

1 級数とその収束 [教科書 p.69]

級数 $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ について論じよう.

定義 1 数列 $\{a_n\}$ がコーシー列とは

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \rightarrow \forall m, n \geq n_0, |a_m - a_n| < \varepsilon$$

定義 2 $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とする. $\lim s_n = s$ のとき無限級数 $\sum a_n$ は s に収束するといいい
 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$ とあらわす.

定理 1 (1) $\sum a_n$ が収束する必要十分条件は

$$\lim_{p, q \rightarrow \infty} a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_q = 0$$

が成り立つこと.

(2) $\sum a_n$ が収束する必要条件は $\lim a_n = 0$

定理 2 (1) $\sum |a_n|$ が収束すれば, $\sum a_n$ は収束する.

(2) $a_n \geq b_n \geq 0$ とする. $\sum b_n$ が発散すれば $\sum a_n$ は発散し, $\sum a_n$ が収束すれば $\sum b_n$ は収束する.

定義 3 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ が収束する級数を絶対収束級数という. $\sum a_n$ は収束するが $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ が発散する級数を条件収束するといふ.

定理 3 条件収束級数は加える順番を変えて, 任意の数に収束させることができる.

問題 1.1 上の定理を証明せよ.

問題 1.2 次の級数は収束するか, 発散するか論ぜよ. また条件収束か否かも論じること.

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log^p(n+1)}, p > 0$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$
(4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} f(n)$, ただし $f(x) > 0$ は単調減少で, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$, ただし a_n は n 番目の素数 ($a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 5, \dots$)

以下の問題は黒田教科書 p.80 の 問 2.8.4, 2.8.5, 2.8.6 からである. 解答は最後にある.

問題 1.3 (黒田 p.80, 2.8.4) 以下を示せ:

$$\frac{1}{N} \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N-1}$$

問題 1.4 (黒田 p.80, 2.8.5) $a_n \geq 0, p \in \{1, 2, \dots\}$. とする $\sum a_n$ が収束すれば, $\sum a_n^p$ も収束することを示せ. $p > 1$ ならば逆は成立しないことを示せ

問題 1.5 (黒田 p.80, 2.8.6) $a_n > 0$ とする。 $\sum a_n$ の収束, 発散と以下の級数の収束, 発散の関連を調べよ。

$$(1) \sum \frac{a_n}{1+a_n} \quad (2) \sum \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$$

問題 1.6 $a_n > 0$ かつ $\sum a_n$ は発散するという。以下の級数は発散する場合も, 収束する場合もある。それらの例を各々つくれ。

$$(1) \sum \frac{a_n}{1+a_n^2} \quad (2) \sum \frac{a_n}{1+na_n} \quad (2) \sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$$

問題 1.7 次のことを示せ。

(1) $a_n > 0$, a_n は単調減少, で $\sum a_n$ が収束すれば, $\lim na_n = 0$

(2) $\sum na_n$ が収束すれば, $\sum a_n$ は収束する。

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ において以下の何れかの極限 (左から「ダランベールの判定法」, 「コーシーの判定法」) が存在するとせよ。

$$p_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}, \quad p_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n},$$

もし両者とも存在すれば, $p_1 = p_2$ である。存在するほうの値を p とすれば,

$$\rho = \frac{1}{p}$$

を収束半径という。これらの極限は存在するとは限らないが簡便な方法を与える。より一般には

$$p = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{|a_k|^{1/k}; k > n\}$$

とし (「コーシー・アダマールの判定法」), $\rho = 1/p$ を収束半径という。実数の公理系から $\limsup$ はいつも存在する (有界単調列の収束)。

問題 1.8 (黒田教科書 p.82 問 2.7) $a_n > 0$ ならば

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

が成立する。これを示せ。

注意:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

なので以下が分かる

(1) $\lim a_{n+1}/a_n = \alpha$ ならば $\lim a^{1/n} = \alpha$

(2) $\lim a^{1/n} = \alpha$ でも $\lim a_{n+1}/a_n$ は存在しない場合がある (例が作れる)

問題 1.9 p_1, p_2, p が存在すれば全て等しいことを示せ

定理 4 $|x| < \rho$ ならば $\sum a_n x^n$ は絶対収束し。 $|x| > \rho$ ならば $\sum a_n x^n$ は発散する。さらに $|x| < \rho$ ならば $\sum a_n n x^{n-1}$ も絶対収束する。

