2008 年度微分積分学 B 期末試験問題 (担当 伊東)

以下の必須問題【 問 1 】,【 問 2 】,【 問 3 】と, 選択問題から 1 つ計 4 問に解答せよ. (配点 $25 \times 4 = 100$).

【 必須問題】

【 問 1 】 (1) 関数 $f(x)$ が閉区間 $I = [a, b]$ で一様連続であることの定義を述べよ.
(2) I の分割 $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ に対し, Riemann 和

$$S_\Delta(\xi) = \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

における過剰和 S_Δ と不足和 s_Δ の定義をのべよ. また一様連続ならば $\mathrm{mesh}(\Delta) \equiv \max\{|x_i - x_{i-1}|\} \to 0$ のとき, $S_\Delta - s_\Delta \to 0$ を示せ.

【 問 2 】 (1)$x_1 = r\sin\theta\cos\phi$, $x_2 = r\sin\theta\sin\phi$, $x_3 = r\cos\theta$ (ただし $0 \le r < +\infty$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \phi \le 2\pi$) のとき、Jacobian $J(r, \theta, \phi) = \partial(x_1, x_2, x_3)/\partial(r, \theta, \phi)$ を求めよ.
(2) また楕円体座標 $x_1 = ar\sin\theta\cos\phi$, $x_2 = br\sin\theta\sin\phi$, $x_3 = cr\cos\theta$ の時はどうか.

【 問 3】次の関数の極値を全て求めよ

$$f(x, y, z) = (ax^2 + by^2 + cz^2)\exp[-x^2 - y^2 - z^2]$$

ただし, $0 < a < b < c$.

計算を簡単にするヒント: $f_x = f_y = f_z = 0$ を満たす点では, f_{xx} の値などは f_{xx} の形を厳密に求めて代入する必要はない. 実際 $f_x = h(x, y, z)\exp[-x^2 - y^2 - z^2]$ とおけば, これらの点では, $h(x, y, z) = 0$ なので, その点での値は $f_{xx} = h_x \exp[-x^2 - y^2 - z^2]$ 　に等しい.

【 選択問題】

【 問 4】一様な密度を持つ, 原点中心, 半径 R の球体の作る重力ポテンシャル

$$\Phi(x) = \kappa \int_{|y| \le R} \frac{d^3y}{|x - y|}$$

を $|x| < R$ と $|x| > R$ の二つの場合に求めよ (答えが異なる). ここで κ は定数である.
ヒント: 回転対称性から, $x = (0, 0, x)$, $x > 0$ と出来る. 球座標で $y = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$ とすれば,

$$|x - y| = (r^2\sin^2\theta + (x - r\cos\theta)^2)^{1/2} = \sqrt{r^2 - 2xr\cos\theta + x^2}$$

d^3y の Jacobian は $\sin\theta$ を含み $d\theta$ 積分は置換積分になって $\sqrt{\cdots}$ が消え, 答えは簡単になる.

【問 5 】次の重積分を求めよ, ただし $D = \{(x, y, z); x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \le 1,\ 0 \le x,\ 0 \le y,\ 0 \le z\}$

$$\int\int\int_D xyz\,dxdydz$$