輪番割当問題

河村彰星 (京大)

科研費
KAKENHI
JP20H00587
JP23K28036

東京大学　応用数理特別講義 II
令和7年5月22日

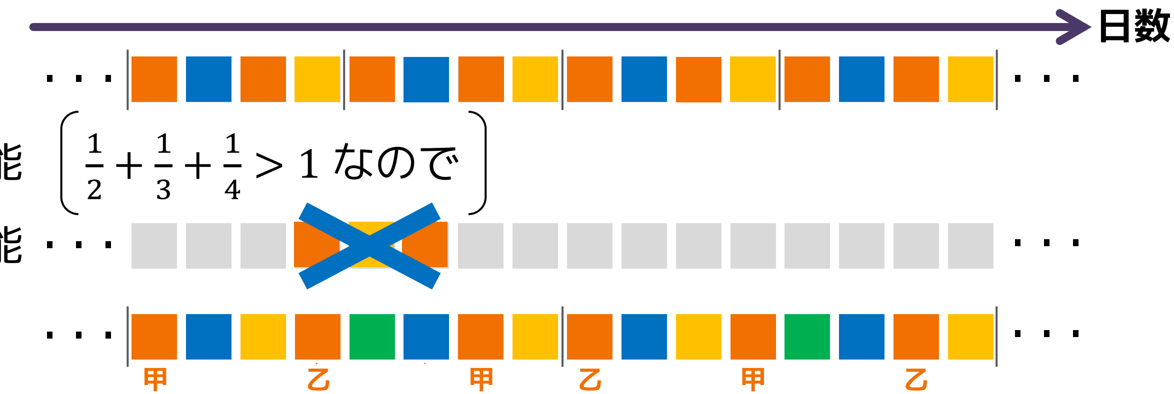
以下 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k$ とする

輪番割当問題 (詰込型) (pinwheel scheduling) [HMRTV89]

各仕事 $i = 1, 2, \ldots, k$ は**どの連続する a_i 日にも一度以上**やる必要がある
これを満しながら毎日ひとつづつ仕事をやり続けることができるか

できるとき組 $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ は (詰込) **割当可能**であるという

例



$(2, 4, 4)$ 割当可能

$(2, 3, 4)$ 割当不可能 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$ なので

$(2, 3, 100)$ 割当不可能

$(3, 4, 5, 8)$ 割当可能

$(3, 4, 6, 8)$ 割当可能

単調性 割当可能な組の或る数を
より大きい数に変えても割当可能

$(4, 5, 6, 6, 8)$ 割当可能
(甲 乙)

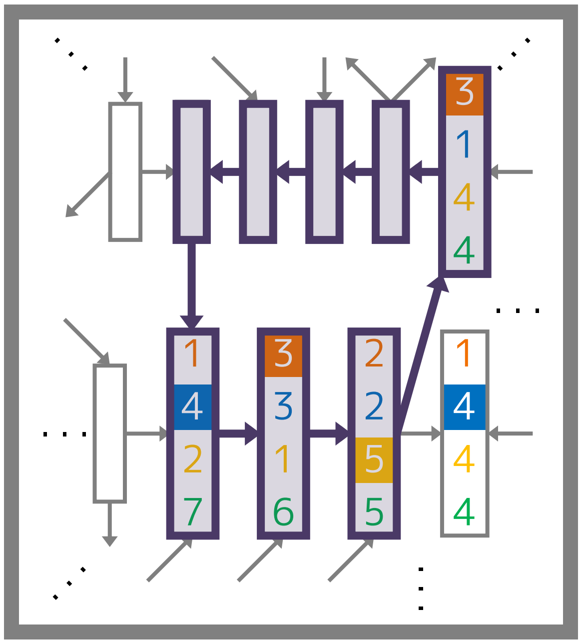
分割性 割当可能な組の或る数を
2 倍の数 2 個に変えても割当可能
(一般に N 倍の数 N 個)

問4 $(3, 4, 6, 10, 16)$ は割当可能か。

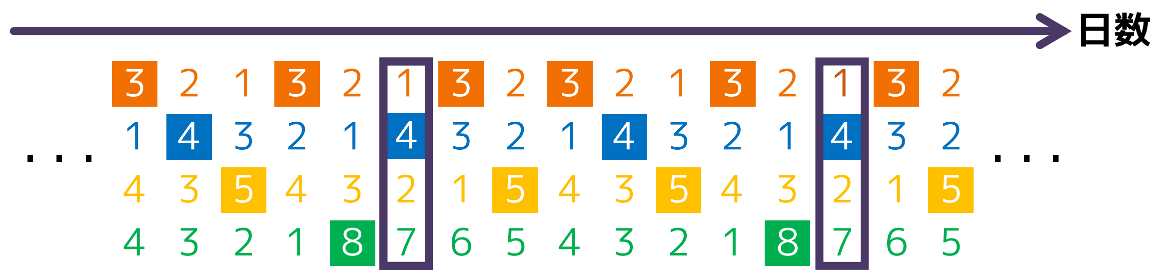
[HMRTV89] R. Holte, A. Mok, L. Rosier, I. Tulchinsky, D. Varvel. The pinwheel: a real-time scheduling problem. In Proc. 22nd Hawaii International Conference on System Science, pp. 693–702, 1989.

