_{n+1} は $D^* > 0$ に指数的に収束する.

$$D_n \to D^* > 0$$

(ii) $g^{D\cup R}_{X_i}$ はその和 $\sum_X g^{D\cup R}_{X_i}$ が収束する. (D, R はエネルギー大)

球面に拘束される揺動場 $z_n = Q\Gamma_n^{1/2}\xi_n$

$$\exp\left[-\frac{g}{N}((\phi_{n+1}+z_n)^2 - N\beta_n)^2\right] \text{ かつ } |\phi_{n+1}^2 - N\beta_{n+1}| = O(1)$$



揺動場 $\xi_n(x)$ は背景場のブロックスピン ϕ_{n+1} に影響される. ξ_n は井戸の底に生きて、かつ ϕ_{n+1} に鉛直にすすむ.

$$\xi_n \in T(S^{N-1})$$

$$\begin{aligned} D(\phi_n) &= \text{Large and/or non-smooth configuration of } \phi_n \\ &= D_0(\phi_{n+1}) \cup D_w(\phi_{n+1}) \cup R(z_n = Q\xi_n) \\ &= \text{津波} + \text{大きいさざ波} \end{aligned}$$

境界壁 D_w =スピンが大きく回転する場所

$$|\phi_n(x)\phi_n(y) - N\beta_n| > \tau_0 N^{1/2} \exp[(c/10)|x-y|]$$

$$\forall x \in D_w, \exists y \in D_w$$

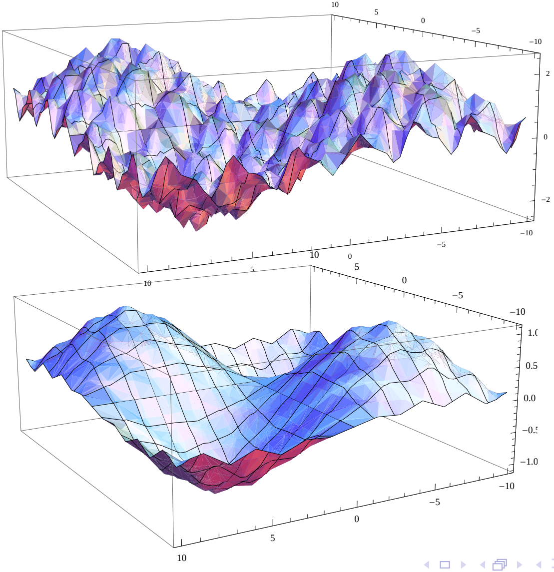
1/2 は 揺動場 $\sum : \xi_i^2 :$ の中心極限定理から D_w の外では

$$|\phi_n(x)\phi_n(y) - N\beta_n| < \tau_0 N^{1/2} \exp[(c/10)|x-y|]$$

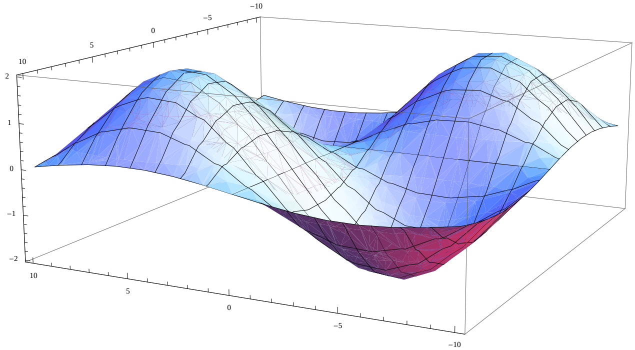
$$\forall x \in D_w^c, \forall y \in D_w^c$$

そこで $(D_w)^c$ では $\phi_n(x)\phi_n(y) = NG_n(x,y)$

$\phi_n = A_{n+1}\phi_{n+1} + Qz_n$ の配位
津波（長い境界壁)$A_{n+1}\phi_{n+1}$ 上のさざ波 Qz_n



ブロックスピン変換=さざ波のトリミング



$\phi_n(x)$ に直交する揺動 $\xi_n(x)$ は $N-1$ 個の自由度がる。ただし球面に沿って方向が変わる (tangent vector 空間での積分)