定理 5 ρ を収束半径とする. $|x| < \rho$ のとき

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

問題 1.10 上の 2 定理を証明せよ

問題 1.11 以下の級数の収束半径を求めよ.

$$(1) \sum \frac{1}{\sqrt{n!}} x^n \quad (2) \sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n \quad (3) \sum \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \right) x^n$$

$$(4) \sum n! x^{n!} \quad (5) \sum \log(n!) x^n \quad (6) \sum (n!)^{a/n} x^n \quad (a > 0)$$

問題 1.12

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2 + R_n, R_n = O(1/n)$$

を示し, 奇数分母を順に p 項づつ, 偶数分母を順に q 項づつ, 交互に順に加えた

$$1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p-1} - \left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2q} \right) + \left(\frac{1}{2p+1} + \cdots + \frac{1}{4p-1} \right) - \cdots$$

の和を求めよ

問題 1.13 $a_n > 0$ は単調に減少し, 0 に収束するならば以下の級数は $0 < x < 2\pi$ で収束すること
を示せ.

$$(1) \sum a_n \cos nx \quad (2) \sum a_n \sin nx$$

問題 1.14 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx + n}{n^2}$$

はすべての x で収束するがすべての x で絶対収束しないことを示せ.

2 連続関数, 一様連続性, 中間値の定理

定義 4 (1) 関数 $f(x)$ が $x = a$ 連続とは $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

(2) 関数 $f(x)$ が $I = [a, b]$ で連続とは $\forall x$ において $f(x)$ が連続なこと. すなわち

$$(\forall x \in I)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0), (\forall x' \in I)(|x - x'| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

(3) 関数 $f(x)$ が $I = [a, b]$ で一様連続とは

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x' \in I)(|x - x'| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon)$$

定理 6 $f(x)$ が区間 $I = [a, b]$ で連続で, $f(a)f(b) < 0$ ならば, ある $c \in I$ があって $f(c) = 0$

定義 5 $f(x)$ が区間 $I = [a, b]$ で定義されているとき, 振幅 $\omega_f(\delta)$ を次式で定義する.

$$\omega_f(\delta) = \sup_{|x-x'| < \delta} \sup_{x, x' \in I} |f(x) - f(x')|$$

定理 7 (1) $\lim \omega_f(\delta) = 0$ ならば一様連続である。
 (2) $f(x)$ が区間 $I = [a, b]$ で連続ならば実は一様連続である。

定義 6 関数 $f(x)$ が区間 I で

- (1) *Lipchitz* 連続 とは I の任意の x, y に対して $|f(x) - f(y)| < K|x - y|$,
 (2) *Hölder* 連続 とは I の任意の x, y に対して $|f(x) - f(y)| < K|x - y|^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$
 これらは勿論一様連続である。

問題 2.1 $f(x)$ は連続で周期 2π の関数ならばある $0 < \alpha < \pi$ があって $f(\alpha) = f(\alpha + \pi)$ となることを示せ。

問題 2.2 ある平面上の図形 Ω がある。正方形 $ABCD$ でこの Ω に 4 つの辺 AB, BC, CD, DA で内接するものが必ず存在することを示せ。

問題 2.3 実数上で定義された連続関数 $f(x)$ が,

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

を満たすならば, $f(x) = cx$, $c = f(1)$ となることを示せ。また連続でない場合にはこれ以外に如何なる解があるか例示せよ。

問題 2.4 ワイエルストラスの関数

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos b^k x, \quad 0 < a < 1, \quad 1 < ab$$

は連続であるが、いたるところ微分できない関数として知られている。一様連続の定義の δ を $\varepsilon > 0$ に応じて、出来るだけ正確に求めよ。(Hölder 連続の指数 α を求めることに対応。)

3 単射, 全射, 逆関数

定義 7 (1) 関数 $f(x)$ が 単射 (*injective*) であるとは, $x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$. 1 対 1 写像ともいう。(一変数ならば単調な関数)

