

輪番割当「6分の5予想」の解決

河村彰星 (京大)

令和7年2月

科研費
KAKENHI

JP20H00587
JP23K28036

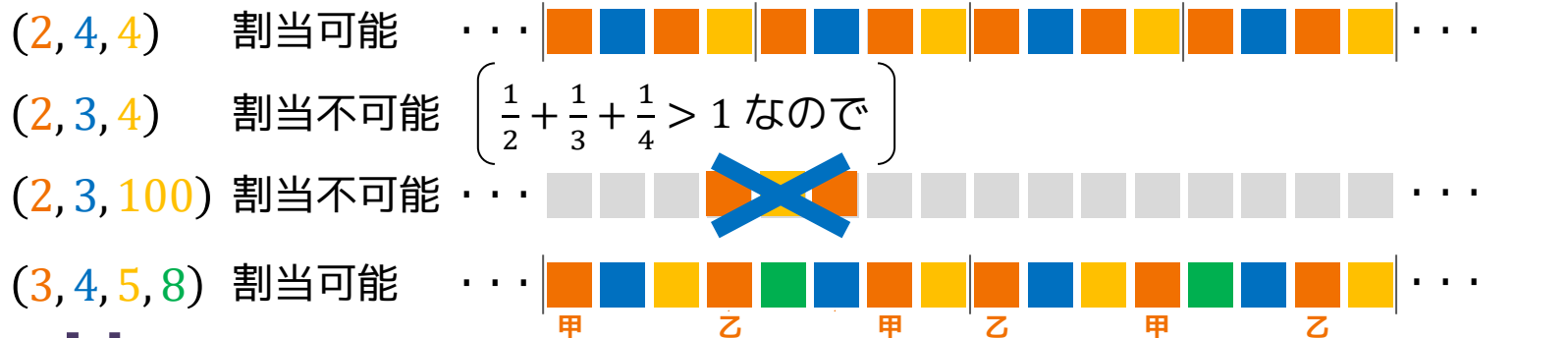
以下 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$ とする

輪番割当問題 (詰込型) (pinwheel scheduling) [HMRTV89]

各仕事 $i = 1, 2, \dots, k$ は**どの連続する a_i 日にも一度以上**やる必要がある
これを満しながら毎日ひとつずつ仕事をやり続けることができるか

できるとき組 $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ は (詰込) **割当可能**であるという

例



↳ (3, 4, 6, 8) 割当可能

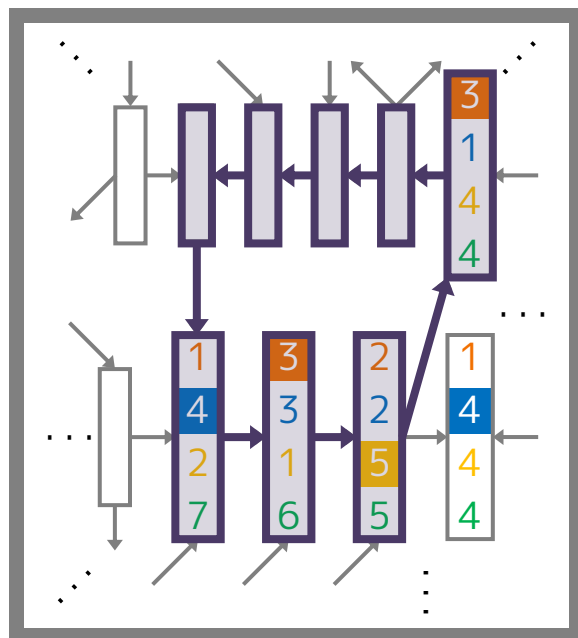
単調性 割当可能な組の或る数を
より大きい数に変えても割当可能

↳ (4, 5, 6, 6, 8) 割当可能
甲 乙

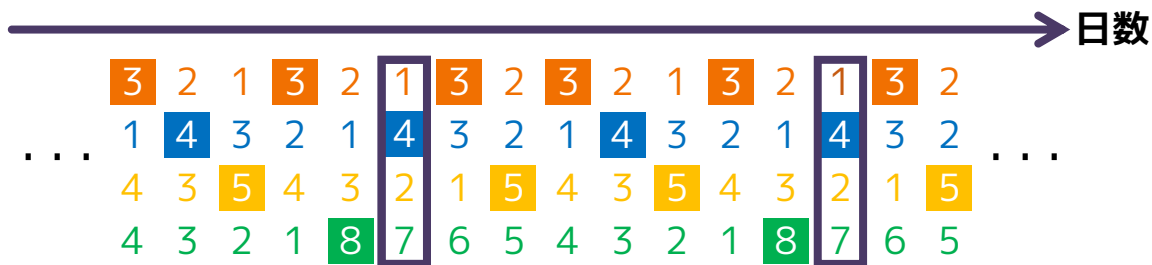
分割性 割当可能な組の或る数を
2 倍の数 2 個に変えても割当可能
(一般に N 倍の数 N 個)

