

現代の数学と数理解析

# 応対算法と競合比解析

令和3年5月21日 河村

アルゴリズム

# 算 法（戦略）の評価

- 算法とは 与えられる入力に対して何らかの答を出すやり方を予め定めたもの
- 無数にあり得るどの入力に対してもうまくいくことが求められる
- 最悪の場合によって評価する（ことが多い）：  
「任意の入力に対し 性能〇〇を達成」

その例として今日は……

※ 今日は「算法」「戦略」同じ意味で使います

# 応対戦略 (online algorithms)

- 入力が順次与えられ その場で対処
- 全体でかかる費用を なるべく減らしたい
- 評価尺度：**競合比**（後で定義します）  
「入力がすべて判ってから判断するのと比べて  
費用が何倍か」

# 1 スキー問題

スキー用品の値段は次の通りである.

- ・ レンタル（貸出）だと一回1万円
- ・ 買うと10万円（ずっと使える）

何回かスキーに行くのだが、  
どうすれば安上がりか。



もし  $x$  回行くとわかってたら

神の  
戦略

$x > 10$  なら初めから購入して 10 万円

$x \leq 10$  なら毎回借りて合計  $x$  万円

➡ かかる費用は  $\min\{x, 10\}$  万円



しかし実際には 未来のことはわからない

人の  
戦略

各時点で「まだ次にスキーに行く機会があるか」は  
全くわからないとする

でもその場その場で決断しなければならない！

➡ 最も運が悪かったときでも 損が小さくなるようにしたい

## 2 回借り 3 回目で買うと

- 最悪なのは 結局 3 回しか行かなかった場合
- $1 + 1 + 10 = 12$  万円かかる
- 神の戦略では 3 万円
- $12 \div 3 = 4$  倍かかった

初めから回数が判ってたら  
4 分の一で済んだのに……



かなしさ 4

これが 今日扱う  
戦略の評価尺度

➡この「最悪の場合の倍率」(競合比)を  
なるべく下げたい

# $x$ 回目で買うと

- 最悪なのは 結局  $x$  回しか行かなかったとき
- そのときの費用は  $(x - 1) + 10 = x + 9$  万円
- 神の戦略では  $\min\{x, 10\}$  で済んだ

競合比

$$x + 9$$

$$\frac{x + 9}{\min\{x, 10\}}$$

$x = 10$  にすると  
競合比が最小になる

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
競合比	10	5.5	4	3.25	2.8	2.5	2.29	2.13	2	1.9	2	2.1	2.2

## 2 机と本棚の問題



あなたは机に向って作業をしている．時々，本棚にある全  $n$  巻の百科事典のうち一冊を引く必要が生ずる．百科事典は大きいので，机の上に  $k$  冊しか置けない ( $k < n$ )．必要な巻がなければ本棚から取り，代りに一冊返す．

初めは机に第 1 巻から第  $k$  巻まで載っている．本棚へ行く回数を可能な限り減らすには，各回で返す巻をどのように選べばよいか．



※ 「本棚に行く回数」を「費用」と呼ぶことにする

(online algorithms)

(competitive ratio)

# 応対戦略と競合比

本棚問題では

見たくなる  
巻番号の列

要求列 (入力)  $r = r_1 r_2 \dots r_f$

応対戦略とは 今までの情報  $r_1 r_2 \dots r_t$  のみから  
要求  $r_t$  への対処を決める方法

本棚へ行く  
回数

戦略  $S$  に従って要求列  $r$  に応じたときの費用  $\text{cost}_S(r)$

最適行動で要求列  $r$  を処理したときの費用  $\text{mincost}(r)$

## 定義

応対戦略  $S$  が  $\alpha$  競合である ( $\alpha$  は 1 以上の数) とは  
すべての要求列  $r$  について

$$\text{cost}_S(r) \leq \alpha \cdot \text{mincost}(r)$$

が成立つことをいう

費用が  
神の  $\alpha$  倍で済む

そのような最小の  $\alpha$  の  $S$  の競合比という (1 に近いほど良い)

「本棚の問題」に対する

# 応対戦略の例

- LRU (least recently used)  
「最も長いあいだ使っていない巻」を返す
- LFU (least frequently used)  
「今までの累計の使用回数が最小の巻」を返す
- FIFO (first in, first out)  
「最も古くから机に在り続けている巻」を返す