(2) 関数 $f(x) : I \rightarrow J$ 全射 (上への写像, *surjective*) とは $f(I) = J$

(3) 関数 $f(x) : I \rightarrow J$ が全単射のとき, 1:1 かつ上への写像であるともいい, 逆写像が定義できる。これを $f^{-1}(x) : J \rightarrow I$ などと書く。

$$1. \sin x : I = [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow J = [-1, 1] \text{ より } \sin^{-1} : J = [-1, 1] \rightarrow I = [-\pi/2, \pi/2]$$

$$2. \tan x : I = (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow R = (-\infty, \infty) \text{ より } \tan^{-1} : R \rightarrow I = (-\pi/2, \pi/2)$$

$$3. e^x : I = R \rightarrow J = (0, \infty) \text{ より } \log x : J = (0, \infty) \rightarrow I = R$$

$$4. \arcsin(x) + \arccos x = \pi/2$$

$$5. \arctan(x) + \arctan(1/x) = \pm\pi/2 \text{ (+ for } x > 0, \text{ - for } x < 0)$$

問題 3.1 関数 $f : I \rightarrow J$ が 1:1 かつ上への写像であり, 連続であれば, f^{-1} も連続である。

$f(x) = y$ とする. よって $f^{-1}(y) = x$. 連続なので, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ があり, $\forall x' \in [x - \delta, x + \delta]$ に対して, $|y - y'| = |f(x) - f(x')| < \varepsilon$ とできる. $f(x)$ は単調なので, $|f(x) - f(x \pm \delta)|$ の小さいほうを ε' とおけば, この ε' にたいして, $\delta' = \max|f^{-1}(y) - f^{-1}(y \pm \varepsilon')|$ とればよい.

漸化式の収束についての補足

数列 x_n がある数 α に収束することを示すのはいろいろな方法がある. とくに漸化式 $x_{n+1} = f(x_n)$ で定まるときには, それは特性方程式 $\alpha = f(\alpha)$ を満たさなければならない.

(1) 漸化式 $x_n = f(x_{n-1})$ から一般項を求める.

(2) 特性方程式 $\alpha = f(\alpha)$ から α を求め,

$$|\alpha - x_n| = |\alpha - f(x_{n-1})| = |(\alpha - x_{n-1})g(x_{n-1})|$$

の形に変形し ($F(x) = \alpha - f(x)$ は $F(\alpha) = 0$ を満たす, 因数定理), 考えている条件下で $|g(x_{n-1})| < c < 1$ を証明する. これから $|x_n - \alpha| < c^{n-1}|x_1 - \alpha| \rightarrow 0$ が導かれる.

(3) 特性方程式 が解けないときなどは

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| < c|x_n - x_{n-1}|$$

$c < 1$ を示せば, x_n は Cauchy 列 になる. 実際 $|x_{n+1} - x_n| < c^{n-1}|x_2 - x_1|$ なので, $p > q$ で $q \rightarrow \infty$ のとき

$$|x_p - x_q| < \sum_{k=q}^{p-1} |x_{k+1} - x_k| < \frac{c^q}{1-c} |x_2 - x_1| \rightarrow 0$$

となる. 従って $\lim a_n = a$ が存在し, $a = f(a)$ を満たす. 漸化式 (レポ No.1)

$$1. a_n = (1 + a_{n-1})^{-1}, a_1 = 1$$

$$2. a_n = \sqrt{3 + a_{n-1}}, a_1 > 0$$

$$3. a_n = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}} \right), a > 0, a_1 > 0$$

では方法 (2) で収束が示せる. 特性根は順に (1) $\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, (2) $\alpha = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$ (3) $\alpha = \sqrt{a}$ である. 次の等式および不等式を見るのはやさしい:

$$(1) \quad |x_{n+1} - \alpha| = \left| \frac{\alpha(x_n - \alpha)}{1 + x_{n-1}} \right| \leq \alpha |x_n - \alpha|$$

$$(2) \quad |x_{n+1} - \alpha| = \left| \frac{(x_n - \alpha)}{\sqrt{x_n + 3} + \alpha} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{3} + \alpha} |x_n - \alpha|$$

$$(3) \quad |x_{n+1} - \alpha| = \left| \frac{(x_n - \alpha)^2}{2x_n} \right| \leq \frac{1}{2} |x_n - \alpha|$$

問題 3.2 次の数列でコーシー列になるものについては証明を, そうでないものについては反例をあげるか証明せよ. ただし (1), (2), (3) では $a_1 = 1$ とする (一部難, 特性根 α の近傍で $|f'(x)| > 1$ なら収束しない, つまりコーシー列にならない).

