2012 年度微分積分学 A レジメとレポート
第 3,4 章　とレポート No.3

内容

1　微分の基本公式

定義 1 *(1)* n 次元では $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $a = (a_1, \cdots, a_n)$, $|a - x| = (\sum(x_i - a_i)^2)^{1/2}$ とする。$f(x)$ が $a \in R^n$ で微分可能であるとは

$$f(x) = f(a) + \sum_i \alpha_i (x - a)_i + o(|x - a|)$$

となる定数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ が存在すること。ここで $g(x) = o(|x - a|))$ とは

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{|x - a|} = 0$$

$y = f(a) + \sum_i \alpha_i (x - a)_i$ を接平面（接線）という。
(2) 上記の定義は $n = 1$ **の時には**

$$\alpha_1 = f'(a) = \frac{d}{dx} f(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

の存在と同値。さらに $n = 1$ **の時には**

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x)(x - x_0)$$

を満たす, $x = x_0$ で連続な関数 $\alpha(x)$ があることと同値である.
(3) 上記の定義は $n \geq 2$ **の時には**偏微分可能性を示す（逆は真ではない。）

$$\alpha_i = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = f_{x_i}(x) = \lim_{h_i \to a} \frac{f(x + h) - f(x)}{h_i}$$

ここで $h = (0, \cdots, 0, h_i, 0, \cdots, 0)$

定理 1 微分の基本公式, f, g, u は微分可能とする。このとき

$$(1)\ \frac{d}{dx} f(x) g(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$
$$(2)\ \frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) g(x) - f(x) g'(x)}{f(x) g(x)}$$
$$(3)\ \frac{d}{dx} f(u(x)) = u'(x) f'(u(x))$$

問題 1.1 この定理を証明せよ.

定理 2 *(*逆関数の微分公式*)* $y = f(x)$ が区間 $I = (a, b)$ で 1 対 1 *(1* 変数なら単調*)* かつ上への写像で微分可能ならば逆関数 $x = f^{-1}(y)$ が存在して微分可能である。

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(y)}$$

証明

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x)(x - x_0)$$

で $\alpha(x)$ は $x = x_0$ で連続とできる. $x = f^{-1}(y)$, $x_0 = f^{-1}(y_0)$ を代入して

$$y = f \circ f^{-1}(y) = f \circ f^{-1}(y_0) + \alpha(f^{-1}(y))(f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0))$$

これを書き換えて

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) + \frac{1}{\alpha(f^{-1}(y))}(y - y_0)$$

これは (定義 1 (2) から分かるように) $f^{-1}(y)$ が y_0 で微分可能であって,

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{\alpha(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

を示している.

よく使われる逆関数

$$\begin{array}{ll} y = \exp\, x, x \in R & \to x = \log y \\ y = \sin x, x \in [-\pi/2, \pi/2] & \to x = \sin^{-1} y \\ y = \cos x, x \in [0, \pi] & \to x = \cos^{-1} y \\ y = \tan x, x \in (-\pi/2, \pi/2) & \to x = \tan^{-1} y \end{array}$$

明らかに

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2, \quad \tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} = sgn(x)\pi/2$$

定理 3 微分の基本公式

(1) $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$

(2) $\frac{d}{dx} \sin ax = a \cos ax$

(3) $\frac{d}{dx} \sin^{-1}(x/a) = \frac{sgn(a)}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

(4) $\frac{d}{dx} \cos^{-1}(x/a) = -\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

(5) $\frac{d}{dx} \tan^{-1}(x/a) = \frac{a}{a^2 + x^2}$

(6) $\frac{d}{dx} \log |ax| = \frac{1}{x}$

(7) $\frac{d}{dx} \log |x + \sqrt{A + x^2}| = \frac{1}{\sqrt{A + x^2}}$

問題 1.2 次の関数を微分せよ, $f(x), g(x)$ は微分可能とする.

$$(1) f(x)^{g(x)} \quad (2) \arcsin(\cos x)) \quad (3) \arctan\left(\frac{\tan x + a}{1 - a \tan x}\right)$$

$$(4) \log(\tan x) \quad (5) f(f(f(x))) \quad (6) \arcsin \sqrt{1 - f^2(x)}$$

問題 1.3 次の関数を微分せよ。

(1) $\sin^{-1} x \cos^{-1} x$

(2) $\sin^{-1} \sqrt{1 - x^2}$

(3) $\tan^{-1} \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{5}x}{x^2 - 1}$