但し同順位のうちでは巻番号が最も小さいものを返すものとする

例  $(n, k) = (9, 3)$  要求列 7 8 8 7 6 4 7 2

要求 ↓  
時刻 ↓

**LRU**  
最も長く使っていない巻

**LFU**  
最も使った回数が少ない巻

**FIFO**  
最も古くから机にある巻

	{1, 2, 3}		{1, 2, 3}		{1, 2, 3}	
7	{2, 3, 7}	1巻 を本棚に 戻す	{2, 3, 7}	1巻	{2, 3, 7}	1巻
8	{3, 7, 8}	2巻	{3, 7, 8}	2巻	{3, 7, 8}	2巻
8	{3, 7, 8}		{3, 7, 8}		{3, 7, 8}	
7	{3, 7, 8}		{3, 7, 8}		{3, 7, 8}	
6	{6, 7, 8}	3巻	{6, 7, 8}	3巻	{6, 7, 8}	3巻
4	{4, 6, 7}	8巻	{4, 7, 8}	6巻	{4, 6, 8}	7巻
7	{4, 6, 7}		{4, 7, 8}		{4, 6, 7}	8巻
2	{2, 4, 7}	6巻	{2, 7, 8}	4巻	{2, 4, 7}	6巻
		費用5		費用5		費用6

例  $(n, k) = (9, 3)$  要求列 7 8 8 7 6 4 7 2

問1 この例において費用 4 以下になる最適行動（神の手）を一つ挙げよ。

# 定理

LFU 戦略は競合比  $\infty$  (どの  $\alpha$  についても  $\alpha$  競合でない)

## 証明

$k = 2$  (机に置けるのが 2 冊) で 読む巻が順に  
 $1, 1, 1, \dots, 1, 3, 2, 3, 2, \dots, 3, 2$   
10001回 2×10000回 だったときを考える

この要求列を  
知っている神  
(最適行動)

この時点までは 1、2巻  
それ以後は 2、3 巻を机に常備  
→ 費用 1

LFU 戦略に  
従う人

後半で 2 巻と 3 巻を毎回交換してしまう  
→ 費用 20000

「10000」の代りにもっと大きくすれば この比は幾らでも広がる

## 定理

LRU 戦略は競合比  $k$  以下である ( $k$  競合である)

### 証明 (の概略)

LRU 戦略を使ったところ

或る時間帯に  $k$  回本棚に行ったとする

すると この時間帯には その直前に見た巻から数えて  
相異なる  $k + 1$  巻以上が要求されたのだから  
神であっても少なくとも 1 回本棚に行かねばならない

問2 FIFO 戦略は (LRU 戦略のように各  $k$  について) 有限の競合比をもつか.

## 競合比の限界（下界）

### 定理

本棚問題に競合比  $k$  未満の応対戦略なし

### 証明

どんな応対戦略を使っても 運が悪ければ毎回  
今ない巻ばかり見たくなることがある  
一方 神は常に「今後  $k$  回は全く使わない巻」を  
返すことができ  
そうすると本棚に行くのが  $k$  回に一度以下で済む

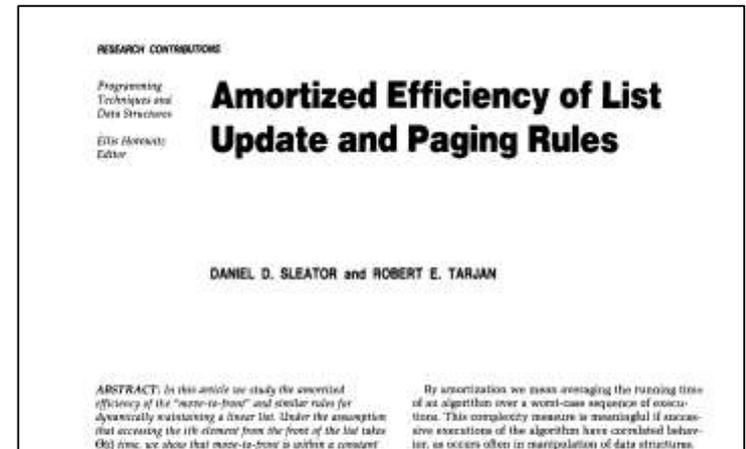
LRU 戦略が（競合比の意味では）最良であると判った！

# ページ割当

コンピュータの記憶領域（メモリ）の中にも  
「机」のような場所（小さいが高速に読める）と  
「本棚」のような場所（大きいけど時間がかかる）がある

特にコンピュータの計算では  
一秒に何千万回も「本を見る」ので  
うまく「机」と「本棚」を使いこなすのが非常に重要  
➡ どのような戦略がよいか 盛んに研究が行われた