(1) $|a_{n+1} - a_n| < 2^{-n}$ を満たす数列.

(2) $|a_{n+1} - a_n| < 1/n$ を満たす数列.

(3) $a_{n+1} = f(a_n)$ で決まる数列, $f(x)$ は微分可能で $|f'(x)| < 1/2$ を満たすもの.

(4) $a_{n+1} = f(a_n)$ で決まる数列, $f(x)$ は微分可能で $|f'(x)| < 1$ を満たすもの.

(5) $a_{n+1} = 2a_n(1 - a_n)$ で決まる数列で, $a_1 = 1/3$.

(6) $a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n)$ で決まる数列で, $a_1 = 1/3$.

4 【講義 2 の問題のヒントと略解】

解答 1.1 $\{a_n\}$ を正と負に分けて, $\{b_n \geq 0\}$ と $\{c_n < 0\}$ にすれば, $\lim b_n = \lim c_n = 0$ でかつ, $\sum_{k=1}^n b_k \rightarrow \infty$, $\sum_{k=1}^n b_k \rightarrow -\infty$. そこで任意の M (正と仮定してよい) に対し $\sum_{k=1}^{n_1} b_k = A_1 > M$ となる, 最小の n_1 を選び, 次に $A_1 + \sum_{k=1}^{n_2} c_k = A_2 < M$ となる, 最小の n_2 を選ぶ. 以下同様にして, 部分数列の和を構成すればよい

解答 1.2 (1) 以下のように, $2^k + 1$ から 2^{k+1} までずつグループにする.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}\right)}_{2^k \text{ terms}} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \frac{\log_2(n)}{2}$$

(2)[積分による評価] $f(x) > 0$ が連続で単調減少ならば

$$\int_1^{N+1} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^N f(n) \leq \int_0^N f(x) dx$$

なので, 積分の収束と和の収束は同値である. ゆえに

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x \log^p(x)} dx = \int_1^{\log n} \frac{1}{x^p} dx$$

$p > 1$ で収束, $p \leq 1$ で発散.

(3) [ライプニッツの交代級数] $a_n = 1/n$ とすると, $a_n \geq 0$ は単調減少で, $\lim a_n = 0$. ゆえに $S_{2n} = \sum_{k=1}^n (a_{2k-1} - a_{2k})$ は単調増加, $S_{2n+1} = a_1 - \sum_{k=1}^n (a_{2k} - a_{2k+1})$ は単調減少. よって

$$a_1 > S_3 > \cdots > S_{2n-1} > S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \geq S_{2n} \geq \cdots \geq S_2$$

これから $\lim S_{2n} = \alpha$, $\lim S_{2n+1} = \beta$ が存在する. $a_n \rightarrow 0$ より $\alpha = \beta$.

(4) (3) で $a_n = f(n)$ とすればよい.

(5) [素数は結構無限にある] $\{a_n\} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ を素数全体とし, $(1 - 1/a)^{-1} = 1 + a^{-1} + a^{-2} + \cdots$ と素因数分解の一意性から

$$\frac{1}{\prod (1 - 1/a_n)} \equiv \frac{1}{(1 - 1/a_1)(1 - 1/a_2)(1 - 1/a_3) \cdots} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

右辺は発散です. 左辺は

$$\exp\left[-\sum \log(1 - 1/a_n)\right] = \exp\left[\sum (1/a_n + O(a_n^{-2}))\right]$$

で $\sum a_n^{-2}$ は収束. よって $\sum a_n^{-1} = \infty$. これは有名なオイラーによる計算.