与えられた組が割当可能か判定するには？

状態遷移図を作り　閉路があるか調べればよい



(3, 4, 5, 8) の
状態遷移図
(頂点数 $\le 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8$)



状態
各仕事を「あと何日以内に
やらねばならないか」を表す

これにより割当可能性は PSPACE で判定できる

NP に属するか未解決

NP 困難かも未解決 (後述)

問5 何故 (経路の存在を問うという形なのに)
NP に属すると直ちに言えないのか
また何故 **PSPACE** に属すると言えるのか
説明して下さい

定義

$A = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ の**密度** (density) とは $\mathrm{D}(A) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k}$

A が割当可能であるには明らかに $\mathrm{D}(A) \le 1$ が必要
これは一般には十分条件でないが……

$\frac{1}{2}$ よりも大きな数で成立つか？

定理 [HMRTV89]

A の各数が前の数の倍数で
かつ $\mathrm{D}(A) \le 1$ ならば　A は割当可能

∵ 仕事が一種類の場合に帰着される

例 $(4, 8, 8, 16, 16)$ は割当可能 $\xleftarrow{\text{分割性}}$ $(4, 8, 8, 8)$ 割当可能 $\xleftarrow{\text{分割性}}$ $(4, 4, 4)$ 割当可能

定理 [HRTV92]

A に現れる数が二種類以内で
かつ $\mathrm{D}(A) \le 1$ ならば　A は割当可能

系 [HMRTV89]

$\mathrm{D}(A) \le \frac{1}{2}$ ならば A は割当可能

∵ 各項を 2 冪に切捨てても密度 ≤ 1

例 $(6, 12, 13, 24, 25)$ 割当可能 $\xleftarrow{\text{単調性}}$ $(4, 8, 8, 16, 16)$ 割当可能

うまく使うと切捨て時の無駄を
小さくできる (次頁の [CC93, CC92])

[HMRTV89] R. Holte, A. Mok, L. Rosier, I. Tulchinsky, D. Varvel. The pinwheel: a real-time scheduling problem. In Proc. 22nd Hawaii International Conference on System Science, pp. 693–702, 1989.
[HRTV92] R. Holte, L. Rosier, I. Tulchinsky, D. Varvel. Pinwheel scheduling with two distinct numbers. Theoretical Computer Science 100, 105–135, 1992.

定理 (再掲) [HMRTV89]

$\mathrm{D}(A) \le \frac{1}{2}$ ならば A は割当可能

定理 [CC93]

$\mathrm{D}(A) \le \frac{2}{3}$ ならば A は割当可能

定理 [CC92]

$\mathrm{D}(A) \le \frac{7}{10}$ ならば A は割当可能

定理 [FL02]

$\mathrm{D}(A) \le \frac{3}{4}$ ならば A は割当可能

$(= 0.75)$

定理 [Kaw24]

~~予想~~ [CC93]

$\mathrm{D}(A) \le \frac{5}{6}$ なら A は割当可能

$(= 0.833 \ldots)$

$((2, 3, \bullet))$ が
割当不可能なので
これが限界)

部分的解決

定理 [LL97]

A に現れる数が三種類以内なら成立

定理 [FL02]

$a_1 = 2$ なら成立

定理 [GSW22]

$k \le 12$ なら成立

$\boxed{}$ は
計算実験を
含む

[CC92] M.Y. Chan, F. Chin. General schedulers for the pinwheel problem based on double-integer reduction. IEEE Transactions on Computers 41, 755–768, 1992.

[CC93] M.Y. Chan, F. Chin. Schedulers for larger classes of pinwheel instances. Algorithmica 9, 425–462, 1993.

[FL02] P.C. Fishburn, J.C. Lagarias. Pinwheel scheduling: achievable densities. Algorithmica 34, 14–38, 2002.

[GSW22] L. Gąsieniec, B. Smith and S. Wild. Towards the 5/6-density conjecture of pinwheel scheduling. In Proc. SIAM Symposium on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX), pp. 91–103, 2022.

[HMRTV89] R. Holte, A. Mok, L. Rosier, I. Tulchinsky, D. Varvel. The pinwheel: a real-time scheduling problem. In Proc. 22nd Hawaii International Conference on System Science, pp. 693–702, 1989.

[Kaw24] A. Kawamura. Proof of the density threshold conjecture for pinwheel scheduling. In Proc. 56th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC), 1816–1819, 2024.

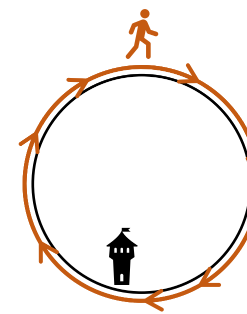
[LL97] S. Lin, K. Lin. A pinwheel scheduler for three distinct numbers with a tight schedulability bound. Algorithmica 19, 411–426, 1997.