(4) $\mathrm{Arcsec} x$

2 高階導関数

定義 2 $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = f^{(1)}(x)$ とし一般に

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x)$$

と定義する。

$$C^n(I) = \{\text{ 区間 } I \text{ で } f^{(n)}(x) \text{ が連続である } f \text{ の全体 }\}$$

とし　n 回連続微分可能な関数という。特に　$C^0(I)$ は連続関数の全体を示す。

定理 4 高階微分の基本公式

(1) $\frac{d^n}{dx^n}\sin ax = a^n \sin(ax + \frac{n\pi}{2})$ *(2)* $\frac{d}{dx}\cos ax = a^n \cos(ax + \frac{n\pi}{2})$

(3) $\frac{d^n}{dx^n}e^{ax} = a^n e^{ax}$ *(4)* $\frac{d^n}{dx^n}\log x = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$

定理 5 *Leibnitz* の定理

$\frac{d^n}{dx^n}f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$

問題 2.1 次の関数の n 階導関数を求めよ。

(1) $(1-x^2)^{-1}$ *(2)* $\frac{ax+b}{cx+d}$

(3) $\sin^2 x$ *(4)* $x^3 \sin x$

(5) $e^x \log(1+x)$ *(6)* $\sin^{-1} x$

問題 2.2 次の関数の n 階導関数を求めよ。

$$(1)\sin^3 x, \qquad (2)\frac{1}{(x+a)(x+b)}\ (a \neq b), \qquad (3)e^{ax}\sin bx$$

問題 2.3 次式で定義される $H_n(x)$ をエルミート多項式という. H_n は n 次多項式で, n 個の実根を持つことを示せ.

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2/2}$$

問題 2.4 次式で定義される $P_n(x)$ をルジャンドル多項式という. P_n は n 次多項式で, $(-1,1)$ の間に n 個の根を持つことを示せ.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

問題 2.5 次式で定義される $f(x)$ は $C^\infty(R)$ であることを示せ.

$$f(x) = \begin{cases} \exp[-1/x] & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

3 凸関数

定義 3 $f(x)$ が凸関数であるとは

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$$

が $\lambda \in [0,1]]$ で成り立つこと。

定理 6 $f \in C^2(I)$ ならば $f(x)$ が凸関数である必要十分条件は

$$f''(x) \geq 0$$

問題 3.1 上の定理を証明せよ.

問題 3.2 $f(x)$ が　凸関数ならば, $\lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1$ である任意の正数と、f の定義域の x_i に対して

$$f(\sum_i \lambda_i x_i) \leq \sum \lambda_i f(x_i)$$

が成り立つことを示せ.

問題 3.3 $f \in C^0(I)$ ならば $f(x)$ が凸関数である必要十分条件は

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

であることを示せ.

問題 3.4 次の不等式を証明せよ.

1. $a_i \geq 0$ とのとき $\quad (a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n}(\sum a_i)$, (相加相乗不等式)
2. $\mu_i \geq 0, \sum \mu_i = 1$ のとき $\qquad \exp(\sum \mu_i x_i) \leq \sum e^{x_i}\mu_i$, (ヤンセン不等式)

問題 3.5 $f(x)$ が $I=[a,b]$ で $f''(x)>0,\ f(a)f(c)<0$ ならば, $x_0 \in (a,b)$ からはじめ、帰納的に

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

とすれば, x_n は単調に $f(x)$ の 区間 I における唯一の零点 $c \in (a,b)$ に収束する。(Newton 法)

4　平均値の定理, コーシー型の平均値の定理, テイラーの公式

定理 7 $f(x)$ は $[a,b]$ で連続, (a,b) で微分可能とすれば, ある $\xi \in (a,b)$ があって

$$\frac{f(a)-f(b)}{b-a} = f'(\xi)$$

となる。

証明

$$F(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right]$$

とすれば, $F(a)=F(b)=0$. これにいわゆるロルの定理「$F(x)$ が微分可能で, $F(a)=F(b)$ ならば, $a<\xi<b$ なる ξ があって $F'(\xi)=0$ が成立する」を用いて $F'(\xi)=0$. Q.E.D

