2013 年度微分積分学 B 期末試験問題 (担当 伊東)

【 問 1 】 $0 < \rho$, $D = \{(x, y) | \, 0 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \leq \rho^2\}$ とする. 以下の積分を求めよ.

$$(1) \int_D ((x-1)^2 + (y-1)^2) dxdy, \quad (2) \int_D \frac{xy}{1+x^2+y^2} dxdy, \quad (3) \int_D \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) dxdy$$

【 問 2 】 4 次元極座標 (球座標) は

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta_1 \\ x_2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ x_3 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\phi \\ x_4 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\phi \end{aligned}$$

とおいて得られる. $(0 \leq \theta_i \leq \pi,\, 0 \leq \phi \leq 2\pi)$

(1) $dx_1 \cdots dx_4$ を極座標で表したとき, その Jacobi 行列とその行列式 (Jacobi 行列式) を求めよ.

(2) 原点が中心の 4 次元単位球を D とし, その全ての座標が正の部分を D_+ で表すとき, 積分

$$\int_{D_+} x_1^2 \, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$$

を求めよ.

【 問 3 】 領域 D を $\{(x, y); 0 \leq y, y \leq x, xy \leq 4\}$ とし, $u = x + y$, $v = xy$ とおく.　このとき

(1) u, v 空間での D の像 D' を求めよ。

(2) 積分　$\displaystyle\int_D \frac{|x-y|}{x^2+y^2+xy} dxdy$ を求めよ.

【 問 4 】 $f(x, y), g(x, y)$ は C^2 に属する実の関数, A をヤコビ行列 $A = \begin{pmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{pmatrix}$ とする. A が常に直交行列になったという.

(1) $f_x^2 = g_y^2$, $f_y^2 = g_x^2$ を示せ.

(2) f, g の 2 階偏導関数はすべて 0 になることを示せ.

(3) f, g の具体形を与えよ.

=====選択問題：以下の A, B のうち一つを選んで答えよ=====

【 A 】 $1 < \lambda$ とする. $f(x, y) = (x^2 + 2\lambda xy + y^2) \exp[-x^2 - y^2]$ の臨界点および 極値をすべて求めよ.

【 B 】 $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x + y)^2$ の臨界点および 極値をすべて求めよ.