微分積分学 A 6 月レジメとレポート No.3

1　微分の基本公式

定義 1 *(1)* n 次元では $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $a = (a_1, \cdots, a_n)$, $|a - x| = (\sum (x_i - a_i)^2)^{1/2}$ とする。$f(x)$ が $a \in R^n$ で微分可能であるとは

$$f(x) = f(a) + \sum_i \alpha_i (x-a)_i + o(|x-a|)$$

となる定数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ が存在すること。ここで $g(x) = o(|x-a|))$ とは

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{|x-a|} = 0$$

$y = f(a) + \sum_i \alpha_i (x-a)_i$ を接平面（接線）という。
(2) 上記の定義は $n = 1$ **の時には**

$$\alpha_1 = f'(a) = \frac{d}{dx} f(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

の存在と同値。さらに $n = 1$ **の時には**

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x)(x - x_0)$$

を満たす, $x = x_0$ で連続な関数 $\alpha(x)$ があることと同値である.
(3) 上記の定義は $n \geq 2$ **の時には**偏微分可能性を示す（逆は真ではない。）

$$\alpha_i = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = f_{x_i}(x) = \lim_{h_i \to a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h_i}$$

ここで $h = (0, \cdots, 0, h_i, 0, \cdots, 0)$

定理 1 微分の基本公式, f, g, u は微分可能とする。このとき

$$\begin{aligned}
&(1)\ \frac{d}{dx} f(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
&(2)\ \frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{f(x)g(x)} \\
&(3)\ \frac{d}{dx} f(u(x)) = u'(x) f'(u(x))
\end{aligned}$$

問題 1.1 この定理を証明せよ.

定理 2 *(*逆関数の微分公式*)* $y = f(x)$ が区間 $I = (a, b)$ で 1 対 1 *(1* 変数なら単調*)* かつ上への写像で微分可能ならば逆関数 $x = f^{-1}(y)$ が存在して微分可能である。

$$\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(y)}$$

証明

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x)(x - x_0)$$

で $\alpha(x)$ は $x=x_0$ で連続とできる. $x=f^{-1}(y)$, $x_0=f^{-1}(y_0)$ を代入して

$$y = f\circ f^{-1}(y) = f\circ f^{-1}(y_0) + \alpha(f^{-1}(y))(f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0))$$

これを書き換えて

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) + \frac{1}{\alpha(f^{-1}(y))}(y-y_0)$$

これは (定義 1 (2) から分かるように) $f^{-1}(y)$ が y_0 で微分可能であって,

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{\alpha(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

を示している.

よく使われる逆関数

$$\begin{array}{ll} y=\exp\, x, x\in R & \to x=\log y \\ y=\sin x, x\in[-\pi/2,\pi/2] & \to x=\sin^{-1} y \\ y=\cos x, x\in[0,\pi] & \to x=\cos^{-1} y \\ y=\tan x, x\in(-\pi/2,\pi/2) & \to x=\tan^{-1} y \end{array}$$

明らかに

$$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\pi/2, \quad \tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{1}{x}=sgn(x)\pi/2$$

定理 3 微分の基本公式

(1) $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ *(2)* $\frac{d}{dx}\sin ax = a\cos ax$

(3) $\frac{d}{dx}\sin^{-1}(x/a) = \frac{sgn(a)}{\sqrt{a^2-x^2}}$ *(4)* $\frac{d}{dx}\cos^{-1}(x/a) = -\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(5) $\frac{d}{dx}\tan^{-1}(x/a) = \frac{a}{a^2+x^2}$ *(6)* $\frac{d}{dx}\log|ax| = \frac{1}{x}$

(7) $\frac{d}{dx}\log|x+\sqrt{A+x^2}| = \frac{1}{\sqrt{A+x^2}}$

問題 1.2 次の関数を微分せよ, $f(x), g(x)$ は微分可能とする.

$$(1) f(x)^{g(x)} \quad (2)\arcsin(\cos x)) \quad (3)\arctan\left(\frac{\tan x+a}{1-a\tan x}\right)$$

$$(4)\log(\tan x) \quad (5) f(f(f(x))) \quad (6)\arcsin\sqrt{1-f^2(x)}$$

問題 1.3 次の関数を微分せよ。

(1) $\sin^{-1}x\cos^{-1}x$ *(2)* $\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$

(3) $\tan^{-1}\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{5}x}{x^2-1}$ *(4)* $\mathrm{Arcsec}x$