定理 8 $f(x), g(x)$ はともに $[a,b]$ で連続, (a,b) で微分可能, かつ $f'(x)$ と $g'(x)$ は同時に 0 にならないとすれば, ある $\xi \in (a,b)$ があって

$$\frac{f(a)-f(b)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

となる。

証明

$$F(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)) + f(a)\right]$$

とすれば, $F(a)=F(b)=0$. これにいわゆる　ロルの定理 $F'(\xi)=0$ を用いる. Q.E.D

　ある関数を多項式で近似することは以下の例から見るように可能である. (ただし微分, 積分の操作と $\lim_{n\to\infty}$ が交換出来るとして (これは実は今の場合正しい))

$$
\begin{aligned}
e^x &= \lim(1+\frac{x}{n})^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\prod_{s=1}^{k-1}(1-\frac{s}{n}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \\
\frac{1}{1-x} &= \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=0}^{n}x^k) \\
\frac{1}{(1-x)^2} &= (\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}x^k)' = \sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} \\
\log(1-x) &= -\int\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=0}^{n}x^k)dx = -\sum_{n=1}^{\infty}x^n/n
\end{aligned}
$$

これは以下のように平均値の定理の拡張として証明される.

定理 9 $f(x)$ は $I=(a,b)$ で n 回連続可能, $[a,b]$ で連続とする。任意の $a<x<b$ に対し、ある $a<\xi<x$ があって

$$
f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}+\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-a)^n
$$

となる。$R_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-a)^n$ を *Langrange* の剰余項という。これは

$$
R_n=\frac{(1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!}f^{(n)}(a+\theta(x-a))(x-a)^n
$$

とも書け, ロシュの剰余項という。ここで $\xi=a+\theta(x-a)$ とおいた。

証明 これにはいくつかの証明があるが代表的なものあげるが, このくらいは全て覚えるて頂きたい. それぞれに長所があるので.

(1) 平均値の定理の拡張

$$
\phi(t)=f(x)-\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}f^{(k)}(t)(x-t)^k+\frac{A}{n!}(x-t)^n\right]
$$

とおく。当然 $\phi(x)=0$. さらに A を

$$
A=\frac{n!}{(x-a)^n}\left\{f(x)-\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k\right]\right\}
$$

と選んでおけば, $\phi(x)=\phi(a)=0$. よってある ξ で $\phi'(\xi)=0$. しかし直ぐわかるように,

$$
\phi'(t)=\frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}-\frac{A}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}
$$

なので, $A=f^{(n-1)}(\xi)$. これは求めるもの。

(2) コーシーの平均値の繰り返し

$$
F(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k, G(x)=(n!)^{-1}(x-a)^n
$$

とすると $F^{(k)}(a)=G^{(k)}(a)=0$, $k=0,1,\cdots,n-1$, 故に

$$
\frac{F(x)}{G(x)}=\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}=\frac{F'(\xi_1)-F'(a)}{G'(\xi_1)-G'(a)}=\frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)}=\cdots=\frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)}=f^{(n)}(\xi_n)
$$

よって $F(x)=G(x)f^{(n)}(\xi_n)$, ($\xi=\xi_n$ とおく).

(3) 部分積分法の繰り返し

$$
\begin{aligned}
f(x)-f(a) &= \int_a^x f'(t)dt = -\int_a^x (x-t)'f'(t)dt = -[(x-t)f'(t)]_a^x + \int_a^x (x-t)f''(t)dt \\
&= (x-a)f'(a) - \int_a^x \left[\frac{1}{2}(x-t)^2\right]' f''(t)dt \\
&= (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) - \int_a^x \left[\frac{1}{3!}(x-t)^3\right]' f'''(t)dt
\end{aligned}
$$

この方法での n 次剰余項は

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt$$

であり, 積分型剰余項 と呼ばれる。

定義 4 $x \to a$ のとき, $g_{i+1}(x) = o(g_i(x))$ であるとする. 関数 $f(x)$ の $\{g_0(x), g_1(x), \cdots\}$ による展開が $x = a$ で漸近展開であるとは、

$$f(x) = g_0(x) + g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_n(x) + o(g_n(x))$$

となること。

定理 10 関数 $f(x)$ が $\{1, x-a, (x-a)^2, \cdots\}$ による二つの漸近展開

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n) \\
&= b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots + b_n(x-a)^n + o((x-a)^n)
\end{aligned}
$$

をもてば, $a_k = b_k$, $k = 0, 1, \cdots, n$.

定理 11 テーラー展開は $\{1, x-a, (x-a)^2, \cdots\}$ による漸近展開である。

以下の展開は大変使用頻度が高いのぜひ覚えておいてください。($\sin, \cos$ は其々奇関数, 遇関数なので剰余項をおのおの R_{2n+1}, R_{2n} になるようにすると $\cos(\xi) \sim 1$ を含み便利.)