D. D. Sleator and R. E. Tarjan.  
Amortized efficiency of list update and paging rules.  
Commun. ACM 28(2):202-208, 1985.



# 3 漢字候補提示問題

漢字変換で、読みが例えば「せいさん」と入力されたとき

生産 清算 青酸 正餐 凄惨 成算

のように候補を順に提示することを考える。選ばれた字は順位を早めて、例えば上記の候補列から「正餐」が選ばれたら

正餐 生産 清算 青酸 凄惨 成算

のように並べ替え、次はその順で示すとよいかもしいない。また「正餐」をいきなり先頭へ移す代わりに順位を一つ早めて

生産 清算 正餐 青酸 凄惨 成算

とすることも考えられる。このように、**使ったばかりの字の順位を早める**戦略について考える。

順位をおそくしたり  
他の字を動かしたり  
することは考えない

候補列を見た人が第  $i$  位 ( $i = 0, \dots, n - 1$ ) の字を選ぶには  $i$  秒かかるとする。字を順に幾つか入力するときのこの選択時間の和がなるべく短くなるように候補を提示したい。

# 応対戦略の例

- MTF 使った字は先頭に移す (move to front)
- M1 使った字は順位を (先頭でなければ) 一つ早める
- M0 順位を全く変えない

例  $n = 6$  初期配置 0 1 2 3 4 5 要求列 3 1 3 0 1

		MTF 先頭へ						M1 一つ前へ						M0 不動					
時刻	要求 ↓	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5
1	3	3	0	1	2	4	5	0	1	3	2	4	5	0	1	2	3	4	5
2	1	1	3	0	2	4	5	1	0	3	2	4	5	0	1	2	3	4	5
3	3	3	1	0	2	4	5	1	3	0	2	4	5	0	1	2	3	4	5
4	0	0	3	1	2	4	5	1	0	3	2	4	5	0	1	2	3	4	5
5	1	1	0	3	2	4	5	1	0	3	2	4	5	0	1	2	3	4	5
		費用 (所要時間) 10						費用 8						費用 8					

例  $n = 6$  初期配置 0 1 2 3 4 5 要求列 3 1 3 0 1

### 定理

MTF の競合比は 2 以上  
M0 の競合比は  $\infty$

### 証明

誰かわかりますか？

問3 M1 戦略は  $n$  に依らない有限な定数の競合比をもつか。  
 $n$  を固定したときはどうか。



# 定理

MTF の競合比は 2 以下 (なので結局ちょうど 2)

すなわち 要求列を任意に取って MTF と神にそれぞれ処理させ  
各時刻  $t$  にかかる費用をそれぞれ  $x_t$  と  $y_t$  とすると

$$\sum_t x_t \leq 2 \cdot \sum_t y_t$$

$x_t \leq 2 \cdot y_t$  でない  
時刻  $t$  はある

時刻 $t$	要求 ↓	MTF 使った字は先頭へ						$x_t$	神 (最適行動)						$y_t$
		0	1	2	3	4	5		0	1	2	3	4	5	
1	3	3	0	1	2	4	5	3秒	0	3	1	2	4	5	3秒
2	5	5	3	0	1	2	4	5秒	0	3	1	2	4	5	5秒
3	4	4	5	3	0	1	2	5秒	0	3	1	2	4	5	4秒
4	0	0	4	5	3	1	2	3秒	0	3	1	2	4	5	0秒
5	3	3	0	4	5	1	2	3秒	0	3	1	2	4	5	1秒

しかし  
そのような時には  
神と同じ状態に  
近づいている!  
(次頁)