輪番割当問題 (非整数への拡張)

1 以上の**実数**の組 $A = (a_1, \ldots, a_k)$ が与えられる
各仕事 i は**どの連続する $\lceil r \cdot a_i \rceil$ 日にも r 回以上**やる ($r = 1, 2, \ldots$)
これを満しながら毎日ひとつづつ仕事をやり続けられるか

例えば

一日に $\frac{5}{12}$ 周する一郎君
が　塔を横切る



例 $a_1 = \frac{12}{5} = 2.4$ は　仕事 1 を
どの　3 日間にも 1 回以上
どの　5 日間にも 2 回以上
どの　8 日間にも 3 回以上
どの 10 日間にも 4 回以上
どの 12 日間にも 5 回以上
行うべしという意味

これを満す一つの方法

ちょうど 2.4 日に一度 (時刻まで正確に) 起る出来事を考える

それが起る日に仕事 1 を行う

例 (2.4, 3.5, 3.5) は割当可能

非整数に拡張してもやはり

単調性 分割性 は成立つ

密度は $\mathrm{D}(A) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k}$ で定義

定理

$k = 2$ (すなわち $A = (a_1, a_2)$) かつ $\mathrm{D}(A) \le 1$ ならば A は割当可能

∵ 次の「池のほとりの塔」法 (と **単調性**) より

例 $a_1 = \frac{12}{5} = 2.4$ は 仕事 1 を
どの 3 日間にも 1 回以上
どの 5 日間にも 2 回以上
どの 8 日間にも 3 回以上
どの 10 日間にも 4 回以上
どの 12 日間にも 5 回以上
行うべしという意味

これを満す一つの方法

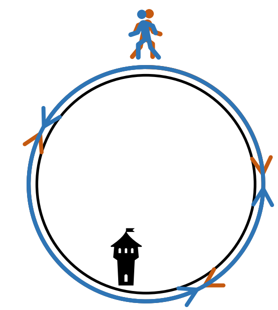
ちょうど 2.4 日に一度 (
正確に) 起る出来事を考

それが起る日に仕事 1

$\left(\frac{12}{5}, \frac{12}{7}\right)$ に対する解

残った日に仕事 2 を行うと
$a_2 = \frac{12}{7}$ の条件を満す

一日に $\frac{5}{12}$ 周する一郎君
一日に $\frac{7}{12}$ 周する二郎君



系 (再掲) [HRTV92]

$A = (\underbrace{e_1, \dots, e_1}_{k_1}, \underbrace{e_2, \dots, e_2}_{k_2})$ (二種類の数からなる) かつ $\mathrm{D}(A) \le 1$ ならば A は割当可能

∵ $\left(\frac{e_1}{k_1}, \frac{e_2}{k_2}\right)$ が割当可能ゆえ **分割性** より

[HRTV92] R. Holte, L. Rosier, I. Tulchinsky, D. Varvel. Pinwheel scheduling with two distinct numbers. Theoretical Computer Science 100, 105–135, 1992.

定理 (再掲)

整数からなる

$\mathrm{D}(A) \leq \frac{5}{6}$ なる $A \subseteq \{2, 3, \dots\}$ は割当可能

補題

$\mathrm{D}(B) < \frac{29}{33}$ なる $B \subseteq \{2, 3, \dots, 22\} \cup (11, 22]$ は割当可能

計算機で確認
先程の状態遷移図の方法で調べ尽し

$A = (2, 5, 15, 40, 51, 87)$

①

$(2, 5, 15, 40, \underline{51, 51})$

②

$(2, 5, 15, 25.5, 40)$

①

$(2, 5, 15, \underline{25.5, 25.5})$

②

$B = (2, 5, 12.75, 15)$

「補題⇒定理」の証明

A が (定理に反して) 割当不可能だったとする

A の中身がみな 22 以下になるまで次の操作①②を繰返し　結果を B とする

① A の最大元が一つならば　それを減らしてゆく

② A の最大元が複数あれば　その二つ (a, a とする) を纏めて $\frac{a}{2}$ にする

すると B は割当不能で $\mathrm{D}(B) < \mathrm{D}(A) + \frac{1}{22} \leq \frac{29}{33}$ なので　補題に反する