問題 4.1 次の展開が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
\cos x &= 1 - x^2/2 + x^4/4! + \cdots + \frac{(-1)^n \cos\xi}{(2n)!}x^{2n} \\
\sin x &= x - x^3/6 + x^5/5! + \cdots + \frac{(-1)^n \cos\xi}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \\
e^x &= 1 + x + x^2/2 + \cdots + \frac{e^\xi}{n!}x^n \\
\log(1+x) &= x - x^2/2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\xi)^n}x^n, \\
(1+x)^p &= 1 + px + p(p-1)x^2/2 + \cdots + \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}(1+\xi)^{p-n}x^n
\end{aligned}
$$

問題 4.2 *(1)* $f(x)$, $g(x)$ が連続でかつ, $0 \leq g(x)$ のとき,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

となる $a < c < b$ が存在することを示せ（積分の平均値の定理という*)*.
(2) 積分型剰余項に積分の平均値の定理を応用し, *Lagrange* 型剰余項と ロシュ型剰余項 を導け。

問題 4.3 $z/(e^z - 1)$ は原点の近傍で z の整級数に展開される*:*

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{z^n}{n!}$$

b_n は以下の性質をもつ.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} b_k = 0$$

また

$$b_0 = 1, b_1 = -1/2, b_{2n+1} = 0$$

問題 4.4 上の b_n に対し, $B_n = (-1)^{n-1} b_n$ をベルヌーイ数という. 以下の展開を示せ.

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)B_n x^{2n-1}}{(2n)!}$$

これを用いて, $\log\cos x$ のマクローリン展開を与えよ.

問題 4.5 *(1)* $\mathrm{Tan}^{-1} x = \arctan x$ に対するマクローリン展開を剰余項も含め記述せよ.
(2) $\pi/4 = 4\arctan(1/5) - \arctan(1/239)$ を証明せよ *(*マチンの公式）.
(3) 円周率を小数点 以下 *4* 桁まで求めよ.

5 リーマン積分

積分の語源は「分けて積む」ことで体積や面積を求めることにあり、古代では円の面積、放物線の面積, 球のの表面積や体積に古代の天才が知恵を絞ったわけである。円の面積は小学校で習うが球の表面積や体積は　Archimedes の発見である。現在では Newton, Leibnitz によって積分法が発明され, 普通の人は天才でなくても理解できることになった。

定義 5 *Riemann* 和とは分割 $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, 代表点 $\{\xi\} = \{\xi; x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}\}$ に対して

$$S(\Delta, \{\xi\}) = \sum (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i)$$

をいう。$I_i = [x_i, x_{i+1}]$ とし, $M_i = \max_{\zeta \in I_i} f(\zeta)$, $m_i = \min_{\zeta \in I_i} f(\zeta)$ とし

$$S_{max}(\Delta) = \sum (x_{i+1} - x_i) M_i, S_{min}(\Delta) = \sum (x_{i+1} - x_i) m_i$$

を過剰和, 不足和という。

補題 12 *(1)* $S_{min}(\Delta) \le S_{max}(\Delta)$
(2) $I = [a,b]$ の任意の二つの分割 Δ, Δ' に対して *(*$\Delta \cup \Delta'$ は二つの分割の合成*)*

$$S_{min}(\Delta) \le S_{min}(\Delta \cup \Delta') \le S_{max}(\Delta \cup \Delta') \le S_{max}(\Delta')$$

(3) すべての分割にわたって過剰和、不足和のつくる集合を考え $\Sigma_U = \{S_{max}(\Delta)\}$, $\Sigma_L = \{S_{min}(\Delta)\}$ とすれば　$\Sigma_L \le \Sigma_U$ である.

定義 6 上記の 過剰和、不足和の全体の作る集合 $\Sigma_U = \{S_{max}(\Delta)\}$, $\Sigma_L = \{S_{min}(\Delta)\}$　を用いて,

$$\bar{\int_a^b} f(x)dx = \inf \Sigma_U$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup \Sigma_L$$

を各々上積分, 下積分という。二つが一致するとき積分可能という。

定理 13 *(1)* $I = [a,b]$ を有界閉区間（コンパクト）とすれば, $f(x)$ が *(1)* 単調であるか, *(2)* 連続であれば積分可能である。
(2) $f(x)$ が連続ならば

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

が成り立つ（解析学の基本定理）.