費用 19

2倍以内

費用 13

時刻  $t$  (の直後) において 左図 (MTF) と右図 (神) との間で  
位置関係が逆であるような二字の組の個数を  $\phi_t$  とする

神の状態  
との距離

すなわち 
$$\phi_t = \sum_i \left( \begin{array}{l} \text{字 } i \text{ よりも左図では前に現れるが} \\ \text{右図では後に現れる字の個数} \end{array} \right)$$

補題

$$\Phi_t - \Phi_{t-1} \leq 2 \cdot y_t - x_t$$

時刻 $t$	要求 ↓	MTF 使った字は先頭へ	$x_t$	神 (最適行動)	$y_t$	$\Phi_t$
0		0 1 2 3 4 5		0 1 2 3 4 5		0
1	3	3 0 1 2 4 5	3秒	0 3 1 2 4 5	3秒	1
2	5	5 3 0 1 2 4	5秒	0 3 1 2 4 5	5秒	6
3	4	4 5 3 0 1 2	5秒	0 3 1 2 4 5	4秒	9
4	0	0 4 5 3 1 2	3秒	0 3 1 2 4 5	0秒	6
5	3	3 0 4 5 1 2	3秒	0 3 1 2 4 5	1秒	5

費用19
← 2倍以内
費用13

0 と 3 の  
位置関係が逆

更に  
5 と 0~4 との  
位置関係も逆

時刻  $t$  (の直後) において 左図 (MTF) と右図 (神) との間で位置関係が逆であるような二字の組の個数を  $\phi_t$  とする

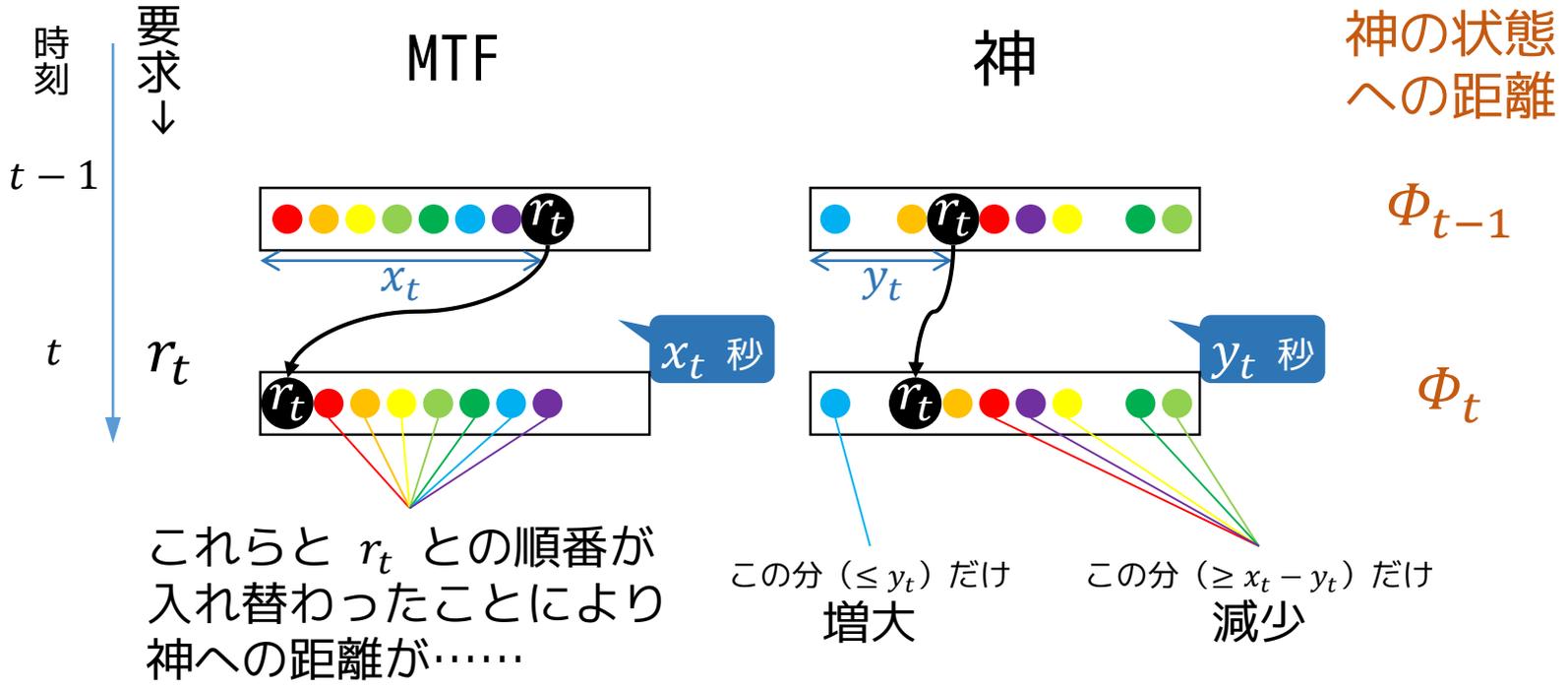
すなわち 
$$\phi_t = \sum_i \left( \begin{array}{l} \text{字 } i \text{ よりも左図では前に現れるが} \\ \text{右図では後に現れる字の個数} \end{array} \right)$$