解答 1.3

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

より, $n = N, N+1, \dots$ と加え

$$\frac{1}{N} \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N-1}$$

解答 1.4 $\sum a_n < \infty$ より, $\lim a_n = 0$. よってある $N_0 \in \mathbb{N}$ があって, $\forall n > N_0$ に対して $0 \leq a_n < 1$, よって $p \geq 1$ ならば $0 \leq a_n^p \leq a_n$. よって優級数法によって $\sum_n a_n^p$ は収束する. 逆は成立しない. $a_n = 1/n$ ならば $\sum a_n = \infty$ 他方 $\sum a_n^2 = \sum n^{-2} = \zeta(2) = \pi^2/6 < 2$

解答 1.5 (1) $\sum a_n$ が収束すれば $a_n/(1+a_n) \leq a_n$ から収束は明らか (優級数法). $\sum a_n = \infty$ とする. $a_n \leq 1, a_n \geq 1$ で分けて.

$$\frac{a_n}{1+a_n} \geq \min\left\{\frac{a_n}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

よって $a_n > 1$ なる n が無限個あれば $\sum 1/2 = \infty$, また有限個ならば $n > n_0$ で $a_n \leq 1$ としてよく, $\sum a_n/2 = \infty$. (2) 任意の $a_n \geq 0$ に対し収束する.

$$\frac{a_n}{1+n^2 a_n} \leq \frac{1}{n^2}$$

解答 1.6 (1) 発散例: $a_n = 1/n$, 収束例 $a_n = n^2$

(2) 発散例: $a_n = 1/n$, 収束例 $n = 2^k$ で $a_n = 1$, それ以外で $a_n = 0$

(3) 発散例: $a_n = 1/n$, 収束例 偶数の n で, $a_n = 1$, 奇数で $a_n = 0$

解答 1.7 (1) 収束するので $s_m = \sum_{k=1}^m a_k$ として

$$\lim |s_{2n} - s_{n-1}| = \lim \left| \sum_{k=n}^{2n} a_k \right| = 0, \text{ 右辺} \geq n a_n$$

(2) $\sum_{k=1}^n k a_k = s_n$ とすれば, $a_n = (s_n - s_{n-1})/n$ で

$$T_n \equiv \sum_{k=1}^n a_k = \frac{s_n}{n} - \frac{s_1}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) s_k$$

ここで s_n は収束し, ゆえに有界であり, $(k-1)^{-1} - k^{-1}$ は絶対収束する. ゆえに T_n はコーシー列

解答 1.8 $r = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n$ とすれば

$$r_n = \sup_{k > n} \left\{ \frac{a_{k+1}}{a_k} \right\}$$

は有界単調減少列で収束. よって $n > n_0$ ならば

$$r - \varepsilon < r_n < r + \varepsilon, \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < r_n$$

$n > n_0$ ならば

$$(a_n)^{1/n} = \left(A \prod_{k=n_0+1}^n \frac{a_k}{a_{k-1}} \right)^{1/n} \leq (A r_{n_0}^{n-n_0})^{1/n}, \quad A = a_{n_0}$$

$\limsup$ をとり

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{1/n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (A r_{n_0}^{n-n_0})^{1/n} = r_{n_0}$$

n_0 をさらに大きくとればよい. $\liminf$ も同じ.

解答 1.9 「ダランベールの判定法」, 「コーシーの判定法」, 「コーシー・アダマールの判定法」に対して

$$\{\lim |a_{n+1}/a_n| \text{ が存在} \} \subset \{\lim |a_n|^{1/n} \text{ が存在} \} \subset \{\limsup |a_n|^{1/n} \text{ が存在} \}$$

の関係がある. これは上記の議論から自明. しかし $a_n = \alpha^{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ では $\lim |a_n|^{1/n} = \alpha$, しかし $\lim |a_{n+1}/a_n| = \alpha^{1 \pm (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}$ は存在しないから, 逆の包含関係は存在しない. 以上の議論から, これらの極限が存在すれば, これらがすべて一致することは明らかである.

解答 1.10 (1) $|x| < \rho$ ならば $r < \rho$ があって $|x| < r$ なので, $\limsup |a_n|^{1/n} |x| < r/\rho < 1$. ゆえに $n > n_0$ であるすべての n に対して $|a_n x^n| < (r/\rho)^n$. よって絶対収束. また $r > \rho$ があって $|x| = r$ ならば $\limsup |a_n|^{1/n} |x| = r/\rho > 1$ なので無限に多くの n について $|a_n x^n| > 1$, よって発散.