問題 5.1　積分の定義から以下の和を求めよ。ここで lim は $\lim_{n\to\infty}$ を表す

$$(1) \qquad \lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}$$

$$(2) \qquad \lim \frac{1}{n}\exp\left[\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\log(n+k)\right]$$

5.1 積分の技巧

まず大学初年で学習する基本事項

1. sin, cos, e^x の微積分
2. 置換積分
$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(g)dg$$
3. 部分積分
$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

などは既習としておく. そのほか大学初年度で初めてでてくる積分は, 逆三角関数に関連してる。

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2+a^2} &= \frac{1}{a}\mathrm{Tan}^{-1}(x/a) \\
\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \mathrm{Sin}^{-1}(x/a) \\
\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} &= \log(x+\sqrt{a^2+x^2}) \\
I &= \int \sqrt{a^2+x^2}dx = x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}} \\
&= x\sqrt{a^2+x^2} - I + a^2\log(x+\sqrt{x^2+a^2}) \\
I &= (1/2)(x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\log(x+\sqrt{x^2+a^2})
\end{aligned}
$$

などなど.

5.1.1 ライプニッツの定理と応用

x の有理関数 (分数関数) は必ず有理関数, $\tan^{-1}$, $\log$ で表される。これをライプニッツ (17 世紀, フランス) の定理という。以下これを示す.
$P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ は $\{\alpha_i\}$, $\{\beta_i\}$ を実解, 虚数解として以下の形に因数分解される（代数学の基本定理）：

$$
P(x)=\prod_{i=1}^{\ell}(x-\alpha_i)^{p_i}\prod_{j=1}^{m}(x^2-2\mathrm{Re}\beta_j x+|\beta_j|^2)^{q_i}
$$

(p_i, q_j は重複度). ここで

$$
\frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{x-\alpha}-\frac{1}{x-\beta}\right)
$$

を繰り返し用いると

$$
\frac{1}{P(x)}=\sum_i\left(\sum_{k=1}^{p_i}\frac{C_i^{(k)}}{(x-\alpha_i)^k}\right)+\sum_j\left(\sum_{k=1}^{q_j}\frac{A_j^{(k)}x+B_j^{(k)}}{(x^2-2\mathrm{Re}\beta_j x+|\beta_j|^2)^k}\right)
$$

(A,B,C は実数)。この分解は $Q(x)/P(x)$ についても（Q の次数を P の次数より小さいとして) 成り立つ。この A,B,C を求めるには, 分母を払って恒等式を要求するか, x にうまい値を代入して手早く連立方程式を得るかして求める.　たとえば

$$
\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}
$$

で (x をかけ) $x\to\infty$ として, $A+C=0$, $x=0$ として $B+D=1$, $x=i$ として, $(A-C)-i(B-D)=\sqrt{2}$ で, $B=D=1/2$, $A=-C=2\sqrt{2}$ とすぐ求まる。分母を払うと手間がかかる。しかしいつもこの方法が有効とは限らない。

この $Q(x)/P(x)$ の右辺の積分は有理関数, log, $\tan^{-1}$ で収まる (Leibnitz の定理):

$$\begin{aligned}
\int \frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^n}dx &= \int \frac{(A/2)(2x+2p)+(B-pA)}{(x^2+2px+q)^n}dx \\
&= \frac{A}{2(-n+1)}(x^2+2px+q)^{-n+1}+(B-pA)\int \frac{1}{(x^2+2px+q)^n}dx \\
I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx &= \frac{x}{(x^2+a^2)^n}+\int \frac{2nx^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx \\
&= \frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nI_n-2na^2I_{n+1}
\end{aligned}$$

以下 $R(X,Y)$ は X,Y の有理関数とすると, 以下のものはすべて有理関数に帰着して初等関数の組み合わせで解けることになる。

(1) $\displaystyle\int R(\cos x,\sin x)dx,\quad \tan(x/2)=t$ と置換すると t の有理関数

(2) $\displaystyle\int R(x,\sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)},\quad \sqrt[n]{(ax+b)/(cx+d)}=t$ と置換すると t の有理関数

(3) $\displaystyle\int R(x,\sqrt{ax^x+bx+c}),\quad a>0$ ならば$\sqrt{ax^x+bx+c}=t-\sqrt{a}x$ と置換すると t の有理関数

