2013 年度微分積分学 A 期末試験問題

以下から 4 問選んで解答せよ, 配点は各 25 点とする。

【問 1】 次の各問いに答えよ.

1. 数列 $\{a_n\}$ がコーシー列であることの定義を述べよ.
2. 和 $S = \sum |a_n|$ は発散するが, $T = \sum a_n$ は収束する例をひとつあげ, それに対して, S の発散, T の収束を証明せよ.
3. 正項数列 $\{a_n\}$ は単調減少で $S_n = \sum_{k-1}^{n} a_k$ は収束するという。$b_n = a_n |\log a_n|$ で収束するものと発散するものを各々例示せよ ($0 \log 0 = 0$ とする)。

【問 2】 (1) 関数列 $\{f_n(x)\}$ が区間 $I = [a, b]$ で $f(x)$ に一様収束することの定義を述べよ.
(2) 関数列 $f_n(x)$ を次式で定める.

$$f_n(x) = \begin{cases} n \min\{|x|, |2/n - |x||\} & |x| < 2/n \\ 0 & |x| \geq 2/n \end{cases}$$

$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ を求め, $I = (-\infty, \infty)$ で $f_n(x)$ が $f(x)$ に一様収束するか否か答えよ.

【問 3】 $f(x)$ はある開区間 I で n 回連続微分可能とする. 区間 I に属する任意の a, x に対して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)(x-a)^n}{n!}$$

であるような, $a < \xi < x$ または $x < \xi < a$ が存在す. これを示せ.

【問 4】 (1) $0 \leq f''(x)$ がその区間内で成立するとき, 次不等式を示せ

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

(2) さらにこのとき, $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ として, 次不等式を証明せよ:

$$f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

(3) (2) を $f(x) = x^p$ $(p > 1)$ に応用し, $a_i, b_i > 0$ のとき, $x_i = a_i b_i^{-q/p}$, $\lambda_i \propto b_i^q$ とおいて 次不等式を示せ.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

【問 5】 次の二つの積分をせよ.

$$(1) \int_0^{\pi/4} \frac{1+\sin x}{\cos x} dx, \qquad (2) \int_{-1}^{1} \left[\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\right]^2 dx,$$