

2012 年度微分積分学 A レジメとレポート解答  
第 1, 2 章 とレポート No.1

黒田教科書では第 1 章で, テーラー展開

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + \int_a^x \frac{1}{(n-1)!} (t-a)^{n-1} f^{(n)}(t) dt$$

の部分積分による証明があってモチベーションを高めている。授業では 3 時間をこの第一章にあてたが、これについては後の講義で触れるはずなのでここでは立ち入らない。しかし

この証明と初等関数の展開は常識なので必ず覚えてください。

また話題として

有理数や代数的数 (整数係数代数方程式の根) の可算性 (Cantor による),  
すなわち自然数と 1:1 対応が付くことの証明や, 実数は非可算である Cantor の対角線論法の議論にふれた。工学部の学生にはあまり必要がないかもしれないが、有名な論法であり知識として持っていて損はない。

さて黒田教科書 第 2 章では実数の定義が与えられる:

1. 可換体 (加減乗除ができること, 0, 1 の存在)
2. 順序が入り ( $a \geq b, a < b \rightarrow a + c < b + c$ , etc. が成り立つ)
3. 連続性の公理

を満たすものである。実数の連続性の公理は

Weierstrass の公理:

有界な実数の集合  $A$  には上限  $M = \sup A$  と 下限  $m = \inf A$  がある。

$M$  が集合  $A$  の上限とは

1.  $M \geq a, \forall a \in A$
2.  $M' < M$  ならば,  $\exists a \in A, M' < a$ .

を満たすものである。これを理解するのは初学生には結構骨がおれるかも知れない。本によっては「デデキントの切断」を用いることもある。

実数の連続性の公理 = デデキントの切断

= [W]eierstrass (sup, inf)

→ [M]onotone 数列の収束

→ [K]  $\cap U_i \neq \emptyset$

→ [C]auchy 列は収束する

→ [BW] 有界数列は収束する部分列を含む

実数とはこれらを満たすものである。また  $\varepsilon - \delta$  型言い回し, その否定命題の作り方になれないといけない。たとえば,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  は高校以来お馴染だがその定義は

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, n > N_0, n \in \mathbb{N} \rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

この意味は「 $n$  を大きくすれば、 $a_n$  は幾らでも  $a$  に近づく」という正しい、しかしあいまいな日本語の数学的言葉への翻訳である。使いやすい形での公理は

定理: 単調な有界列  $a_n$  は収束する.  $a_n \geq a_{n+1} < M, \forall n \in N$  ならば  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

定理: Cauchy 列は収束する. つまり  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in N, \forall m, n \geq N_0, |a_m - a_n| < \varepsilon$  ならば  $\exists a, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

sup, inf, 開集合 ( $U_\varepsilon(a) \subset A$ ), 閉集合 ( $A = \bar{A}$ ), 有界閉集合 (コンパクト集合) などの定義や一様連続性も初学生には理解しがたい部分があるので何回も読むことが必要。これらは略解であり、紙数制限と学生の自立的学習のため省略している部分、または間違ってるかもしれない部分を学生諸君は自分で補足、証明していただきたい。

【55 頁】【問 2.5.4】使うのはアルキメデスの原理  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  と  $n$  が  $k$  より十分大のときの 2 項係数の評価  ${}_n C_k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} > \frac{n^k}{2 \times k!}$  など。収束に関する「はさみうちの原理」などの定理も有効。

$$(iv) = \lim \frac{n^{10} + 5n^4 + n^2}{(1+2)^2} \leq \lim \frac{n^{10} + 5n^4 + n^2}{{}_n C_{11}} = 0$$

$$(v) = 0$$

$$(vi) = \lim \frac{n(n+1)}{2n^2} = 1/2$$

$$(vii) = \lim \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = 1/3$$

$$(viii) = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

$$(ix) = \lim \frac{n^n}{n!} = n \times (n/2) \times \cdots (n/n) \geq n \rightarrow \infty$$

$$(ix) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{\prod_{k=1}^n k(n+1-k)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{n^2} \rightarrow 0 \quad (k(n+1-k) \geq n \text{ を使う. } k = n/2 \text{ を取り出す.)$$

