現代の数学と数理解析

応対算法と競合比解析

令和8年5月29日　河村

※ この講義資料は KULMS（課題のページ）にも載ります

アルゴリズム
算 法（戦略）の評価

- 算法とは　与えられる入力に対して
  何らかの答を出すやり方を予め定めたもの
- 無数にあり得るどの入力に対しても
  うまくいくことが求められる
- 最悪の場合によって評価する（ことが多い）：
  「任意の入力に対し　性能○○を達成」

その例として今日は……

※ 今日は「算法」「戦略」同じ意味で使います

応対戦略（online algorithms）

- 入力が順次与えられ　その場で対処
- 全体でかかる費用を　なるべく減らしたい
- 評価尺度：**競合比**（後で定義します）
「入力がすべて判ってから判断するのと比べて
　費用が何倍か」

1　スキー問題

スキー用品の値段は次の通りである.

・レンタル（貸出）だと一回1万円

・買うと10万円（ずっと使える）

何回かスキーに行くのだが,
どうすれば安上がりか.

もし x 回行くとわかってたら

神の戦略

$x > 10$ なら初めから購入して 10 万円
$x \leq 10$ なら毎回借りて合計 x 万円

➡　かかる費用は $\min\{x, 10\}$ 万円

しかし実際には　未来のことはわからない

人の戦略

各時点で「まだ次にスキーに行く機会があるか」は
全くわからないとする
でもその場その場で決断しなければならない！

➡　最も運が悪かったときでも　損が小さくなるようにしたい

2 回借り 3 回目で買うと

- 最悪なのは　結局 3 回しか行かなかった場合
- $1 + 1 + 10 = 12$ 万円かかる
- 神の戦略では 3 万円
- $12 \div 3 = 4$ 倍かかった

初めから回数が判ってたら
4 分の一で済んだのに……

かなしさ 4

これが　今日扱う
戦略の評価尺度

➡この「最悪の場合の倍率」（**競合比**）を
なるべく下げたい

x 回目で買うと

- 最悪なのは　結局 x 回しか行かなかったとき
- そのときの費用は $(x-1)+10 = x+9$ 万円
- 神の戦略では $\min\{x, 10\}$ で済んだ

競合比

$$\frac{x+9}{\min\{x, 10\}}$$

$x = 10$ にすると
競合比が最小になる

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
競合比	10	5.5	4	3.25	2.8	2.5	2.29	2.13	2	1.9	2	2.1	2.2

2　机と本棚の問題

あなたは机に向って作業をしている．時々，本棚にある全 n 巻の百科事典のうち一冊を引く必要が生ずる．百科事典は大きいので，机の上に k 冊しか置けない（$k < n$）．必要な巻がなければ本棚から取り，代りに一冊返す．

初めは机に第 1 巻から第 k 巻まで載っている．本棚へ行く回数を可能な限り減らすには，
各回で返す巻をどのように選べばよいか．

※　「本棚に行く回数」を「費用」と呼ぶことにする

（online algorithms）　　　（competitive ratio）

応対戦略と競合比

本棚問題では

見たくなる
巻番号の列

要求列 (入力) $r = r_1 r_2 \ldots r_f$

応対戦略とは　今までの情報 $r_1 r_2 \ldots r_t$ のみから
要求 r_t への対処を決める方法

本棚へ行く
回数

戦略 S に従って要求列 r に応じたときの費用 $\mathrm{cost}_S(r)$

最適行動で要求列 r を処理したときの費用 $\mathrm{opt}(r)$

定義

応対戦略 S が α **競合**である (α は 1 以上の数) とは
すべての要求列 r について

$$\mathrm{cost}_S(r) \le \alpha \cdot \mathrm{opt}(r)$$

が成立つことをいう

費用が
神の α 倍で済む

そのような最小の α の S の**競合比**という（1 に近いほど良い）

「本棚の問題」に対する
応対戦略の例

- LRU（least recently used）
「最も長いあいだ使っていない巻」を返す
- LFU（least frequently used）
「今までの累計の使用回数が最小の巻」を返す
- FIFO（first in, first out）
「最も古くから机に在り続けている巻」を返す

但し同順位のうちでは巻番号が最も小さいものを返すものとする

例　$(n, k) = (9, 3)$　要求列 7 8 8 7 6 4 7 2

要求↓	LRU 最も長く使っていない巻		LFU 最も使った回数が少い巻		FIFO 最も古くから机にある巻	
	{1, 2, 3}		{1, 2, 3}		{1, 2, 3}	
7	{2, 3, 7}	1巻 を本棚に戻す	{2, 3, 7}	1巻	{2, 3, 7}	1巻
8	{3, 7, 8}	2巻	{3, 7, 8}	2巻	{3, 7, 8}	2巻
8	{3, 7, 8}		{3, 7, 8}		{3, 7, 8}	
7	{3, 7, 8}		{3, 7, 8}		{3, 7, 8}	
6	{6, 7, 8}	3巻	{6, 7, 8}	3巻	{6, 7, 8}	3巻
4	{4, 6, 7}	8巻	{4, 7, 8}	6巻	{4, 6, 8}	7巻
7	{4, 6, 7}		{4, 7, 8}		{4, 6, 7}	8巻
2	{2, 4, 7}	6巻	{2, 7, 8}	4巻	{2, 4, 7}	6巻
時刻		費用5		費用5		費用6