非可換対称性に特有な接空間での積分の拘束条件:

$$
\begin{aligned}
Z(x,y) &= :\phi_n(x)\phi_n(x): - :\varphi_{n+1}(x)\varphi_{n+1}: \\
&= \varphi_{n+1}(x)z_n(y) + \varphi_{n+1}(y)z_n(x) + :z_n(x)z_n(y):
\end{aligned}
$$

がある範囲に抑えられる：

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K} &= \{\{\xi_n(u) \in R^N; u \in K\}; \\
&\quad |Z(x,y)| \leq \tau_0 N^{1/2} \exp[(c/10)|x-y|]\} \\
&= (\text{厚みのある接ベクトル空間})
\end{aligned}
$$

この集合は十分に大きいことが示される。

RG は Banach Space $\mathcal{H}$ の縮小写像

スピン配位の空間 $\mathcal{K}_n$

$$\mathcal{K}_1 \supset \mathcal{K}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{K}_n$$

$\mathcal{K}_n$ =ボールの表面に制限されたスムースに伝搬するスピン波 (接空間に制限されたガウス積分)

1. 緩やかな境界壁
   $|\phi_n(x)\phi_n(y) - N\beta_n| < \tau_0 N^{1/2} \exp[(c/10)|x-y|]$
   $\forall x, y \in K$
2. $|\phi_n(x)^2 - N\beta_n| < \tau_0 N^{1/2}$
3. $|\nabla \phi_n(x)| < \tau_0 N^{1/2}$

深刻な問題または難点

1. 係数が増大する可能性のある ϕ^4 項

$$\phi_n(x) = A_n\phi_{n+1} + Q\xi(x) \sim \phi_{n+1}([x/L]) + Q\xi(x)$$

と $\phi_n(x), |x| < L/2$ は L^2 個の $\phi_{n+1}([x/L])$ を含み

$$\sum_x \phi_n^2(x) \sim L^2 \sum_x \phi_{n+1}^2(x)$$

$$\sum_x (:\phi_n^2:_{G_n}(x))^2 \sim L^2 \sum_x (:\phi_{n+1}^2(x):_{G_{n+1}})^2$$

ϕ^4 項は n について指数的に増加, 幸いこれは起こらない.

2. 境界壁は極めて非局所的 (非アーベル性に特有) これは深刻, 接空間上での制限積分

主要定理

Gibbs 測度 は ϕ_{n+1} がスムーススモールである場所 K と境界壁/大場領域 D により, いわゆるポリマー展開で与えられる: これは 揺動場 ξ が指数的に減少するとはいえ非局所的だから. K では主要項 W_n は三つの項と四つのパラメータで記述され

$$
\begin{aligned}
W_n^K(\phi_n, \psi_n) &= \frac{1}{2}\langle \phi_n, G_n^{-1}\phi_n\rangle + \frac{g_n}{2N}\langle : \phi_n^2 :_{G_n}, : \phi_n^2 :_{G_n}\rangle \\
&\quad + \frac{1}{2}\gamma_n < \phi_n^2, E^{\perp} G_n^{-1} E^{\perp} \phi_n^2 >
\end{aligned}
$$

1. $G_n^{-1} = -\Delta + m_n^2,\ m_n^2 = L^{2n} m_0^2$
2. $\gamma_n = (N\beta_n)^{-1}$.
3. $g_n \to g^* = O(1) > 0$ (固定点への収束)
4. $E^{\perp} = \mathcal{N}(C) = \{f; Cf = 0\}$ への射影

- 最初の二つは主要項 (marginal term)
- 残りは非本質項 (irrelevant term)
- $(:\phi_n^2:)^2$ は表面上　増加項 (relevant term) だが g_n は定数に収束する

流れは 3　個のパラメータで記述され

$$
\begin{aligned}
m_n^2 &= L^{2n} m_0^2 \sim \exp[-4\pi\beta + 2n \log L] \to O(1), \\
\beta_n &= \beta - \mathrm{const.}\, n \to O(1) \\
\gamma_n &= O((\beta_n N)^{-1}) \\
g_n &= O(1)
\end{aligned}
$$

結論: 系がは単井戸ポテンシャルに収束し, よって相転移不存在が従う.