3 番目は実は a,b,c の符号, 大小によって色々だが, $\sqrt{x^2+a^2}\to x=a\tan\theta$, $\sqrt{x^2-a^2}\to x=a\sec\theta$, $\sqrt{a^2-x^2}\to x=a\sin\theta$ によって一旦 $\sin,\cos$ の有理関数に直してから, $t=\tan(\theta/2)$ という置換をすれば覚えることが少なくて済むが, 後の処理が大変かも知れない。例えば

$$I=\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\log(x+\sqrt{1+x^2})$$

では $\sqrt{1+x^2}=t-x$ という置換が標準。他方 $x=\tan\theta$, $dx=(\cos^2\theta)^{-1}d\theta$ とすれば

$$I=\int\frac{d\theta}{\cos\theta}=\int\frac{d\theta}{\sin(\theta+\pi/2)}=\int\frac{d\theta/2}{\cos^2(\theta/2+\pi/4)\tan(\theta/2+\pi/4)}=\log\tan(\theta/2+\pi/4)$$

さらに

$$\tan(\theta/2+\pi/4)=\frac{1+\tan(\theta/2)}{1-\tan(\theta/2)}=\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}=x+\sqrt{1+x^2}$$

5.1.2 オイラーの積分

例 5.1

$$I(a)=\int_0^\pi\log(1+a^2+2a\cos x)dx=\max\{0,\pi\log(a^2)\}$$

通常の計算なら $|a|>1$ のとき（それ以外では発散)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{da}I(a) &= 2\int_0^\pi\frac{a+\cos x}{1+a^2+2a\cos x}dx=\pi\left[\frac{1}{a}+(a-a^{-1})\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+a^2+2a\cos x}\frac{dx}{2\pi}\right] \\
&= 2\pi\left[\frac{1}{a}+(a-a^{-1})\frac{1}{a^2-1}\right]=\pi\left[\frac{1}{a}+\frac{a^2-1}{a}\frac{1}{a^2-1}\right]=\frac{2\pi}{a}
\end{aligned}$$

よって, $I(a)=\pi\log(a^2)+C$. $C=0$ は直ぐわかり $I(a)=\pi\log a^2$.

色々な証明がある。 $I(a)=I(-a)$ と $2\cos^2\theta=1+\cos 2\theta$ から得られる

$$\begin{aligned} I(a) &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \log((1+a^2)-4a^2\cos^2 x)dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi \log(1+a^4-2a^2\cos 2x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \log(1+a^4-2a^2\cos x)dx = \frac{1}{2}I(a^2) \end{aligned}$$

すなわち $I(a) = \frac{1}{2}I(a^2) = \cdots = \frac{1}{2^n}I(a^{2^n})$ から従うのである。実際 $|a|<1$ ならば $\lim_{n\to\infty}a^n=0$ で $I(0)=0$ であり, $|a|>1$ ならば

$$2^{-n}\log(1+a^{2\times 2^n}+2a^{2^n}\cos x) \to 2^{-n}\log(a^{2\times 2^n}) = \log(a^2)$$

別の有名な方法としては, 代数学の基本定理から

$$|x^n-1| = \prod_{i=0}^{n-1}\left|x+\exp[\frac{2\pi ik}{n}]\right| = \exp\left[\sum \log\left(1+x^2+2x\cos(2\pi k/n)\right)\right]$$

より

$$\lim_{n\to\infty}|x^n-1|^{1/n} = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log(1+x^2-2x\cos\theta)d\theta\right]$$

がある。左辺は、$|x|<1$ で 1, $|x|>1$ で $|x|$ なので同じ結論になる。(学生はこれをチェック)。

なおここで $a\to -1$ とすれば,

$$\int_0^{\pi/2}\log\sin x dx = -\frac{\pi\log 2}{2}$$

も得られるが, これば部分積分でも得られる。歴史的にはオイラーが最初に求めたといわれる.

問題 5.2 これを用いて

$$\int_0^\pi \frac{1}{1+a\cos x}dx = \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

を逆に示せ。

5.1.3 幾つかの技巧：フビニの定理

2 重積分で x と y の順序を変えることに関する定理を Fubini の定理という. すなわち

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$$

が可能かという内容の定理である.

ここではいつ交換可能かは議論しないが, $f(x,y)$ が与えられた閉有界領域（コンパクトという）で連続（したがって一様連続）であることは十分条件である. 実際一様連続ならば,

$$|f(x,y)-f(x',y')|<\varepsilon$$

が $|(x,y)-(x',y')|\le\delta$ である全ての (領域内の) 点に対して成立するから.