操作 ①② は 単調性 分割性 の逆なので

定理 (

$\mathrm{D}(A) \leq$

補題

$\mathrm{D}(B) <$

割当可

確認

遷移図

べ尽し

$A = (2, 5, 15, 40, 51, 87)$

↓ ①

$(2, 5, 15, 40, 51, 51)$

↙ ②

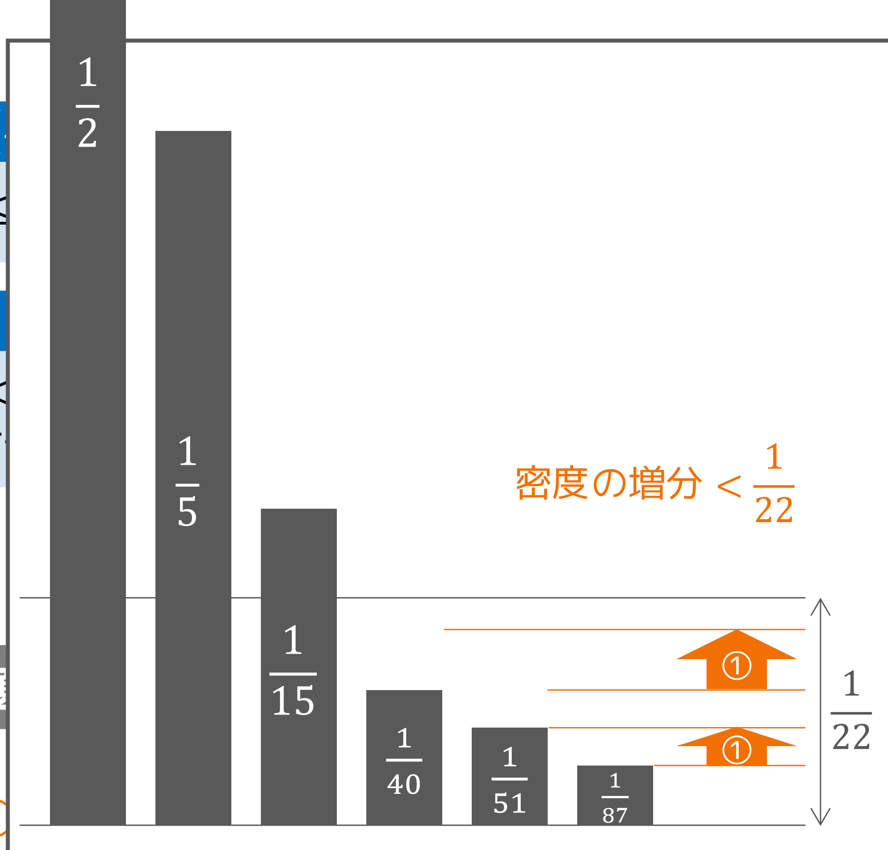
$(2, 5, 15, 25.5, 40)$

↓ ①

$(2, 5, 15, 25.5, 25.5)$

↙ ②

$B = (2, 5, 12.75, 15)$



「補題

不可能だったとする

A の

繰返し　結果を B とする

①

く

② A の最大元

であれば　その二つ (a, a とする) を纏めて $\frac{a}{2}$ にする

すると B は割当不能で $\mathrm{D}(B) < \mathrm{D}(A) + \frac{1}{22} \leq \frac{29}{33}$ なので　補題に反する

操作 ①② は 単調性 分割性 の逆なので

定理 (再掲)

整数からなる

$\mathrm{D}(A) \le \frac{5}{6}$ なる $A \subseteq \{2, 3, \dots\}$ は割当可能

補題

計算機で確認
先程の状態遷移図の方法で調べ尽し

$\mathrm{D}(B) < \frac{29}{33}$ なる $B \subseteq \{2, 3, \dots, 22\} \cup (11, 22]$ は
各数を整数に切捨てても　割当可能

すなわち　$\mathrm{D}'(B') < \frac{29}{33}$ なる $B' \subseteq \{2, 3, \dots, 21\}$ は割当可能

D′ は「11 以上の数には 1 足してから求めた密度」

$A = (2, 5, 15, 40, 51, 87)$
↓ ①
$(2, 5, 15, 40, 51, 51)$
↙ ②
$(2, 5, 15, 25.5, 40)$
↓ ①
$(2, 5, 15, 25.5, 25.5)$
↙ ②
$B = (2, 5, 12.75, 15)$
↓ 直下の整数に切捨て
$B' = (2, 5, 12, 14)$
$\mathrm{D}'(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}$

「補題⇒定理」の証明

A が (定理に反して) 割当不可能だったとする

A の中身がみな 22 以下になるまで次の操作①②を繰返し　結果を B とする

① A の最大元が一つならば　それを減らしてゆく
② A の最大元が複数あれば　その二つ (a, a とする) を纏めて $\frac{a}{2}$ にする

すると B は割当不能で $\mathrm{D}(B) < \mathrm{D}(A) + \frac{1}{22} \le \frac{29}{33}$ なので　補題に反する

操作 ①② は 単調性 分割性 の逆なので

定理 (再掲)

整数からなる

$\mathrm{D}(A) \le \frac{5}{6}$ なる $A \subseteq \{2, 3, \dots\}$ は割当可能

補題 (再掲)

$\mathrm{D}'(B') < \frac{29}{33}$ なる $B' \subseteq \{2, 3, \dots, 21\}$ は割当可能

そのような B' は 25 592 971 個ある

計算機を使わない (人が読める長さの)
証明は得られていない

実験で判ってきたこと

じつは危ういのは a_1 が小さい場合だけ

定理 [GJKLLMR24]

$\varepsilon(a) = O\left(\sqrt{1/a}\right)$ なる $\varepsilon\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}_+$ が存在して
任意の $\mathrm{D}(A) \le 1 - \varepsilon(a_1)$ なる
$A = (a_1, \dots, a_k)$ は割当可能

予想

これは $\varepsilon(a) = \frac{a-1}{a(a+1)}$ で成立

($(a, a+1, a+1, \dots, a+1, b)$ が割当不能なぎりぎりの例)

じつは整数条件は不要かも？

予想

$\mathrm{D}(A) \le \frac{5}{6}$ なる A は
(非整数を含んでも) 割当可能

定理 [MFO25]

これは $k \le 3$ なら成立つ

[MFO25] 宮城，藤原，大内．実数周期の輪番割当6分の5予想．2024年度冬の LA シンポジウム．令和7年1月．
[GJKLLMR24] L. Gąsieniec, T. Jurdziński, R. Klasing, C. Levcopoulos, A. Lingas, J. Min, T. Radzik. Perpetual maintenance of machines with different urgency requirements. Journal of Computer and System Sciences 139, 103476, 2024.