補題

$$\phi_t - \phi_{t-1} \leq 2 \cdot y_t - x_t$$

証明

※ 課題の提出で証明をするときはこういう絵だけではダメです  
ちゃんと解り易い文章による説明を書くこと



## 定理（再）

### MTF の競合比は 2 以下

要求列  $r = r_1 \cdots r_f$  を任意に取り  $x_t, y_t, \Phi_t$  を前頁の通り定義すると

#### 補題

$$\Phi_t - \Phi_{t-1} \leq 2 \cdot y_t - x_t$$

#### 定理の証明

補題より

$$\sum_{t=1}^f (2 \cdot y_t - x_t) \geq \sum_{t=1}^f (\Phi_t - \Phi_{t-1}) = \Phi_f \geq 0$$

なので

$$\text{cost}_{\text{MTF}}(r) = \sum_{t=1}^f x_t \leq 2 \cdot \sum_{t=1}^f y_t = 2 \cdot \text{mincost}(r)$$

## 定理

漢字提示問題に競合比 2 未満の応対戦略なし

## 証明

どの応対戦略を使っても  
末尾の字ばかり要求してくる列はあり  
その場合毎回  $n - 1$  秒かかる  
一方この要求列全体を初めから知っていれば  
頻度順に並べたまま動かさないことにより  
平均  $(n - 1)/2$  秒くらいにできる

# 4 作業員派遣問題

あなたは全国各地に配置された  $k$  人の作業員を指揮しており、各作業員がどこにいるか常に把握している（初めは本社に全員いるとする）。毎回どこかで一つ仕事の依頼があり、あなたは作業員の一人を向わせる。仕事が終わると作業員はそこに留まる。

移動距離の総和を節約するには、各時点で派遣する作業員をどう選ぶべきか。

「距離」 $d$  は非負で以下を満すとする

$$d(x, x) = 0$$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

# 単純な戦略

毎回最も近くにいる人を派遣

競合比は？  $\infty$

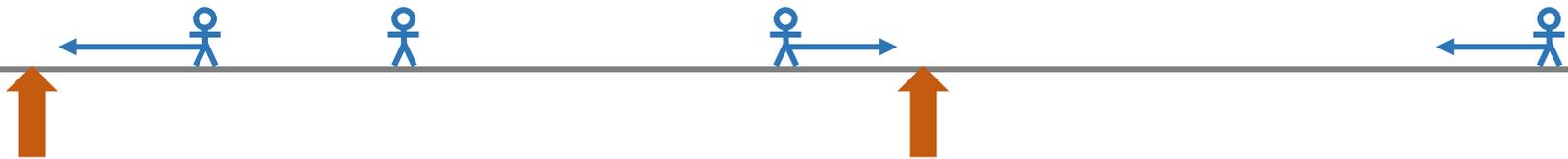


目先の利益だけで行動するのは良くない（ことがある）

# 世界が一本の直線である場合

## 両側接近戦略

- 仕事の依頼が全作業員の外側に来たとき  
→最も近い作業員が対処
- 間に来たとき  
→最も近い作業員が対処  
反対側の最も近い作業員も同じ距離だけ接近



※ 厳密には「一人だけを向わせる」という条件を満たしていないが動きを先延しすることにより満すようにできる

# 定理

## 両側接近戦略の競合比は $k$ 以下

方針 漢字提示問題の MTF のときと同様に「神との違いを表す量」を作る

### 証明

勝手な要求列と神の最適行動とを一つ固定する

時刻  $t$  での移動距離が 両側接近戦略では (2人の場合は合せて)  $x_t$   
 $t$  個目の仕事が来た時のこと 最適行動では  $y_t$  であるとする