2 平均値の定理と関数の増減、展開

定理 *4* $f(x)$ は $[a,b]$ で連続, (a,b) で微分可能とすれば, ある $\xi\in(a,b)$ があって

$$\frac{f(a)-f(b)}{b-a} = f'(\xi)$$

となる。

証明

$$F(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right]$$

とすれば, $F(a) = F(b) = 0$. これにいわゆるロルの定理「$F(x)$ が微分可能で, $F(a) = F(b)$ ならば, $a < \xi < b$ なる ξ があって $F'(\xi) = 0$ が成立する」を用いて $F'(\xi) = 0$. *Q.E.D*

定理 *5* $f(x), g(x)$ はともに $[a, b]$ で連続, (a, b) で微分可能, かつ $f'(x)$ と $g'(x)$ は同時に *0* にならないとすれば, ある $\xi \in (a, b)$ があって

$$\frac{f(a)-f(b)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

となる。

証明

$$F(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)) + f(a)\right]$$

とすれば, $F(a) = F(b) = 0$. これにいわゆる　ロルの定理 $F'(\xi) = 0$ を用いる. *Q.E.D*

定理 *6* $f(x)$ は $I = (a, b)$ で n 回連続可能, $[a, b]$ で連続とする。任意の $a < x < b$ に対し、ある $a < \xi < x$ があって

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + \frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-a)^n$$

となる。$R_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-a)^n$ を *Langrange* の剰余項という。これは

$$R_n = \frac{(1-\theta)^{n-p}}{p(n-1)!}f^{(n)}(a+\theta(x-a))(x-a)^n$$

とも書け, ロシュの剰余項という。ここで $\xi = a + \theta(x-a)$ とおいた。

証明 これにはいくつかの証明があるが代表的なものあげるが, このくらいは全て覚えるて頂きたい.　それぞれに長所があるので.

(1) 平均値の定理の拡張

$$\phi(t) = f(x) - \left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}f^{(k)}(t)(x-t)^k + \frac{A}{n!}(x-t)^n\right]$$

とおく。当然 $\phi(x) = 0$. さらに A を

$$A = \frac{n!}{(x-a)^n}\left\{f(x) - \left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)(x-a)^k\right]\right\}$$

と選んでおけば, $\phi(x) = \phi(a) = 0$. よってある ξ で $\phi'(\xi) = 0$. しかし直ぐわかるように,

$$\phi'(t) = \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} - \frac{A}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}$$

なので, $A = f^{(n-1)}(\xi)$. これは求めるもの。

(2) コーシーの平均値の繰り返し

$$F(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k, G(x) = (n!)^{-1}(x-a)^n$$

とすると $F^{(k)}(a) = G^{(k)}(a) = 0,\ k = 0, 1, \cdots, n-1$, 故に

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F'(\xi_1)-F'(a)}{G'(\xi_1)-G'(a)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} = \cdots = \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = f^{(n)}(\xi_n)$$

よって $F(x) = G(x) f^{(n)}(\xi_n)$, *(*$\xi = \xi_n$ とおく*)*.

(3) 部分積分法の繰り返し

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= \int_a^x f'(t)dt = -\int_a^x (x-t)' f'(t)dt = -[(x-t)f'(t)]_a^x + \int_a^x (x-t) f''(t)dt \\ &= (x-a)f'(a) - \int_a^x \left[\frac{1}{2}(x-t)^2\right]' f''(t)dt \\ &= (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) - \int_a^x \left[\frac{1}{3!}(x-t)^3\right]' f'''(t)dt \end{aligned}$$

この方法での n 次剰余項は

$$R_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt$$

であり, 積分型剰余項 と呼ばれる。

3 原始関数, 積分 黒田教科書 p.135-p.157

$f(x)$ は区間 $I = [a, b]$ で連続（よって一様に連続）とする. I の分割を $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} = \cup I_i$, $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ と定め, 区間 I_i の中に任意の代表点を $\{\xi\} = \{\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]\}$ 選ぶ. Riemann 和を

$$S(f, \Delta, \{\xi\}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

で定め, 上限和 (過剰和), 下限和 (不足和) を

$$S(f, \Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{\xi_i \in I_i} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i), \quad s(f, \Delta) = \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{\xi_i \in I_i} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

とする (連続関数に限定すれば, sup, inf は max, min で代用できる).