例 5.2 以下の事実を「フルラーニの定理」という。すなわち
$f(x)$ が $[0,\infty)$ で連続で, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ が存在するとする。もし広義積分

$$\int_0^\infty f'(\alpha x)dx$$

が $a <\leq \alpha \leq b$ で存在すれば

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = [f(\infty)-f(0)]\log(b/a)$$

である. 証明は授業で触れるとおもうが例として

$$\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\log x} = \int_0^1 \left(\int_a^b x^y dy\right)dx = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y dx\right)dy = \int_a^b \frac{1}{1+y}dy = \log\frac{1+b}{1+a}$$

例 5.3

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \left[\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2-y^2}dxdy\right]^{1/2} = \left(\pi\int_0^\infty e^{-r^2}2rdr\right)^{1/2} = \pi^{1/2}$$

ここでは極座標にして, $dxdy \to rdrd\theta$ にして, r 積分と θ 積分で順番によらないことを使った. この関数 $\exp[-x^2-y^2]$ は全ての領域で一様連続である.

例 5.4

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{R\to\infty}[\int_0^\infty \int_0^R e^{-xt}\sin x dtdx] = \lim_{R\to\infty}[\int_0^R \int_0^\infty e^{-xt}\sin x dxdt]$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{1}{1+t^2}dt = [\tan^{-1}]_0^\infty = \pi/2$$

この計算では, $\exp[-xt]\sin x$ は全ての領域で一様連続であるを使っている. この計算過程では

$$\int_0^R e^{-xt}\sin x dx = \left[-\frac{\cos x + t\sin x}{1+t^2}e^{-xt}\right]_0^R = \frac{1}{1+t^2} - O(1)e^{-Rt}$$

を使った

6 級数とその収束

テイラー展開

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k = f(x) - R_{n+1}(x)$$

において,

定理 14 もし $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ ならば

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k = f(x)$$

以下級数 $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ について論じよう.

定義 7 $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とする．$\lim s_n = s$ のとき無限級数 $\sum a_n$ は s に収束するといい

$$\sum_{k=1}^n a_k = s$$

とあらわす．

以下の定理は明らかである．

定理 15 *(1)* $\sum a_n$ が収束する必要十分条件は

$$\lim_{p,q\to\infty} a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_q = 0$$

が成り立つこと．
(2) $\sum a_n$ が収束する必要条件は $\qquad \lim a_n = 0$

定理 16 *(1)* $\sum |a_n|$ が収束すれば, $\sum a_n$ は収束する．
(2) $a_n \geq b_n \geq 0$ とする．$\sum b_n$ が発散すれば $\sum a_n$ は発散し, $\sum a_n$ が収束すれば $\sum b_n$ は収束する．

定義 8 $\sum_{k=1}^\infty |a_k|$ が収束する級数を絶対収束級数という．$\sum a_n$ は収束するが $\sum_{k=1}^\infty |a_k|$ が発散する級数を条件収束するという．

定理 17 条件収束級数は加える順番を変えて, 任意の数に収束させることができる．

問題 6.1 上の定理を証明せよ．

問題 6.2 次の級数は収束するか, 発散するか論ぜよ．また条件収束か否かも論じること．
(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ *(2)* $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\log^p(n+1)}$, $p > 0$ *(3)* $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$
(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} f(n)$, ただし $f(x) > 0$ は単調減少で, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$
(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{a_n}$, ただし a_n は n 番目の素数 *($a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, \cdots$)*

問題 6.3 $a_n > 0$ かつ $\sum a_n$ は発散するという．以下の級数は発散するか収束するか判定せよ．

$$(1) \sum \frac{a_n}{1+a_n} \qquad (2) \sum \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$$

問題 6.4 $a_n > 0$ かつ $\sum a_n$ は発散するという．以下の級数は発散する場合も, 収束する場合もある．それらの例を各々つくれ．

$$(1) \sum \frac{a_n}{1+a_n^2} \qquad (2) \sum \frac{a_n}{1+na_n} \qquad (2) \sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$$

問題 6.5 次のことを示せ．
(1) $a_n > 0$, a_n は単調減少, で $\sum a_n$ が収束すれば, $\lim na_n = 0$
(2) $\sum na_n$ が収束すれば, $\sum a_n$ は収束する．

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ において以下の何れかの極限 (左から「ダランベールの判定法」,「コーシーの判定法」) が存在するとせよ.

$$p_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, \quad p_2 = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n},$$

もし両者とも存在すれば, $p_1 = p_2$ である. 存在するほうの値を p とすれば,

$$\rho = \frac{1}{p}$$

を収束半径という. これらの極限は存在するとは限らないが簡便な方法を与える. より一般には

$$p = \lim_{n\to\infty} \sup\{|a_k|^{1/k}; k > n\}$$

とし (「コーシー・アダマールの判定法」), $\rho = 1/p$ を収束半径という.

