2012 年度後期微分積分学 B 期末試験問題　(担当 伊東)

「必修問題 (1〜3)」

【問 1】 次の 2 変数関数 $z = f(x, y)$ について極大、及び極小を (存在するならば) 求めよ. ただし λ は ± 1 と異なる実数で, $\exp(x) = e^x$ である.

$$f(x, y) = (x^2 + 2\lambda xy + y^2)\exp[-x^2 - y^2]$$

【問 2】 $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ とし, G を $y = x$,$x = 0$,$y = 1$ で囲まれる領域とする.
(1) 上記の写像 $(x, y) \to (u, v)$ で写される G の像 G' を求めよ.
(2) 積分

$$\int_G \frac{x^4 - y^4 + 2xy(x^2 + y^2)}{(1 + x^2 - y^2)^{1/2}} dxdy$$

を求めよ.

【問 3】 4 次元究座標は

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta_1 \\ x_2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ x_3 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\phi \\ x_4 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\phi \end{aligned}$$

とおいて得られる. ただし $i = 1, 2$ では $0 \le \theta_i \le \pi$, $0 \le \phi \le 2\pi$ である。
(1)

$$dx_1 \cdots dx_4 = r^3 \sin^2\theta_1 \sin\theta_2 dr d\theta_1 d\theta_2 d\phi$$

であることを示せ。
(2) とくに 4 次元の単位球の体積はいくらか。

「一問選択」

【問 4】 長さが ℓ の棒の両端を, x 軸と y 軸の上において, 連続的に傾けるとき、棒の作る直線群の包絡線の方程式を求めよ。

【問 5】 $(x, \cdots, x_n)$ から $(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ に $\zeta_i = \sum_j A_{ij} x_j$ で変数変換する.

$$(1) \sum_i f_{x_i, x_i} = \sum_i f_{\zeta_i, \zeta_i}$$

が常に成り立つとき, A はいかなる行列か。このとき

$$(2) \sum_i (f_{x_i})^2 = \sum_i (f_{\zeta_i})^2,$$

も成立することを示せ.