(2) まず $\sum |a_n x^n|$, $\sum |a_n n x^{n-1}|$, $\sum |a_n n(n-1) x^{n-2}|$ は, $|x| < \rho$ で絶対収束するので, 級数の順番を入れ替えてよい. ゆえに h が十分小さく $|x|, |x + \theta h| < \rho$ ($0 < \theta < 1$) であるとしてよいから

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{h} \left(\sum a_n (x+h)^n - \sum a_n x^n \right) - \sum a_n n x^{n-1} \right| \\ &= \frac{1}{h} \left| \sum a_n [(x+h)^n - x^n - h n x^{n-1}] \right| \leq \frac{h}{2} \sum |a_n n(n-1) (x+\theta_n h)^{n-2}| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

解答 1.11 x^n の係数を a_n とする. 以下の計算では, $(n/2)^{n/2} < n! < n^n$ と, $1 < n^{1/n} \rightarrow 1$ を用いた. (この証明は簡単で学生に任す.)

(1) $r = \lim |a_n/a_{n-1}| = \lim n^{-1/2} = 0$, ゆえに $\rho = \infty$.

(2) $r = \lim |a_n/a_{n-1}| = \lim n^2/2n(2n-1) = 1/4$, ゆえに $\rho = 4$.

(3) $r = \lim |a_n/a_{n-1}| = \lim (1 + 1/\sqrt{n}) = 1$, ゆえに $\rho = 1$.

(4) $a_{n^2} = n!$, よって $r = \limsup \{(n!)^{1/n^2}\}$, $1 \leq r$ は明らかで, $n! < n^n$ から $r \leq (n)^{1/n} \rightarrow 1$ ゆえに $\rho = 1$.

(5) $r = \lim a_n/a_{n+1} = \lim (1 + (\log n / \log(n-1)!)) = 1$, ゆえに $\rho = 1$.

(6) $r = \lim a_n^{1/n} = \lim (n!)^{a/n^2} = 1$, ゆえに $\rho = 1$.

解答 1.12 分母奇数のグループが n , 分母偶数のグループが n 個からなるとして $n \rightarrow \infty$ を考えてかまわない (なぜか). また話の単純のため, $p > q$ としてよい. このとき, 和は (レポート問題).....

$$\sum_{k=1}^{np} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{nq} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2nq} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{k=nq+1}^{np} \frac{1}{2k-1}$$

解答 1.13 (1) [オイラーの収束法]

$\sum_{k=1}^n \sin ka = \sigma_n$ とすれば

$$\sum_{k=1}^n \sin ka \sin(a/2) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [\cos(n-1/2)a] - \cos(n+1/2)a = \frac{1}{2} [\cos(a/2) - \cos((2n+1)a/2)]$$

なので

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\cos(a/2) - \cos((2n+1)a/2)}{2 \sin(a/2)}, \quad |\sigma_n| < \frac{1}{|\sin(a/2)|} \\ \sum_{k=1}^n (\sigma_k - \sigma_{k-1}) a_k &= f(1) + \sum_{k=1}^n \sigma_k (a(k) - a(k+1)) \end{aligned}$$

ここで $\sum |a(k) - a(k+1)| = \sum (a(k) - a(k+1)) \rightarrow a(1)$ は絶対収束.

(2) もこれに順ずる. $\sum_{k=1}^n \cos na = \tau_n$ として残りは前と同じ.

解答 1.14 $s_n = \sum (-1)^k (\sin kx + k)/k^2$ とすればこれは絶対収束する部分と条件収束する部分に分かれ、明らかに収束. 絶対値をとれば $n \geq 2$ ならば $|(\sin nx + n)/n^2| \geq 1/2n$. ゆえに絶対収束ではない.

解答 2.1 $F(x) = f(x) - f(x + \pi)$ とすれば, $F(0) = -F(\pi)$, よって $F(0) > 0$ ならば $F(\pi) < 0$ である.

解答 2.2 平面上に図形をおき、図形に任意にかかれた基準線となす角を θ とし、この平面上に接しつつ回転させる. このときの図形の平面からの高さを, $CD = y(\theta)$, 幅を $AB = x(\theta)$ とする. $f(\theta) = x(\theta) - y(\theta)$ を考え, $\theta + \pi/2$ を考えよ.