与えられた組が割当可能か判定するには？

状態遷移図を作り 閉路があるか調べればよい



(3, 4, 5, 8) の
状態遷移図
(頂点数 $\leq 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8$)



状態

各仕事を「あと何日以内に
やらねばならないか」を表す

これにより割当可能性は PSPACE で判定できる

NP に属するか未解決

NP 困難かも未解決 (後述)

定義

$A = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ の**密度** (density) とは $D(A) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k}$

A が割当可能であるには明らかに $D(A) \leq 1$ が必要
これは一般には十分条件でないが……

$\frac{1}{2}$ よりも大きな数で成立つか？

定理 [HMRTV89]

A の各数が前の数の倍数で
かつ $D(A) \leq 1$ ならば A は割当可能

∴ 仕事が一種類の場合に帰着される

例 $(4, 8, 8, 16, 16)$ ← $(4, 8, 8, 8)$ ← $(4, 4, 4)$
は割当可能 割当可能 割当可能

分割性

分割性

定理 [HRTV92]

A に現れる数が二種類以内で
かつ $D(A) \leq 1$ ならば A は割当可能

系 [HMRTV89]

$D(A) \leq \frac{1}{2}$ ならば A は割当可能

∴ 各項を 2 幂に切捨てても密度 ≤ 1

例 $(6, 12, 13, 24, 25)$ ← $(4, 8, 8, 16, 16)$
割当可能 割当可能

単調性

うまく使くと切捨て時の無駄を
小さくできる (次頁の [CC93, CC92])

[HMRTV89] R. Holte, A. Mok, L. Rosier, I. Tulchinsky, D. Varvel. The pinwheel: a real-time scheduling problem. In Proc. 22nd Hawaii International Conference on System Sciences, pp. 693–702, 1989.

[HRTV92] R. Holte, L. Rosier, I. Tulchinsky, D. Varvel. Pinwheel scheduling with two distinct numbers. Theoretical Computer Science 100, 105–135, 1992.

定理 (再掲) [HMRTV89]

$D(A) \leq \frac{1}{2}$ ならば A は割当可能

定理 [CC93]

$D(A) \leq \frac{2}{3}$ ならば A は割当可能

定理 [CC92]

$D(A) \leq \frac{7}{10}$ ならば A は割当可能

定理 [FL02]

$D(A) \leq \frac{3}{4}$ ならば A は割当可能
(= 0.75)

定理 [Kaw24]

~~予想~~ [CC93]

$D(A) \leq \frac{5}{6}$ なら A は割当可能
($\approx 0.833 \dots$)

$((2, 3, \bullet))$ が
割当不可能なので
これが限界)

部分的解決

定理 [LL97]

A に現れる数が三種類以内なら成立

定理 [FL02]

$a_1 = 2$ なら成立

定理 [GSW22]

$k \leq 12$ なら成立

 は
計算実験を
含む

[CC92] M.Y. Chan, F. Chin. General schedulers for the pinwheel problem based on double-integer reduction. IEEE Transactions on Computers 41, 755–768, 1992.

[CC93] M.Y. Chan, F. Chin. Schedulers for larger classes of pinwheel instances. Algorithmica 9, 425–462, 1993.

[FL02] P.C. Fishburn, J.C. Lagarias. Pinwheel scheduling: achievable densities. Algorithmica 34, 14–38, 2002.

[GSW22] L. Gąsieniec, B. Smith and S. Wild. Towards the $5/6$ -density conjecture of pinwheel scheduling. In Proc. SIAM Symposium on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX), pp. 91–103, 2022.

[HMRTV89] R. Holte, A. Mok, L. Rosier, I. Tulchinsky, D. Varvel. The pinwheel: a real-time scheduling problem. In Proc. 22nd Hawaii International Conference on System Sciences, pp. 693–702, 1989.

[Kaw24] A. Kawamura. Proof of the density threshold conjecture for pinwheel scheduling. In Proc. 56th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC), 1816–1819, 2024.

[LL97] S. Lin, K. Lin. A pinwheel scheduler for three distinct numbers with a tight schedulability bound. Algorithmica 19, 411–426, 1997.

