2009 年度微分積分学 A 定期試験問題 (担当 伊東)

以下から 4 問選び解答せよ。配点は $25 \times 4 = 100$ とする.

【問 1】 (1) $f(x), g(x)$ は $[a,b]$ で連続, (a,b) で微分可能, その微分係数は同時に 0 にならないとすれば,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる $a < c < b$ が存在する. このことを示せ.

(2) 以下のテーラー展開の定理を示せ ((1) は誘導であるが, いかなる証明法でもよろしい.):

「$f(x)$ は, 考えている開区間で n 次導関数が連続であるものとする. このとき

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + R_n, \quad R_n = \frac{f'(\xi)}{n!}(x-a)^n$$

となる ξ が x と a の間に存在する」

【問 2】 正の単調減少数列 a_n は $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\sum_{k=1}^{n} a_k \to \infty$ $(n \to \infty)$ を満たすという.

(1) このような数列の例をひとつあげて, その和の発散することを示せ.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k$ は収束することを示せ.

【問 3】 正項数列 a_n $(a_n > 0)$ に対して, $r_1 = \lim_{n\to\infty} a_n^{1/n}$, $r_2 = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$ とする.

(1) r_2 が存在すれば r_1 も存在し $r_1 = r_2$ であることを示せ.

(2) r_1 が存在しても, r_2 は存在するとは限らないことを示せ.

【問 4】 (1) $\log(1+x)$ のマクローリン展開 ($x=0$ の周りのテイラー展開) を剰余項 R_n の形を含めて求めよ。これを用いて数列 $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ は $\log(2)$ に収束することを示せ。

(2) これを用いて奇数項について 2 項 づつまとめた

$$p_n = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

(n は右辺に現れる項の数) は如何なる値に収束するか決定せよ. 以下の変形をヒントにせよ.

$$p_3 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}, \quad p_6 = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}$$

$$p_9 = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11},$$

【問 5】 以下の定積分から一つ選んで求めよ。

$$(1) \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + a\cos x} dx \quad (|a| < 1) \qquad (2) \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^3} dx$$