証明概要

主アイデアと 3 つの定理:

1. 接空間での積分が主要で, 非局所項をあまり生じないこと
2. 境界壁のエネルギーは高く, 寄与しないこと
3. 主要項の漸化式を解くこと

$\phi_n = \varphi_{n+1} + z_n$, $\varphi_{n+1} = A_{n+1}\phi_{n+1}$, $z_n = Q\xi_n$ と分解して

$$\begin{aligned} < \phi_n, G_n^{-1}\phi_n > &= < \phi_{n+1}, G_{n+1}^{-1}\phi_{n+1} > + < \xi_n, \Gamma_n^{-1}\xi_n >, \\ \Gamma_n^{-1} &= Q^+ G_n^{-1} \sim Q^+(-\Lambda)Q > O(1) \\ :\phi_n^2(x):_{G_n} &= :\phi_{n+1}^2(x):_{G_{n+1}} + q(x) \\ q(x) &= 2\phi_{n+1}(x) z_n(x) + :z(x)_n^2:_{\Gamma_n} \end{aligned}$$

$$:\phi_n^2(x):_{G_n} - :\varphi_{n+1}^2(x):_{G_{n+1}} = q(\xi) = 2\varphi_{n+1}(x)z_n(x) + :z(x)_n^2:_{\Gamma_n}$$

の $d\mu(\xi)$ に関する分布関数 ($\int q(\xi)d\mu = 0$, 中心極限＝ガウス):

$$\begin{aligned} P(\varphi_{n+1}, p) &= \int \exp\left[\frac{i}{\sqrt{N}}\sum_x (p - q(\xi))_x \lambda_x\right] d\mu(\xi) \prod d\lambda_x \\ &= \exp\left[\frac{i}{\sqrt{N}}\langle (p - q(\xi)), \lambda\rangle\right] d\mu(\xi) \prod d\lambda_x \\ d\mu(\xi) &= \exp[-\langle \xi, \Gamma_n^{-1}\xi\rangle] \prod d\xi_x \end{aligned}$$

定理 1:

p は (ほぼ) ガウス分布にしたがう

$$
\begin{aligned}
P(p,\varphi) &= \exp[-\frac{1}{4N}\langle p, \frac{1}{M}p\rangle] \\
M &= \Gamma_n^{\circ 2} + \frac{2}{N}(\phi_n\phi_n)\circ\Gamma_n \\
&= \Gamma_n^{\circ 2} + 2\beta_n\Gamma_n + \underbrace{:\phi_n\phi_n:}_{\text{弱い境界壁からの寄与}} \circ\Gamma_n/N
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\Gamma_n)(x,y) &= (QG_n^{-1}Q^{+})(x,y) \sim \exp[-|x-y|] \\
((\phi\phi)\circ\Gamma)(x,y) &= (\phi(x)\phi(y))\Gamma(x,y) \sim NG(x,y)\Gamma(x,y) \\
\operatorname{spec} M &= \{\underbrace{\kappa_0}_{O(1)>0}, \underbrace{\kappa_1,\cdots,\kappa_{L^2-1}}_{O(\beta_n)}\}
\end{aligned}
$$

系 2: 境界壁が弱ければ, つまり

$$|:\phi_n(x)\phi_n(y):\circ\Gamma_n(x,y)| < N^{1/2+\varepsilon}\times 1$$

ならば

$$\begin{aligned}\langle p, \frac{1}{M}p\rangle &= \sum_{\text{blocks}:U\subset\Lambda_n}\langle p_U, \left(\frac{1}{\kappa_0}E_0+\sum_i\frac{1}{\kappa_i}E_i\right)p_U\rangle \\ &\sim \sum_{\text{blocks}:U\subset\Lambda_n}\langle p_U, \left(\frac{1}{\kappa_0}E_0\right)P_U\rangle \\ &= \sum_{\text{blocks}:U\subset\Lambda_n}\frac{1}{\kappa_0}(E_0p_U)^2\end{aligned}$$