定理 7 このとき以下の関係が成り立つ *(*証明すること）

$$(1)\ s(f, \Delta) \leq S(f, \Delta), \quad (2)\ s(f, \Delta) \leq S(f, \Delta'), \quad \forall \Delta, \forall \Delta'$$

これから下積分, 上積分

$$\begin{aligned}\sup_{\Delta} s(f,\Delta) &= \underline{\int_a^b} f(x)dx = s \\ \inf_{\Delta} S(f,\Delta) &= \overline{\int_a^b} f(x)dx = S\end{aligned}$$

<u>両者が一致するとき Riemann 積分可能である</u> という.

$$s = S = R = \int_a^b f(x)dx$$

定理 8 *$d(\Delta)$ で分割 Δ の最大幅を示すとする. $f(x)$ が $I=[a,b]$ で Riemann 積分可能な必要十分条件は*

$$\inf_{\Delta}(S(f,\Delta) - s(f,\Delta)) = \lim_{d(\Delta)\to 0}(S(f,\Delta) - s(f,\Delta)) = 0$$

定理 9 *(1) $I=[a,b]$ で, $f(x)$ が単調増加、または減少ならば Rieman 積分可能である (Newton)*
(2) $I=[a,b]$ で, $f(x)$ が連続ならば Rieman 積分可能である

定理 10 （解析学の基本定理, 黒田教科書 p.145） *$f(x)$ を連続関数とすれば*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

である.

この定理は fundametal theorem of calculus といわれる。すなわち微分と積分は互いに逆ということ。これで不定積分（微分の逆）を求めれば、定積分（面積、体積）が求められるということになった。めでたしめでたし !!

定理 11 （Dalboux の定理, p.155） *$d(\Delta)$ で分割 Δ の最大幅を表わせば,*

$$\lim_{d(\Delta)\to 0} S(f,\Delta) = (\text{上積分}), \quad \lim_{d(\Delta)\to 0} s(f,\Delta) = (\text{下積分})$$

問題 3.1 $I=[a,b]$ の分割を $\Delta = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$, 分割の最大幅を $d(\Delta) = \max|x_{i+1} - x_i|$, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ を任意の代表点として

$$\lim_{d(\Delta)\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\sin\xi_i(x_{i+1}-x_i) = -\cos a + \cos b$$

が成り立つことを示せ. (ヒント:最初代表点として平均値の定理をみたす ξ_i をとれ, つまり $\cos x_{i+1} - \cos x_i = -\sin\xi_i(x_{i+1}-x_i)$)

問題 3.2 $p > -1$ のとき

$$\int_0^1 x^p dx = \frac{1}{1+p}$$

を分割 $\Delta_r = \{r^n, r^{n-1}, \cdots, r, r^0 = 1\}$, $(0 < r < 1)$ に対する *Rieman* 和の極限とし, 最後に $r \to 1$ として証明せよ. ただし, 正整数 n も r に依存させて大きくとり, $r^n \to 0$ *($r \to 1$)* とすること. 例えば, $r = 1 - 1/\sqrt{n} \in (0,1)$, つまり $n = 1/(1-r)^2$

問題 3.3 以下の関数はいずれもすべての点で不連続である。次の関数は $I=[0,1]$ で可積分か否か判断せよ.

(1) $f(x)=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}(\cos 2\pi m!x)^n$

(2) $x\in[0,1]$ を 2 進数表示したもの $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$, $a_i=0,1$ に対し $f(x)=0.a_1a_2a_3\cdots=a_1/10+a_2/10^2+a_3/10^3+\cdots\in[0,1/9=0.1111\cdots]$ と *10* 進法にしたもの.

(ヒント: (1) の関数は有理数で 1, 無理数で 0 である. m,n の順番に注意、これは不可, *(2)* は可である。理由は*?)*

問題 3.4

$$z_k=\exp\left[\frac{2\pi ik}{n}\right]=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}, k=0,2,\cdots,n-1$$

とすれば, $z^n-r^n=\prod(z-rz_k)$ と因数分解される。$|1-rz_k|^2=1+r^2-2r\cos(2\pi k/n)$, 及び

$$\lim_{n\to\infty}|(1-z_0)\cdots(1-z_{n-1})|^{2/n}=\exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log(1+r^2-2r\cos\theta)d\theta\right]$$

を用いて,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta=\begin{cases}2\log r & r>1\\ 0 & 0\le r<1\end{cases}$$

を示せ.

4 高階導関数, 初等関数の微積分 p.159–p.187

定義 2 $f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)=f^{(1)}(x)$ とし一般に

$$f^{(n)}(x)=\frac{d}{dx}f^{(n-1)}(x)$$

と定義する。

$$C^n(I)=\{\text{ 区間 } I \text{ で } f^{(n)}(x) \text{ が連続である } f \text{ の全体 }\}$$

とし n 回連続微分可能な関数という。特に $C^0(I)$ は連続関数の全体を示す。

定理 12 高階微分の基本公式

(1) $\frac{d^n}{dx^n}\sin ax=a^n\sin(ax+\frac{n\pi}{2})$ *(2)* $\frac{d}{dx}\cos ax=a^n\cos(ax+\frac{n\pi}{2})$