例　$(n, k) = (9, 3)$　要求列 7 8 8 7 6 4 7 2

※　この例で最適行動（神の手）は費用 4　　**問1**　その費用 4 の神行動とは？

定理

LFU 戦略は競合比 ∞（どの α についても α 競合でない）

証明

$k=2$（机に置けるのが 2 冊）で　読む巻が順に

$$\underbrace{1, 1, 1, \ldots, 1}_{10001\text{回}}, \underbrace{3, 2, 3, 2, \ldots, 3, 2}_{2\times 10000\text{回}}$$

だったときを考える

この要求列を知っている神（最適行動）

この時点までは 1、2巻
それ以後は 2、3 巻を机に常備
➡ 費用 1

LFU 戦略に従う人

後半で 2 巻と 3 巻を毎回交換してしまう
➡ 費用 20000

「10000」の代りにもっと大きくすれば この比は幾らでも広がる

定理

LRU 戦略は競合比 k 以下である（k 競合である）

証明（の概略）

LRU 戦略を使ったところ
或る時間帯に k 回本棚に行ったとする
すると　この時間帯には　その直前に見た巻から数えて
相異なる $k+1$ 巻以上が要求されたのだから
神であっても少くとも 1 回本棚に行かねばならない

問2 FIFO 戦略は？

競合比の限界（下界）

定理

本棚問題に競合比 k 未満の応対戦略なし

証明

どんな応対戦略を使っても　運が悪ければ毎回
今ない巻ばかり見たくなることがある
一方　神は常に「今後 k 回は全く使わない巻」を
返すことができ
そうすると本棚に行くのが k 回に一度以下で済む

LRU 戦略が（競合比の意味では）最良であると判った！

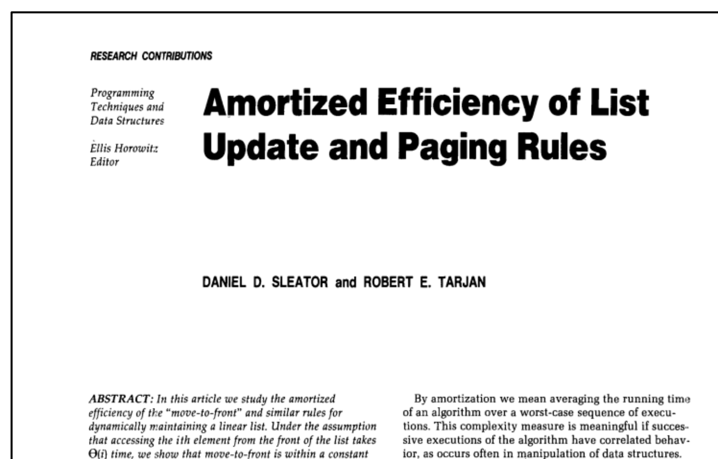
この問題は原論文［ST85］では「ページ割当問題」だった

コンピュータの記憶領域（メモリ）の中にも
「机」のような場所（小さいが高速に読める）と
「本棚」のような場所（大きいけど時間がかかる）がある

特にコンピュータの計算では
一秒に何千万回も「本を見る」ので
うまく「机」と「本棚」を使いこなすのが非常に重要

➡　どのような戦略がよいか　盛んに研究が行われた

LRUなどの戦略自体は当時も周知のもの
しかしこれをきっかけに応対問題の
解析が盛んになり
■他の多くの問題の競合比解析
■競合比に関連する問題設定の変種
などの研究が発展


RESEARCH CONTRIBUTIONS

Programming Techniques and Data Structures

Ellis Horowitz
Editor

Amortized Efficiency of List Update and Paging Rules

DANIEL D. SLEATOR and ROBERT E. TARJAN

ABSTRACT: In this article we study the amortized efficiency of the "move-to-front" and similar rules for dynamically maintaining a linear list. Under the assumption that accessing the ith element from the front of the list takes $\Theta(i)$ *time, we show that move-to-front is within a constant*

By amortization we mean averaging the running time of an algorithm over a worst-case sequence of executions. This complexity measure is meaningful if successive executions of the algorithm have correlated behavior, as occurs often in manipulation of data structures.