輪番割当問題 (非整数への拡張)

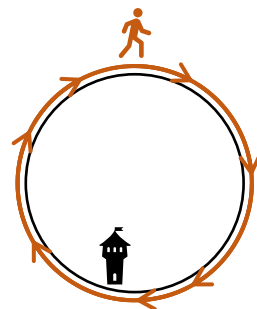
1 以上の**実数**の組 $A = (a_1, \dots, a_k)$ が与えられる
各仕事 i は**どの連続する $[r \cdot a_i]$ 日にも r 回以上**やる ($r = 1, 2, \dots$)
これを満しながら毎日ひとつずつ仕事をやり続けられるか

例えば

一日に $\frac{5}{12}$ 周する一郎君
が 塔を横切る

例 $a_1 = \frac{12}{5} = 2.4$ は 仕事 1 を
どの 3 日間にも 1 回以上
どの 5 日間にも 2 回以上
どの 8 日間にも 3 回以上
どの 10 日間にも 4 回以上
どの 12 日間にも 5 回以上

これを満す一つの方法
ちょうど 2.4 日に一度 (時刻まで
正確に) 起る出来事を考える
それが起る日に**仕事 1**を行う



行うべしという意味

例 (2.4, 3.5, 3.5) は割当可能



非整数に拡張してもやはり

単調性 **分割性** は成立つ

密度は $D(A) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k}$ で定義

定理

$k = 2$ (すなわち $A = (a_1, a_2)$) かつ $D(A) \leq 1$ ならば A は割当可能

∴ 次の「池のほとりの塔」法 (と **単調性**) より

例 $a_1 = \frac{12}{5} = 2.4$ は 仕事 1 を
 どの 3 日間にも 1 回以上
 どの 5 日間にも 2 回以上
 どの 8 日間にも 3 回以上
 どの 10 日間にも 4 回以上
 どの 12 日間にも 5 回以上

行うべしという意味

これを満す一つの方法

ちょうど 2.4 日に一度 (正確に) 起る出来事を考

それが起る日に**仕事 1**に対する解

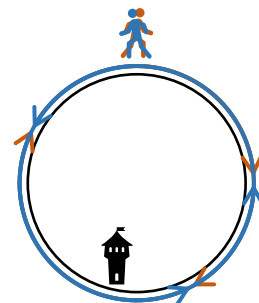


残った日に仕事 2 を行くと

$$a_2 = \frac{12}{7} \text{ の条件を満す}$$

一日に $\frac{5}{12}$ 周する一郎君

一日に $\frac{7}{12}$ 周する二郎君



系(再掲) [HRTV92]

$$A = \left(\underbrace{e_1, \dots, e_1}_{k_1}, \underbrace{e_2, \dots, e_2}_{k_2} \right) \text{ (二種類の数からなる) かつ } D(A) \leq 1 \text{ ならば } A \text{ は割当可能}$$

$\therefore \left(\frac{e_1}{k_1}, \frac{e_2}{k_2} \right)$ が割当可能ゆえ **分割性** より

[HRTV92] R. Holte, L. Rosier, I. Tulchinsky, D. Varvel. Pinwheel scheduling with two distinct numbers. *Theoretical Computer Science* 100, 105–135, 1992.

定理 (再掲)

整数からなる

$D(A) \leq \frac{5}{6}$ なる $A \subseteq \{2, 3, \dots\}$ は割当可能

補題

$D(B) < \frac{29}{33}$ なる $B \subseteq \{2, 3, \dots, 22\} \cup (11, 22]$ は割当可能

計算機で確認

先程の状態遷移図
の方法で調べ尽し

$A = (2, 5, 15, 40, 51, 87)$
①
 $(2, 5, 15, 40, 51, 51)$
②
 $(2, 5, 15, 25.5, 40)$
①
 $(2, 5, 15, 25.5, 25.5)$
②
 $B = (2, 5, 12.75, 15)$

「補題⇒定理」の証明

A が (定理に反して) 割当不可能だったとする

A の中身がみな 22 以下になるまで次の操作①②を繰返し 結果を B とする

- ① A の最大元が一つならば それを減らしてゆく
- ② A の最大元が複数あれば その二つ (a, a とする) を纏めて $\frac{a}{2}$ にする