研究について (所感・雑談)

- 研究は先人の積み重ねの上に行うもの
  - 但し今回は考え始めて暫くの間　先行研究が見つけられなかった
    - 輪番割当はそこそこ有名なようだが　実質的に同じ問題が別の名前で扱われていたりする
  - 「未解決問題」は無数にある (重要なものも　しょぼいものも)
- すべてがうまくゆくことはほぼ無い
  - 本当は計算機に頼らない証明を得たかったが　できなかった
  - 多くの部分的結果が先行論文として書かれていたからこそできた
- 一つの題材にも様々な切り口
  - 与えられた $(a_1, \ldots, a_k)$ の割当可能性を判定する計算量は？
    - 先述の状態遷移グラフによる方法は　入力長に対する指数的な時間がかかる
    - 多項式時間でできるか不明　**NP** 困難か否かも 不明
  - 当初の目標は果せなくても　何らかのことはできる
- 基礎研究と応用研究
  - 現実の事象は複雑　→数学的に抽象化・単純化した問題で考える
  - 輪番割当にも多くの関連する応用問題がある
    - 「割当可能か否か」だけでなく　頻度条件を「なるべく満す」最適化
    - より現実的な設定でヒューリスティクスの評価などをする研究も数多い
- 真面目な研究と一発ネタ研究

Pinwheel scheduling

Add languages

~~Revision as of 22:13, 18 March 2024~~ (edit)	Revision as of 04:48, 19 November 2024 (edit) (undo)
Mazewaxie (talk | contribs)	Moon motif (talk | contribs)
m (WP:GENFIXES)	(density threshold conjecture for pinwheel scheduling proven! 🥳)
(Tag: AWB)	(Tag: Visual edit)
← Previous edit	Next edit →

⋮

Density

⋮

This condition on density is also sufficient for a schedule to exist in the special case that all repeat times are multiples of each other. For instance, this would be true when all repeat times are powers of two. In this case one can solve the problem using a disjoint covering system.[1] Having density at most 1 is also sufficient when there are exactly two distinct repeat times.[2] However, having density at most 1 is not sufficient in some other cases. In particular, there is no schedule for three items with repeat times $t_1 = 2$, $t_2 = 3$, and t_3, no matter how large t_3 may be, even though the density of this system is only $5/6 + 1/t_3$.[3]

~~Every instance of pinwheel scheduling with density at most $3/4$ has a solution,[4] and it has been conjectured that every instance with density at most $5/6$ has a solution.[3][5] Every instance with three distinct repeat times and density at most $5/6$ does have a solution.[5] Additionally, case analysis has confirmed that every instance with at most 12 tasks and density at most $5/6$ has a solution.[6][7]~~

~~**Unsolved problem in computer science:**~~

~~*Does every pinwheel scheduling problem with density at most 5/6 have a solution?*~~

~~(more unsolved problems in computer science)~~

In 1993, it was conjectured that, when the density of a pinwheel scheduling is at most $5/6$, a solution exists.[3] This was later proven in 2024.[4]

各仕事 i を「a_i 日**以内**に一度」ではなく「a_i 日**ちょうど**」を要求すると……

輪番きっかり割当問題 (詰込型) [WL83・Sun92]

与えられた正整数の組 $(a_1, \dots, a_k)$ に対し　組 $(r_1, \dots, r_k)$ をうまく選んで
集合 $[r_i]_{a_i} = \{ a_i n + r_i \mid n \in \mathbf{Z} \}$ $(i = 1, \dots, k)$ を重なりなくできるか

できるとき組 $(a_1, \dots, a_k)$ は (詰込) **きっかり割当可能**であるという

例

$(2, 2)$　き割当可能

$(3, 5)$　き割当不可能 (中国剰余定理)

$(4, 6)$　き割当可能 (∵ 次の仕事集合の一部なので)

$(4, 4, 6, 6, 6)$　き割当可能 (∵ $(2, 2)$ から 分割性 で得られるので)

$(4, 6, 10)$　き割当不可能 (∵ 偶または奇数日めに複数の仕事が入り　　　かる)

$(6, 6, 10, 10, 15)$　き割当可能

どの2行にも相異なる列が存在するように記入できるか？という問題

	2	3	5	
6	0	0		$[0, 0]_{2,3} = [0]_6$
6	0	1		$[0, 1]_{2,3} = [4]_6$
10	1		0	$[1, 0]_{2,5} = [5]_{10}$
10	1		1	$[1, 1]_{2,5} = [1]_{10}$
15		2	2	$[2, 2]_{3,5} = [2]_{15}$

