2007 年度微分積分学 A 期末試験問題 (担当 伊東)

以下の【 問 1 】,【 問 2 】,【 問 3 】及び選択問題から 1 つ, 計 4 問を選んで答えよ。(配点 $25 \times 4 = 100$).

【 必須問題】

【 問 1 】) $f(x)$ は、 全空間 R で その n 次導関数が連続であるものとする． このとき

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + R_n, \quad R_n = O((x-a)^n)$$

と表せることを示せ. また剰余項 R_n の具体的な形について論じなさい.

【 問 2】 $f(x) = \log(\cos x)$ のマクローリン展開 ($x = 0$ の周りでのテイラー展開) を 6 次まで求めよ. 又その解法が【 問 1 】の定義に基づいていない場合には、そのようにしてもよい理由を述べよ.

【 問 3】 (1) $\dfrac{1}{1+x^4} = \dfrac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \dfrac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1}$ とする. $x = 0, x \to \infty, x = i$ として a, b, c, d に関する連立方程式

$$b + d = 1,\ a + c = 0,\ \frac{1}{2} = \frac{a - c - i(b-d)}{\sqrt{2}}$$

が得られることを示し, a, b, c, d を求めよ.

(2) 広義積分 $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4} dx$ を求めよ。

【 選択問題】

【問 4 】 (1) $\log(1+x)$ のテーラー展開を用いて数列 $a_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$ は $\log(2)$ に収束することを示せ。

(2) これを用いて奇数項について 3 項 づつまとめた

$$p_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{4} + \cdots$$

(n は右辺に現れる項の数) は如何なる値に収束するか決定せよ. 以下の変形をヒントにせよ.

$$p_4 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}, \quad p_8 = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}$$

【 問 5】 (1) $\mathrm{Tan}^{-1} x = \arctan x$ のマクローリン展開を剰余項 R_{n+1} の形も含めて与えよ。

(2) $\pi/4 = 4\arctan(1/5) - \arctan(1/239)$ が成り立つ（tan の倍角公式で右辺の tan が 1 になることが示せる)。これを用いて π の値を小数点以下 4 桁まで求めよ.