解答 2.3 レポート問題

解答 2.4 連続であっても全ての点で微分不可能な関数として知られている ヘルダー連続である ($\alpha < 1$). がいたるところ微分係数は発散している. これは自然界ではブラウン運動のパターンに似ている.

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} a^n |\cos b^n \pi x - \cos b^n \pi y| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n \times 2 |\sin b^n \pi (y-x)/2 \sin b^n \pi (y+x)/2| \\ &= \sum_{n=0}^{n_0} |\cdots| + \sum_{n>n_0} |\cdots| \end{aligned}$$

ここで $\varepsilon > 0$ に対し, n_0 (正整数) を $\varepsilon = a^{n_0} 2/(1-a)$ ととると,

$$\sum_{n>n_0} |\cdots| \leq \varepsilon(1-a)/2(1+a^1+a^2+\cdots) = \varepsilon/2$$

また $a^n |\sin b^n (x-y)| < (ab)^n |x-y|$ なので

$$\delta = (ab)^{-n_0} \varepsilon/2 = a^{-n_0 \log_a ab} \varepsilon/2 = \varepsilon^{-\log_a(ab)+1}/2 = \varepsilon^{-\log_a b}/2$$

ととれば $(ab)^{n_0} = \varepsilon/2\delta$ で

$$\sum_{n<n_0} |\cdots| \leq \sum_{n<n_0} (ab)^n |x-y| = (ab)^{n_0+1} |x-y| \leq \varepsilon/2$$

すなわち

$$|f(x) - f(y)| < L|x-y|^{-\lg_b a}$$

$(1/b) < a < 1 < b$ なので $0 < -\log_b a < 1$ に注意. よって連続である.

微分がいたるところ発散することを示すには

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} \right| = \infty$$

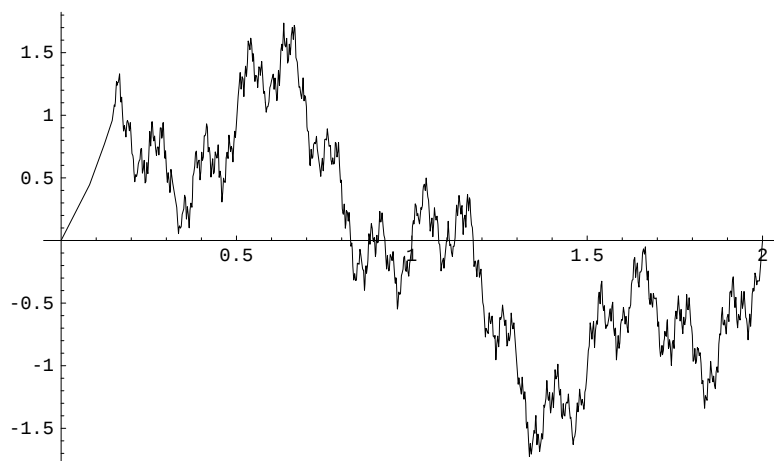


図 1: ワイエルストラスの関数

となるような, $\{h_n; h_n \rightarrow 0\}$ があることを示す. これには $b^m x$ に一番近い整数を k_m とし以下のようにとればよい。

$$\begin{aligned}\rho_m &= b^m x - k_m \\ h_m &= \frac{k_m + 1}{b_m} - x = \frac{1 - \rho_m}{b^m}\end{aligned}$$

$|\rho_m| < 1$ より, $0 < h_m < 3b^{-m}/2 \rightarrow 0$ がいえる。これが条件を満たすことを見るには和を $n < m-1$ にした s_m と $n \geq m$ にした r_m に分離すればよい。

$$\begin{aligned}s_m &= \sum_{n=0}^{m-1} a^n \frac{\cos b^n \pi(x + h_m) - \cos b^n \pi x}{h_m} \\ r_m &= \sum_{n=m}^{\infty} a^n \frac{\cos b^n \pi(x + h_m) - \cos b^n \pi x}{h_m}\end{aligned}$$

結局どちらも大きくなりうるが, r_m は符号は $(-1)^{k_m+1}$ で $> 2(ab)^m/3$ が結論でき, 他方, $|s_m|$ は ab が大きいとき $(ab)^{m-1}$ より小さくなることがいえる。(細かい評価は学生に任す。)

解答 3.1 解答あり

解答 3.2 レポート問題