2 で割ると 0 余り
3 で割ると 0 余る

6 で割ると 0 余る

きっかり割当可能性判定は
NP に属する

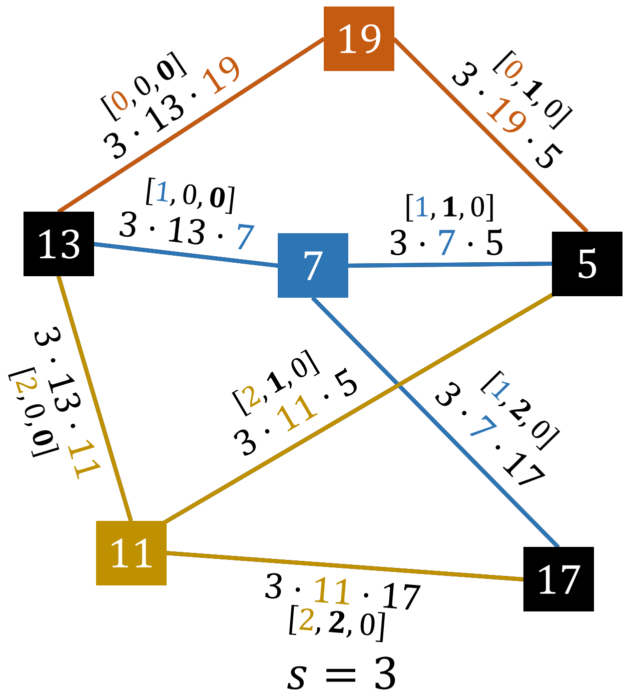
また **NP** 完全でもある (次頁)

[WL83] W.D. Wei, C.L. Liu. On a periodic maintenance problem. Operations Research Letters 2, 90–93, 1983.
[Sun92] Z. Sun. On disjoint residue classes. Discrete Mathematics 104, 321–326, 1992.

定理 [KS20]

輪番きっかり割当問題 (詰込型) は **NP** 完全

証明概略 無三角グラフの点被覆 (vertex cover) [Ueh96] からの帰着



グラフ $(V, \{1, \dots, k\})$ と数 $s \in \mathbf{N}$

このグラフに大きさ $\leq s$ の点被覆あり

次のように作る $(a_1, \dots, a_k)$

割当可能

各 $u \in V$ に相異なる大きな素数 p_u を割当て

各辺 $i = uv$ に対し　$a_i = s \cdot p_u \cdot p_v$ とする

中華剰余定理により　a_i による剰余 r_i は
s, p_u, p_v それぞれによる剰余 r_{i1}, r_{i2}, r_{i3} で指定される
そこで $r_i = [r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}]_{s, p_u, p_v}$ と書く（図では添字を省略）

[KS20] A. Kawamura, M. Soejima. Simple strategies versus optimal schedules in multi-agent patrolling. Theoretical Computer Science 839, pp. 195–206, 2020.

[Ueh96] R. Uehara. NP-complete problems on a 3-connected cubic planar graph and their applications. 東京女子大学紀要論集

仕事を要求よりも早くやる余裕がない

密度がちょうど 1 の入力に限ると　「割当可能性」と「きっかり割当可能性」は一致

この問題すら **NP** 完全であろうという予想 [KS20] があるが　示されていない

但し入力に簡潔な書き方を許すと

定理

密度ちょうど 1 の入力に限っても　輪番割当問題 (詰込型) は
もし入力中で「$\underbrace{e, \dots, e}_{l}$」の代りに「$e$ が l 個」と書けるのなら **NP** 完全

l を二進法で

証明　輪番きっかり割当問題 (先程 **NP** 完全と示した) から次で帰着できる

輪番きっかり割当の入力　$A = (a_1, \dots, a_k)$

↓

輪番割当の密度 1 の入力　$(a_1, \dots, a_k,$「$a_1 \cdots a_k$ が $a_1 \cdots a_k \cdot (1 - \mathrm{D}(A))$ 個」$)$

もとの表現で入力する場合　もとの問題 (非きっかり・密度一般) は
先程の状態グラフの方法により **PSPACE** に属するが
NP に属するか否かも　**NP** 困難か否かも判っていない

[KS20] A. Kawamura, M. Soejima. Simple strategies versus optimal schedules in multi-agent patrolling. Theoretical Computer Science 839, 195–206, 2020.

「詰込」でなく「被覆」

輪番割当問題 (被覆型) (point patrolling) [KS20]

各人 $i = 1, 2, \dots, k$ は **連続する a_i 日に一度以下** しか働けない
これを満しながら毎日だれか一人づつを働かすことはできるか

できるとき組 $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ は **(被覆) 割当可能**であるという

例

$(2, 4, 4)$ 割当可能 ･･･  ･･･

$(2, 4, 5)$ 割当不可能 $\left(\because \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < 1 \text{ なので}\right)$

$(2, 3, 4)$ 割当可能

$(2, 3)$ 割当不可能 (4 日間さえも)

$(2, 3, 5)$ 割当不可能 (8 日間さえも)

$(2, 3, 5, 9)$ 割当不可能 (16 日間さえも)

$\vdots$

$(2, 3, 5, 9, \dots, 2^n + 1)$ 割当不可能

単調性 割当可能な入力の或る数を
より**小さい**数に変えても割当可能

分割性 割当可能な入力の或る数を
2 倍の数 2 個に変えても割当可能

先程と同様に $\mathrm{D}(A) \geq 1$ は明らかに必要 $\mathrm{D}(A) \geq 2$ なら十分

定理 (未発表・先程と同様な手法で)

$\mathrm{D}(A) \geq \frac{113}{80}$ ならば割当可能
$(= 1.4125)$

予想

$\mathrm{D}(A) \geq 1.264 \dots$ ならば割当可能
($(2, 3, 5, 9, \dots)$ の密度)

[KS20] A. Kawamura, M. Soejima. Simple strategies versus optimal schedules in multi-agent patrolling. Theoretical Computer Science 839, 195–206, 2020.