また時刻  $t$  の直後の作業員の位置が 両側接近戦略では点  $s_1, \dots, s_k$   
最適行動では点  $a_1, \dots, a_k$

になる ( $s_1 \leq \dots \leq s_k, a_1 \leq \dots \leq a_k$ ) とき

$\Phi_t =$

?

と定める このとき

$s_1, \dots, s_k$  と  $a_1, \dots, a_k$   
を使った非負の値

### 補題

$$\Phi_t - \Phi_{t-1} \leq k \cdot y_t - x_t$$

問4 うまく  $\Phi_t$  を定めて補題を示し, 定理の証明を完成せよ.

# 本棚問題は作業員問題の一部

どの二地点間も距離が 1 であるという

## 本棚問題

$n$  巻の事典のうち机の上に  $k$  巻机の上にない巻が見たくなったら机にある巻のうち一つと取換えこのとき費用 1 が生ずる

## 作業員問題の 特殊な場合

$n$  個の町のうち  $k$  個に作業員いない町で仕事の依頼があるとどこかの町から作業員を移動このとき費用 1 が生ずる

同じこと！

## 定理

(一般の距離空間における)

作業員問題に競合比  $k$  未満の応対戦略なし

∴ 本棚問題という特殊な場合にすら無いので

# 競合比の限界は？

(一般の距離空間で)

## 未解決問題

## 競合比 $k$ の応対戦略はあるのか？

判っていること (既述)

- ・ 一直線上という特殊な場合なら競合比  $k$  にできる
- ・ どの二点間も距離 1 という特殊な場合ですら競合比  $k$  未満は無理

他にも色々と特殊な場合については判っている

一般の距離空間では

## 定理 [KP95]

## 競合比 $\leq 2 \cdot k - 1$ の応対戦略あり

[KP95]

E. Koutsoupias and C. H. Papadimitriou.  
On the  $k$ -server conjecture.  
Journal of the ACM 42(5):971-983, 1995.

### On the $k$ -Server Conjecture

ELIAS KOUTSOPIAS

*University of California at Los Angeles, Los Angeles, California*

AND

CHRISTOS H. PAPANIMITRIOU

*University of California at San Diego, La Jolla, California*

Abstract. We prove that the *work function algorithm* for the  $k$ -server problem has a competitive ratio at most  $2k - 1$ . Manasse et al. [1988] conjectured that the competitive ratio for the  $k$ -server problem is exactly  $k$  (it is trivially at least  $k$ ); previously the best-known upper bound was

# まとめ (1)

- 戦略 (算法)
  - あらゆる入力に対処する一つの方法
  - あらゆる入力で一定の性能を達成するのが目標
- 性能の限界を証明する難しさ
  - 「どんな入力に対しても〇〇の性能を達成する」
  - 「どんな戦略でも〇〇までは達成できない」

# まとめ (2)

- 問題設定・評価尺度の定式化
  - 漠然とした目標を明確にする
  - 単純で抽象的な問題を考えることで他の状況に応用できるかも
- 競合比は良い評価尺度か？ → 正直微妙な所も
  - 最悪の入力による評価でよいのか？（現実には普通良く使う漢字とか客が多い地域とかは判っている）
  - そもそも神と比べて後悔するとかいう現実性の無さ
  - 他にも重要な側面は勿論いろいろある（計算し易さとか 作業員間の公平さとか）

# 課題

スライド中の **問1** **問2** **問3** **問4** (または **未解決問題**) のうち 1問以上を解き PandA の所定の場所に提出せよ

**提出期限** 6月4日 (金) 23:55

## 採点基準

- できてる → 4点
- おいしい → 3点
- できてない → 0~2点
- すごい → 5点

特に解りやすく記述されている  
独自の鋭い考察がある など