(3) $\frac{d^n}{dx^n}e^{ax}=a^ne^{ax}$ *(4)* $\frac{d^n}{dx^n}\log x=(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$

定理 13 *Leibnitz* の定理

$\frac{d^n}{dx^n}f(x)g(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$

問題 4.1 次の関数の n 階導関数を求めよ。

(1) $(1-x^2)^{-1}$ *(2)* $\frac{ax+b}{cx+d}$

(3) $\sin^2 x$ *(4)* $x^3\sin x$

(5) $e^x\log(1+x)$ *(6)* $\sin^{-1}x$

問題 4.2 次の関数の n 階導関数を求めよ。

$$(1)\sin^3 x,\qquad (2)\frac{1}{(x+a)(x+b)}\ (a\neq b),\qquad (3)e^{ax}\sin bx$$

問題 4.3 次式で定義される $H_n(x)$ をエルミート多項式という. H_n は n 次多項式で, n 個の実根を持つことを示せ.

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$$

問題 4.4 次式で定義される $P_n(x)$ をルジャンドル多項式という. P_n は n 次多項式で, $(-1, 1)$ の間に n 個の根を持つことを示せ.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

問題 4.5 次式で定義される $f(x)$ は $C^\infty(R)$ であることを示せ.

$$f(x) = \begin{cases} \exp[-1/x] & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

5 凸関数 黒田教科書 p.197-204

定義 3 $f(x)$ が凸関数であるとは

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

が $\lambda \in [0, 1]]$ で成り立つこと。

定理 14 $f \in C^2(I)$ ならば $f(x)$ が凸関数である必要十分条件は

$$f''(x) \geq 0$$

問題 5.1 上の定理を証明せよ.

問題 5.2 $f(x)$ が　凸関数ならば, $\lambda_i \geq 0, \sum \lambda_i = 1$ である任意の正数と、f の定義域の x_i に対して

$$f(\sum_i \lambda_i x_i) \leq \sum \lambda_i f(x_i)$$

が成り立つことを示せ.

問題 5.3 $f \in C^0(I)$ ならば $f(x)$ が凸関数である必要十分条件は

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

であることを示せ.

問題 5.4 次の不等式を証明せよ.

1. $a_i \geq 0$ とのとき　$(a_1 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n}(\sum a_i)$, *(相加相乗不等式)*
2. $\mu_i \geq 0$, $\sum \mu_i = 1$ のとき　　$\exp(\sum \mu_i x_i) \leq \sum e^{x_i} \mu_i$, *(ヤンセン不等式)*

6 【講義 3 の問題のヒントと略解 】

解答 1.1 省略

解答 1.2 省略

解答 1.3 省略

解答 3.1 代表点を

$$\frac{\cos x_{i+1} - \cos x_i}{x_{i+1} - x_i} = -\sin \xi_i$$

を満たすようにとる．他の代表点 $\{\eta_i\}$ を取ったとき、その差が $d(\Delta) \to 0$ で 0 に収束。

解答 3.2 等比級数の和で求められる。レポート問題。

解答 3.3 最初のは簡単．後者については，$f(x)$ は単調増加で可積分であることに注意．I を $1/2^n$ の幅分割し代表点を区間の左端でとると和 $\sum_{k=0}^{2^n-1} f(k/2^n)1/2^n$ が求められる。残りレポート問題。

解答 3.4 省略

解答 4.1 省略.

解答 4.2 省略.

解答 4.3 定義から $H_n'(x) = xH_n - H_{n+1}$ である．また $F_n(x) = (-1)^n e^{-x^2/2} H_n(x)$ とすれば，

$$F_n'(x) = (-1)^n e^{-x^2/2}(-xH_n + H_n'(x)) = (-1)^{n+1} e^{-x^2/2} H_{n+1}(x) = F_{n+1}$$

$H_0 = 1$ より H_n は明らかに n 次多項式．$H_n(x) = 0$ の *2* 根を α, β とすれば，$F_n(\alpha) = F_n(\beta) = 0$，よって，$\alpha < \gamma < \beta$ である，γ で $F_n'(\gamma) = 0$，よって $H_{n+1}(\gamma) = 0$．かように $H_n(x)$ の零点の間に，$H_{n+1}(x)$ の零点は含まれる．他方，$\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$ なので，$F_n(x) = 0$ の最大根 α_{max}，最小根 α_{min} の外側にそれぞれひとつずつ根がある．ゆえに $H_{n+1} = 0$ は $(n-1) + 2 = n + 1$ 個の根を有する．*(*下図には，*4* 次と *5* 次の $F_n(x)$ を書いてある*)*