ここで

$$E_0 = \text{ブロック毎に定数である関数への射影}$$
$$E_1 = \text{ブロック毎に零平均である関数への射影}$$

定理 2

境界壁は以下を満たすブロックの集まり

$$|\phi_n(x)\phi_n(y) - N\beta_n| > \tau_0 N^{1/2} \exp[(c/10)|x-y|]$$

$$\forall x \in D_w, \exists y \in D_w$$

強い境界壁 D_w は大きなエネルギーをもつ

$$\int \exp[-\frac{1}{2}\langle \varphi_n, G_0^{-1}\varphi_n\rangle_{D_w}]d\mu(\xi) < \exp[-\tau_0|D_w|]$$

注意: これは $g^{D\cup R}$ が小さいこと, polymer 展開の収束を保証.
注意: D_w の外では内積 $\varphi\varphi$ を NG_n で置き換えてよい

定理 3

$$\begin{aligned}
&\int \exp[-\frac{g_n}{2N}\langle :\varphi_n^2:, :\varphi_n^2:\rangle + (.....)]d\mu(\xi) \\
&= \int \exp[-\frac{g_n}{2N}\langle :\varphi_{n+1}^2: + p, :\varphi_{n+1}^2: + p\rangle] P(p,\varphi) \prod dp
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(p) &= \exp[-\frac{1}{4N}\langle p, M^{-1}p\rangle] \\
&= \exp[-\frac{1}{4N}\langle p, \left(\frac{1}{\kappa_0}E_0\right) p\rangle] = \exp[-\frac{1}{4N\kappa_0}\sum (E_0 p_U)^2]
\end{aligned}$$

ここで $E_0 p$ は $\{p\}$ からブロック毎に定数な部分を抽出したもの (block spin type.)

最後は p でのガウス積分:

p でのガウス積分は $:\varphi_{n+1}^2:$ の 2 次項を生じる. g_n は収束する漸化式に従う:

$$\frac{g_n}{2N}\sum_x(:\varphi_{n+1}^2:+p)^2+\frac{1}{2N}\sum_x(E_0p)^2$$
$$=\frac{g_n}{2N}\sum_x\left[(E_0(:\varphi_{n+1}^2:+p))^2+((1-E_0)(:\varphi_{n+1}^2:+p))^2\right]$$
$$+\frac{1}{2N}\sum_x(E_0p)^2$$

として E_0p と $(1-E_0)p$ で積分し, steepest descent + （摂動) を用いる. $P(p)=P_n(p)$ はすべての n でガウスなので,

定理 4 g_n はスケーリング領域で定数に収束する: $g_n \to g^*$

謝辞：皆様のご寛容と御忍耐に感謝いたします。

文献

講演スライドにはつけられなかった文献 (概要に添付されていたもの) を添付します。不完全ですがお役に立てば幸いです.

- A.Jaffe and E.Witten, Quantum Yang-Mills Theory, in Millennium Problems, Clay Mathematical Institute.
- T.Balaban, A low temperature expansion for classical N-vector model I, Commun.Math.Phys., **167** 103 (1995); Variational problems for classical N-vector model, Commun.Math.Phys., **175**, 607 (1996)
- J.Dimock, The Renormalization Group According Balaban, I, arXiv 1108/1335; II, arXiv:1212.5562
- J.Fröhlich and T.Spencer, The Kosterlitz-Thouless transitions in Two-Dimensional Abelian Spin Systems and the Coulomb Gas, Commun.Math.Phys., **81**, 527 (1981)

- M.Hairer et al., A class of growth models rescaling to KPZ, arXiv:1512.0784
- A.Kupiainen, Renormalization of Generalized KPZ equation, arXiv:1604.0872
- K.Gawedzki and A.Kupiainen, Massless lattice ϕ_4^4 theory: Rigorous control of a renormalizable asymptotically free model, Commun.Math.Phys. **99**, 197 (1985), and references cited therein.
- 伊東恵一, 繰り込み群の物理と数理, SGC ライブラリ 81 (2011), サイエンス社
- K.R.Ito, Renormalization Group Flow of 2D O(N) Spin Model with large N, Absence of Phase Transitions, Paper in Preparation
- K.R.Ito, Origin of Asymptotic Freedom in Non-Abelian Field Theories, Phys.Rev.Letters, **58** (1987) 439 ; Renormalization Group Flow of 2D Hierarchical Heisenberg Model of Dyson-Wilson Type, Commun. Math.Phys. **137**(1991) 45