【82 頁】【問 2.8】

仮定から

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in N, \forall n \geq N_0, \rightarrow \alpha - \varepsilon \leq a_{n+1} - a_n \leq \alpha + \varepsilon$$

すなわち、これらを加えて  $n > N_0$  ならば

$$\frac{n - N_0}{n + 1}(\alpha - \varepsilon) \leq \frac{a_{n+1} - a_{N_0}}{n + 1} \leq \frac{n - N_0}{n + 1}(\alpha + \varepsilon)$$

または

$$\frac{a_{N_0}}{n + 1} - \frac{N_0}{n + 1}(\alpha - \varepsilon) - \frac{\alpha}{n + 1} - \varepsilon \leq \frac{a_{n+1}}{n + 1} - \alpha \leq \frac{a_{N_0}}{n + 1} - \frac{N_0}{n + 1}(\alpha + \varepsilon) - \frac{\alpha}{n + 1} + \varepsilon$$

ここで  $N_1$  を  $|\alpha|(N_0 + 1)/N_1 < \varepsilon$  となるように大きく選び、 $n > \text{Max}(N_0, N_1)$  とすれば

$$\left| \frac{a_{n+1}}{n + 1} - \alpha \right| \leq 2\varepsilon$$

【82 頁】【問 2.9】

仮定から

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in N, \forall n \geq N_0, \rightarrow (\alpha - \varepsilon)b_n \leq a_n \leq (\alpha + \varepsilon)b_n$$

ここで一般性を失わず  $\alpha \geq 0$  とした。

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad B_n = \sum_{k=1}^n b_k$$

とする。上の不等式から

$$\frac{\sum_{k=1}^{N_0} a_k + (\alpha - \varepsilon) \sum_{k=N_0+1}^n b_k}{B_n} \leq \frac{A_n}{B_n} \leq \frac{\sum_{k=1}^{N_0} a_k + (\alpha + \varepsilon) \sum_{k=N_0+1}^n b_k}{B_n}$$

これから

$$\frac{\sum_{k=1}^{N_0} a_k - \varepsilon \sum_{k=N_0+1}^n b_k}{B_n} \leq \frac{A_n}{B_n} - \alpha \frac{\sum_{k=N_0+1}^n b_k}{B_n} \leq \frac{\sum_{k=1}^{N_0} a_k + \varepsilon \sum_{k=N_0+1}^n b_k}{B_n}$$

さらに  $b_k \geq 0$  より

$$\frac{\sum_{k=1}^{N_0} (a_k + \alpha b_k)}{B_n} - \varepsilon \leq \frac{A_n}{B_n} - \alpha \leq \frac{\sum_{k=1}^{N_0} (a_k + \alpha b_k)}{B_n} + \varepsilon$$

$B_n = \sum_{k=1}^n b_k \rightarrow \infty$  なので、 $N_0$  に対して  $(\sum_{k=1}^{N_0} (a_k + \alpha b_k))/B_n \leq \varepsilon$  となるよう  $n > N_1$  を決めれば

$$\left| \frac{A_n}{B_n} - \alpha \right| \leq 2\varepsilon$$

**【問 2.10】**  $a_n = n^p$ ,  $b_n = n^{p+1} - (n-1)^{p+1} = n^p + n^{p-1}(n-1) + \dots + (n-1)^p$ ,  $n \geq 1$ , とすれば,  $B_n = \sum_{k=1}^n b_k = n^{p+1}$  となり題意に合致する。このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{n^p + n^{p-1}(n-1) + \dots + (n-1)^p} = \frac{1}{p+1}$$

よって問 2.9 から問 2.3 の答え,  $1/(p+1)$  が従う。なおこれは

$$\int_0^1 x^p dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = \frac{1}{p+1}$$

に他ならない。任意の  $p > -1$  に対してはこの証明は因数分解が使えず機能しないので  $r < 1$  とし  $(0, 1)$  を  $\{1 = r^0, r, r^2, r^3, \dots\}$  と分割し,

$$\int_0^1 x^p dx = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} r^{pk} (r^k - r^{k+1}) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1-r}{1-r^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$

を使うといい。これは積分を区間に分けて求めているが、等区間ではない。