解答 4.4 $f(x) = (x-1)^n(x+1)^n$ は偶関数で，$(-1, 1)$ でゼロにならない．$f^{(k)}(x)$ は $0 \le k < n$ ならば，$x = \pm 1$ でゼロであり，$f^{(1)}(x)$ のゼロ点を，$-1, \xi_1^{(1)} = 0, 1$ とすれば，$f^{(2)}(x)$ のゼロ点は，$-1, \xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, 1$ とできて新しい零点は前のそれらにはさまれる（ロルの定理*)*．のこりは帰納法．*(*グラフには，$(x^2-1)^3$ とこれの，*1,2,3* 階微分を記載してある．縦軸をスケールしてある．*)*

解答 4.5 $f(x)$ は原点以外では C^∞ であるのは明らか．$x < 0$ では $f^n(x) = 0$，$x > 0$ では

$$f^{(n)}(x) = P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}$$

ここで，$P(x)$ は x の $2n$ 次式なので

$$\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = \lim_{t\to\infty} P_n(t) e^{-t} = 0$$

解答 5.1

$$\begin{aligned}
&af(x)+bf(y)-f(ax+by)\\
&= a[f(ax+by+b(x-y))-f(ax+by)]+b[f(ax+by-a(x-y))-f(ax+by)]\\
&= ab(x-y)[f'(ax+by+\theta_1 b(x-y))-f'(ax+by-\theta_2 a(x-y))]\\
&= ab(\theta_1 a+\theta_2 b)(x-y)^2 f''(ax+by+\theta_3(\theta_1 a+\theta_2 b)(x-y)]
\end{aligned}$$

よって $f''\geq 0$ なら凸. 逆に凸であれば, 上式の両辺を $ab(\theta_1 a+\theta_2 b)(x-y)^2>0$ で割り, $x\to y$ として $f''(x)>0$.

解答 5.2 数学的帰納法による. いま $2,3,\cdots,n-1$ において成立すると仮定する. n の場合, 項を 1 個と $n-1$ 個 に分ける：

$$x=\sum_{i=1}^n a_i x_i = a_1x_1+(\sum_{k=2}^n a_k)\times\left(\sum_{k=2}^n \frac{a_k x_k}{\sum_{i=2}^n a_i}\right)$$

ここで $\sum_{i=1}^n a_i=1$, $a_i>0$ とする.

$$\begin{aligned}
f(x) &= f\left(a_1x_1+(\sum_{i\geq 2}a_i)\frac{\sum_{i\geq 2}a_ix_i}{\sum_{i\geq 2}a_i}\right)\\
&\leq a_1f(x_1)+(\sum_{i\geq 2}a_i)f\left(\frac{\sum_{i\geq 2}a_ix_i}{\sum_{i\geq 2}a_i}\right)\\
&\leq \sum_{k=1}^n a_i f(x_i)
\end{aligned}$$

2 行目は $n=2$ の不等式、最後の行は $n-1$ の不等式である.

解答 5.3 $N=2^n$ とすれば, 繰り返しで

$$f(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N a_i)\leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N f(a_i)$$

$a_1=\cdots=a_p=a_n$, $a_{p+1}=\cdots=a_N=b_n$, $\lambda_n=p/N$ とすれば

$$f(\lambda_n a_n+(1-\lambda_n)b_n)\leq \lambda_n f(a_n)+(1-\lambda_n)f(b_n)$$

ここで, $\lim\lambda_n=\lambda$, $\lim a_n=a$, $\lim b_n=b$ とする。 f の連続性から $n\to\infty$ とすればいい。

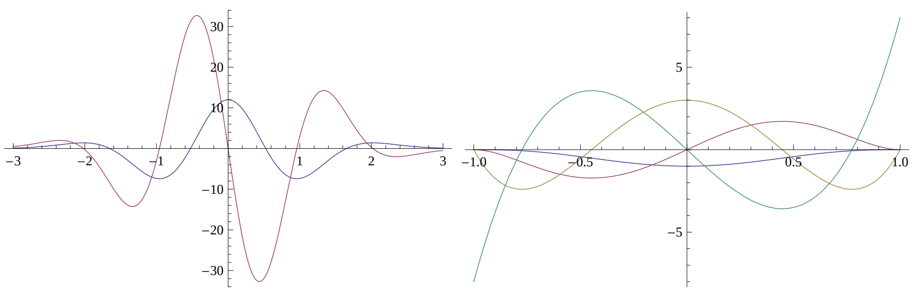

図 1: F_4, F_5(左図) と $(x^2-1)^3$ とその微分（右図）