2010 年度後期微分積分学 B 期末試験問題　(担当 伊東)

【問 1】 次の 2 変数関数 $z = f(x, y)$ について極大、及び極小を (存在するならば) 求めよ. ただし $0 < a < b$ は共に 0 でない正数とし $\exp(x) = e^x$ である (25 点).

$$f(x, y) = (ax^2 + by^2)\exp[-x^2 - y^2]$$

【問 2】 次の多項式の指数を求めよ. また対応する実対称行列を書き下し, 固有値をもとめられる場合は求め, 一致することを示せ。

$$(1) \qquad (x - 2y)^2 + (2y - 3z)^2 + (3z - x)^2$$
$$(2) \qquad (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - w)^2 + (w - x)^2$$

【問 3】 $(x, \cdots, x_n)$ から $(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ に $\zeta_i = \sum_j A_{ij} x_j$ で変数変換する.

$$(1) \sum_i f_{x_i, x_i} = \sum_i f_{\zeta_i, \zeta_i}$$

が常に成り立つとき, A はいかなる行列か。このとき

$$(2) \sum_i (f_{x_i})^2 = \sum_i (f_{\zeta_i})^2,$$

も成立することを示せ.

【問 4】 一様な密度を持つ, 原点中心, 半径 R の球体の作る重力ポテンシャル

$$\Phi(x) = \kappa \int_{|y| \le R} \frac{d^3 y}{|x - y|}$$

を $|x| < R$ と $|x| > R$ の二つの場合に求めよ (答えが異なる). ここで κ は定数である.
<u>ヒント</u>: 回転対称性から, $x = (0, 0, \rho)$, $\rho > 0$ と出来る. (後に学習するように) 球座標で $y = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$ とすれば, $d^3 y$ は $r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$ となり

$$|x - y| = (r^2 \sin^2\theta + (\rho - r\cos\theta)^2)^{1/2} = \sqrt{r^2 - 2\rho r\cos\theta + \rho^2}$$

【問 5】 以下の関数に対し $(\Delta)f$ を求めよ. ただし (1) では 2 次元で, (2) では 3 次元で $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である.

$$(1) f = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \quad (2) f = \frac{e^{-mr}}{r}$$