輪番きっかり割当問題 (被覆型)

与えられた正整数の組 $(a_1, \ldots, a_k)$ に対し　組 $(r_1, \ldots, r_k)$ をうまく選んで
集合 $[r_i]_{a_i} = \{\, a_i n + r_i \mid n \in \mathbf{Z} \,\}$ $(i = 1, \ldots, k)$ が $\mathbf{Z}$ 全体を覆うようにできるか

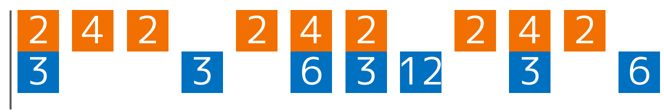
例

$(2, 2)$ き割当可能

$(2, 3, 3)$ き割当不可能

$(2, 4, 4)$ き割当可能

$(2, 3, 4, 6, 12)$ き割当可能



詰込型よりも難しそう

与えられた組 $(r_1, \ldots, r_k)$ が
条件を満すか判定する問題が既に
coNP 完全 (次頁)

「相異なる $a_1, \ldots, a_k$ による被覆」についての
エルデシュの問題：

定理 [Hou15] ([Erd50] の予想を解決)

$10^{16} < a_1 < \cdots < a_k$ なる A はき割当不可能

[Hou15] B. Hough. Solution of the minimum modulus problem for covering systems. Annals of Mathematics 181, 361–382, 2015.
[Erd50] P. Erdős. On integers of the form $2^k + p$ and some related problems. Summa Brasiliensis Mathematicae 2, 113–123, 1950.

定理 [KKK25]

与えられた集合 $\{ (a_i, r_i) \mid i \in I \}$ に対し

$\bigcap_{i \in I} \overline{r_i \bmod a_i} \neq \emptyset$ か判定する問題は **NP** 完全（$\overline{\cdot}$ は補集合）

証明 3SATからの帰着

命題変数 $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ の現れる3CNF式 Φ

Φ を充足する割当が存在

$(b_1, \dots, b_n) \in \{0,1\}^n$

次のように作る $\{ (a_i, r_i) \mid i \in I \}$

$\bigcap_{i \in I} \overline{r_i \bmod a_i}$ の元が存在

$[b_1, \dots, b_n]_{p_1, \dots, p_n}$

相異なる n 個の素数 $p_1, \dots, p_n$ を用意して

- 各変数 X_i に対し $(p_i, 2), (p_i, 3), \dots, (p_i, p_i - 1)$
- Φ の各節 $\neg^{e_1} X_{i_1} \vee \neg^{e_2} X_{i_2} \vee \neg^{e_3} X_{i_3}$ に対し $\left(p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot p_{i_3}, [e_1, e_2, e_3]_{p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}}\right)$

[KKK25] A. Kawamura, Y. Kobayashi and Y. Kusano. Pinwheel Covering. In Proc. 14th International Conference on Algorithms and Complexity. LNCS 15680, pp. 185–199, 2025.

まとめ

正整数の組 $A = (a_1, \dots, a_k)$ が与えられたとき
① 集合 $A_1, \dots, A_k \subseteq \mathbf{Z}$ であって
各 $i = 1, \dots, k$ と長さ a_i の任意の区間 I について
$|A_i \cap I|$ ② を満すものはあるか

詰込型	きっかり詰込型 (NP 完全)	
①互に交らない ② ≥ 1	①互に交らない ② $= 1$	$\mathrm{D}(A) \leq 1$ が必要
被覆型	**きっかり被覆型 (NP 困難)**	
① $\mathbf{Z}$ 全体を覆う ② ≤ 1	① $\mathbf{Z}$ 全体を覆う ② $= 1$	$\mathrm{D}(A) \geq 1$ が必要

密度 $\mathrm{D}(A) = 1$ に制限すると　これら四問題は一致
(整数全体を重なりなく分割する問題 [Zná69])

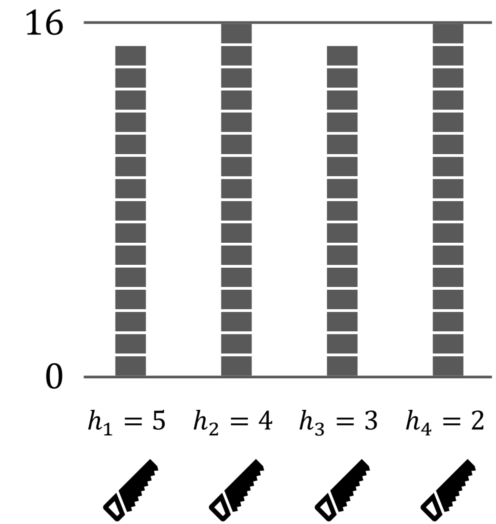
予想 [KS20]

この問題すら **NP** 完全

[Zná69] Š. Znám. On exactly covering systems of arithmetic sequences. Mathematische Annalen 180, 227–232, 1969.
[KS20] A. Kawamura, M. Soejima. Simple strategies versus optimal schedules in multi-agent patrolling. Theoretical Computer Science 839, 195–206, 2020.