問題 6.6 p_1, p_2, p が存在すれば全て等しいことを示せ

定理 18 $|x| < \rho$ ならば $\sum a_n x^n$ は絶対収束し. $|x| > \rho$ ならば $\sum a_n x^n$ は発散する. さらに $|x| < \rho$ ならば $\sum a_n n x^{n-1}$ も絶対収束する.

定理 19 ρ を収束半径とする. $|x| < \rho$ のとき

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum \frac{d}{dx} a_n x^n = \sum a_n n x^{n-1}$$

問題 6.7 上の 2 定理を証明せよ

問題 6.8 以下の級数の収束半径を求めよ.

$$(1) \sum \frac{1}{\sqrt{n!}} x^n \qquad (2) \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n \qquad (3) \sum \left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right) x^n$$

$$(4) \sum n! x^{n!} \qquad (5) \sum \log(n!) x^n \qquad (6) \sum (n!)^{a/n} x^n \quad (a > 0)$$

問題 6.9

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2 + R_n, R_n = O(1/n)$$

を示し, 奇数分母を順に p 項づつ, 偶数分母を順に q 項づつ, 交互に順に加えた

$$1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p-1} - \left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2q}\right) + \left(\frac{1}{2p+1} + \cdots + \frac{1}{4p-1}\right) - \cdots$$

の和を求めよ

問題 6.10 $a_n > 0$ は単調に減少し, 0 に収束するならば以下の級数は $0 < x < 2\pi$ で収束することを示せ.

$$(1) \sum a_n \cos nx \qquad (2) \sum a_n \sin nx$$

問題 6.11 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx + n}{n^2}$$

はすべての x で収束するがすべての x で絶対収束しないことを示せ.

7 【レポート問題 】

問題 7.1 $f(x)$ は $f^{(n-1)}(x)$ が $[a,b]$ で連続, (a,b) で微分可能とすれば, $x \in (a,b)$ のとき

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}+\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-a)^n$$

となる $\xi \in (a,b)$ が存在することを示せ.

問題 7.2 次の関数のマクローリン展開を *4* 次まで示せ、剰余項は不要である。

(1) $\log(\cos x)$ *(2)* $\tan x$

(3) $e^x\sqrt{1-x}$ *(4)* $e^{x\sin x}$

問題 7.3 次の関数のマクローリン展開を示せ、剰余項の形も述べよ。

(1) $\log(x+\sqrt{1+x^2})$ *(2)* $\log(1+x+x^2)$

(3) $\arcsin x$ *(4)* $\sin^2 x$

(5) $\cosh x$ *(6)* $\arctan x$

問題 7.4 以下の定積分を求めよ

$$(1) \int_0^\pi \frac{dx}{1+a\cos x} \qquad (2) \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$$

問題 7.5

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2 + R_n, R_n = O(1/n)$$

を示し, 奇数分母を順に p 項づつ, 偶数分母を順に q 項づつ, 交互に順に加えた

$$1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2p-1}-\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2q}\right)+\left(\frac{1}{2p+1}+\cdots+\frac{1}{4p-1}\right)-\cdots$$

の和を求めよ

問題 7.6 $I=[0,1]$ を $0<r<1$ として $\Delta(r)=\{r^n, r^{n-1}, \cdots, r^1=r, r^0=1\}$ と分割する、ただし n は r の関数で, $\lim_{r\to 1} r^n = 0$ を満たすものとする。(たとえば $n=(1-r)^{-2}$ とすれば $r=1-1/\sqrt{n}$ なので $r^n \to 0$。) このときリーマン和 $S_r = \sum_{k=0}^n r^{pk}(r^k - r^{k+1})$ を求め, さらに極限 $\lim_{r\to 1} S(r)$ を求めよ.

問題 7.7 凸関数の性質を利用しヘルダー不等式

$$\sum |a_k b_k| \le \left(\sum |a_k|^p\right)^{1/p}\left(\sum |b_k|^q\right)^{1/q}$$

を示せ。$1<p<\infty$, $p^{-1}+q^{-1}=1$