すると B は割当不能で $D(B) < D(A) + \frac{1}{22} \leq \frac{29}{33}$ なので 補題に反する

操作 ①② は 単調性 分割性 の逆なので

定理 (

$D(A) \leq$

補題

$D(B) <$
割当可

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{5}$

$\frac{1}{15}$

$\frac{1}{40}$

$\frac{1}{51}$

$\frac{1}{87}$

密度の増分 $< \frac{1}{22}$

①

①

$\frac{1}{22}$

①

② A の最大元 a があれば その二つ (a, a) を纏めて $\frac{a}{2}$ にする

すると B は割当不能で $D(B) < D(A) + \frac{1}{22} \leq \frac{29}{33}$ なので 補題に反する

操作 ①② は 単調性 分割性 の逆なので

$A = (2, 5, 15, 40, 51, 87)$

①

$(2, 5, 15, 40, 51, 51)$

②

$(2, 5, 15, 25.5, 40)$

①

$(2, 5, 15, 25.5, 25.5)$

②

$B = (2, 5, 12.75, 15)$

確認

墨移図
べんし

不可能だったとする
戻し 結果を B とする

定理 (再掲)

整数からなる

$D(A) \leq \frac{5}{6}$ なる $A \subseteq \{2, 3, \dots\}$ は割当可能

補題

$D(B) < \frac{29}{33}$ なる $B \subseteq \{2, 3, \dots, 22\} \cup (11, 22]$ は
各数を整数に切捨てても 割当可能

計算機で確認

先程の状態遷移図
の方法で調べ尽し

すなわち $D'(B') < \frac{29}{33}$ なる $B' \subseteq \{2, 3, \dots, 21\}$ は割当可能

D' は「11 以上の数には 1 足してから求めた密度」

$A = (2, 5, 15, 40, 51, 87)$

$(2, 5, 15, 40, 51, 51)$

$(2, 5, 15, 25.5, 40)$

$(2, 5, 15, 25.5, 25.5)$

$B = (2, 5, 12.75, 15)$

直下の整数に切捨て

$B' = (2, 5, 12, 14)$

$$D'(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}$$

「補題⇒定理」の証明

A が (定理に反して) 割当不可能だったとする

A の中身がみな 22 以下になるまで次の操作①②を繰返し 結果を B とする

① A の最大元が一つならば それを減らしてゆく

② A の最大元が複数あれば その二つ (a, a とする) を纏めて $\frac{a}{2}$ にする

すると B は割当不能で $D(B) < D(A) + \frac{1}{22} \leq \frac{29}{33}$ なので 補題に反する

操作 ①② は 単調性 分割性 の逆なので

整数からなる

定理 (再掲)

$D(A) \leq \frac{5}{6}$ なる $A \subseteq \{2, 3, \dots\}$ は割当可能

補題 (再掲)

$D'(B') < \frac{29}{33}$ なる $B' \subseteq \{2, 3, \dots, 21\}$ は割当可能

そのような B' は 25 592 971 個ある

計算機を使わない (人が読める長さの)
証明は得られていない

実験で判ってきたこと

じつは危ういのは a_1 が小さい場合だけ

定理 [GJKLLMR24]

$\varepsilon(a) = O(1/\sqrt{a})$ なる $\varepsilon: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}_+$ が存在して
任意の $D(A) \leq 1 - \varepsilon(a_1)$ なる
 $A = (a_1, \dots, a_k)$ は割当可能

予想

これは $\varepsilon(a) = \frac{a-1}{a(a+1)}$ で成立 $\left(\begin{array}{l} \text{割当不能なぎりぎりの例は} \\ (a, \underbrace{a+1, a+1, \dots, a+1}_{a-1}, b) \end{array} \right)$

じつは整数条件は不要かも？

予想

$D(A) \leq \frac{5}{6}$ なる A は
(非整数を含んでも) 割当可能

定理 [MFO25]

これは $k \leq 3$ なら成立つ

[MFO25] 宮城, 藤原, 大内. 実数周期の輪番割当6分の5予想. 2024年度冬のLA シンポジウム. 令和7年1月.

[GJKLLMR24] L. Gąsieniec, T. Jurdziński, R. Klasing, C. Levcopoulos, A. Lingas, J. Min, T. Radzik. Perpetual maintenance of machines with different urgency requirements. Journal of Computer and System Sciences 139, 103476, 2024.

今後の課題

計算機実験に頼らない証明

所与の $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ の割当可能性を判定する計算量

先述の状態遷移グラフ (頂点数 $\leq a_1 a_2 \dots a_k$) による方法で **PSPACE**

NP に属するか不明 (解の最短周期は入力長の多項式に収まらないことがある)

$D(A) = 1$ に制限すると **NP** には属する (**P** に属するかは不明)

NP 困難か否かも不明

入力中で $\underbrace{e, \dots, e}_l$ を「 e が l 個」と (l を二進法で) 書けるなら **NP** 困難

詰込ではなく被覆は？ (a_i 日に一度「以上」→「以下」) [KS20]

同様に「密度 $\circ$ 以上ならば必ず被覆可能」が成立つ限界は？

判定の計算量も不明