竹叢伐採問題 (bamboo garden trimming) [GJKLLMR24]

各竹 $i = 1, \dots, k$ が日速 h_i で伸びる
毎日一本づつ伐って　全体の高さをなるべく低く保ちたい



目標値 K に抑えるには？

竹 i を $a_i = \left\lfloor \frac{K}{h_i} \right\rfloor$ 日に一度以上伐れという輪番割当と同じ

でもここでは　最適化問題である竹叢伐採 (なるべく低く) で　近似率を考えたい

先程の密度限界は竹叢伐採の近似算法？

→ちがうけど　全く関係なくはない (次頁)

[GJKLLMR24] L. Gąsieniec, T. Jurdziński, R. Klasing, C. Levcopoulos, A. Lingas, J. Min, T. Radzik. Perpetual maintenance of machines with different urgency requirements. Journal of Computer and System Sciences 139, 103476, 2024.
※会議版SOFSEM 2017

竹叢伐採問題の ρ 近似 (と実質的に同じ言換え) $\rho \geq 1$

輪番割当の割当可能な入力 $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ が与えられる
各項を少しだけ (ρ 倍以内だけ) 増やしたものを満す解を求めよ

$\{3, 4, 5, 8\}$ の解は？

すみません、それは難しいが
$\{3, 5, 6, 10\}$ の解なら○○です

$\frac{5}{4}$ 近似算法

定理 (再)

密度が $\leq \frac{1}{2}$ の集合は (詰込) 割当可能

割当可能な入力の各項を 2 倍すれば
(密度が ≤ 1/2 になるので) 定理より割当可能

→竹叢伐採の 2 近似

定理 (再)

密度が $\leq \frac{5}{6}$ の集合は (詰込) 割当可能

割当可能な入力の各項を 6/5 倍以上すれば
(密度が ≤ 5/6 になるので) 定理より割当可能

→竹叢伐採の 1.5 近似

a_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
$\left\lceil \frac{6}{5} \cdot a_i \right\rceil$	3	4	5	6	8	9	10	11	12	14	…
何倍？	1.50	1.33 …	1.25	1.20	1.33 …	1.28 …	1.25	1.22 …	1.20	1.27 …	

こいつさえ無ければ $\frac{4}{3} = 1.33\ldots$ 近似なのに……　(従来の近似率は $\frac{10}{7} = 1.42\ldots$ [HvS23])

[HvS23] F. Höhne and R. van Stee. A 10/7-approximation for discrete bamboo garden trimming and continuous trimming on star graphs. In Proc. 26th International Workshop on Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization Problems (APPROX), Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs) 275, Article 16, 2023.

先程の例のように「3 日に一度やるべき仕事」をあえて 2 日後にやるべき時もある

$(3, 4, 5, 8)$

しかし「2 日に一度やるべき仕事」は　常にちょうど 2 日ごとにやるのが最良

$(2, \ldots)$

同じ仕事を 2 日続けてやるのは
どう考えてもムダ

したがって次の算法が $\frac{4}{3}$ 近似を達成する

$a_1 = 2$ の場合

仕事 1 はちょうど 2 日ごとにやることに決めてしまう
残りの仕事は割当可能 (すなわち $\left\{\left\lfloor \frac{1}{2} \cdot a_2 \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{1}{2} \cdot a_k \right\rfloor\right\}$ は割当可能)
この $k-1$ 個の仕事に対して再帰的に解を求めればよい

$a_1 \neq 2$ の場合 (2 日に一度やるべき仕事というものがない場合)

各仕事の周期を $\frac{6}{5}$ 倍して切り上げると　密度 $\frac{5}{6}$ 以下なので解が求まる

今後の課題
- 近似率の改善
- これは「多項式時間」なのか？

今後の課題

密度による十分条件の証明について

- 計算機に頼らない証明が欲しい
- 被覆型でもぎりぎりの条件を示したい

与えられた $A = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ の割当可能性を判定する計算量

- 先述の状態遷移グラフ (頂点数 $\leq a_1 a_2 \cdots a_k$) による方法で **PSPACE**
- **NP** に属するか？　非きっかり型では不明
  (解の最短周期は入力長の多項式に収まらないことがある)
- $\mathrm{D}(A) = 1$ に制限すると **NP** には属する (**P** に属するかは不明)
- **NP** 困難か否かも (非きっかり型では) 不明

応用寄りの課題

- 仕事間に距離がある　頻度条件を破る度合によりコストがかかる　など
- より現実的な設定でヒューリスティクスの評価などをする研究も数多い