［ST85］D. D. Sleator and R. E. Tarjan. Amortized efficiency of list update and paging rules. Commun. ACM 28(2):202-208, 1985.

3　漢字候補提示問題

漢字変換で，読みが例えば「せいさん」と入力されたとき

　生産　清算　青酸　正餐　凄惨　成算

のように候補を順に提示することを考える．選ばれた字は順位を早めて，例えば上記の候補列から「正餐」が選ばれたら

　正餐　生産　清算　青酸　凄惨　成算

のように並べ替え，次はその順で示すとよいかもしれない．また「正餐」をいきなり先頭へ移す代りに順位を一つ早めて

　生産　清算　正餐　青酸　凄惨　成算

とすることも考えられる．このように，**<u>使ったばかりの字の順位を早める</u>**<u>戦略</u>について考える．

順位をおそくしたり
他の字を動かしたり
することは考えない

候補列を見た人が第 i 位（$i = 0, \ldots, n-1$）の字を選ぶには i 秒かかるとする．字を順に幾つか入力するときのこの選択時間の和がなるべく短くなるように候補を提示したい．

応対戦略の例

- MTF 使った字は先頭に移す（move to front）
- M1 使った字は順位を（先頭でなければ）一つ早める
- M0 順位を全く変えない

例　$n=6$　初期配置 0 1 2 3 4 5　要求列 3 1 3 0 1

時刻	要求	MTF 先頭へ		M1 一つ前へ		M0 不動	
		0 1 2 3 4 5		0 1 2 3 4 5		0 1 2 3 4 5	
1	3	3 0 1 2 4 5	3秒	0 1 3 2 4 5	3秒	0 1 2 3 4 5	3秒
2	1	1 3 0 2 4 5	2秒	1 0 3 2 4 5	1秒	0 1 2 3 4 5	1秒
3	3	3 1 0 2 4 5	1秒	1 3 0 2 4 5	2秒	0 1 2 3 4 5	3秒
4	0	0 3 1 2 4 5	2秒	1 0 3 2 4 5	2秒	0 1 2 3 4 5	0秒
5	1	1 0 3 2 4 5	2秒	1 0 3 2 4 5	0秒	0 1 2 3 4 5	1秒
		費用（所要時間）	10	費用	8	費用	8

例　$n = 6$　初期配置 0 1 2 3 4 5　要求列 3 1 3 0 1

（すぐわかる）定理

MTF の競合比は 2 以上
M0 の競合比は ∞

定理

MTF の競合比は 2 以下（なので結局ちょうど 2）

すなわち　要求列を任意に取って MTF と神にそれぞれ処理させ
各時刻 t にかかる費用をそれぞれ x_t と y_t とすると

$$\sum_t x_t \leq 2 \cdot \sum_t y_t$$

時刻 t	要求↓	MTF 使った字は先頭へ	x_t	神（最適行動）	y_t
		0 1 2 3 4 5		0 1 2 3 4 5	
1	3	3 0 1 2 4 5	3秒	0 3 1 2 4 5	3秒
2	5	5 3 0 1 2 4	5秒	0 3 1 2 4 5	5秒
3	4	4 5 3 0 1 2	5秒	0 3 1 2 4 5	4秒
4	0	0 4 5 3 1 2	3秒	0 3 1 2 4 5	0秒
5	3	3 0 4 5 1 2	3秒	0 3 1 2 4 5	1秒

費用19 ← 2倍以内 費用13

$x_t \leq 2 \cdot y_t$ でない
時刻 t はある

しかし
そのような時には
神と同じ状態に
近づいている！
（次頁）

時刻 t（の直後）において　左図（MTF）と右図（神）との間で
位置関係が逆であるような二字の組の個数を Φ_t とする

神の状態との距離

すなわち　$\Phi_t = \sum_i$ ［字 i よりも　左図では前に現れるが右図では後に現れる字の個数］

補題

$$\Phi_t - \Phi_{t-1} \leq 2 \cdot y_t - x_t$$

時刻 t	要求↓	MTF 使った字は先頭へ	x_t	神（最適行動）	y_t	Φ_t
		0 1 2 3 4 5		0 1 2 3 4 5		0
1	3	3 0 1 2 4 5	3秒	0 3 1 2 4 5	3秒	1
2	5	5 3 0 1 2 4	5秒	0 3 1 2 4 5	5秒	6
3	4	4 5 3 0 1 2	5秒	0 3 1 2 4 5	4秒	9
4	0	0 4 5 3 1 2	3秒	0 3 1 2 4 5	0秒	6
5	3	3 0 4 5 1 2	3秒	0 3 1 2 4 5	1秒	5

0と3の位置関係が逆

更に5と0～4との位置関係も逆

費用19　←2倍以内　費用13

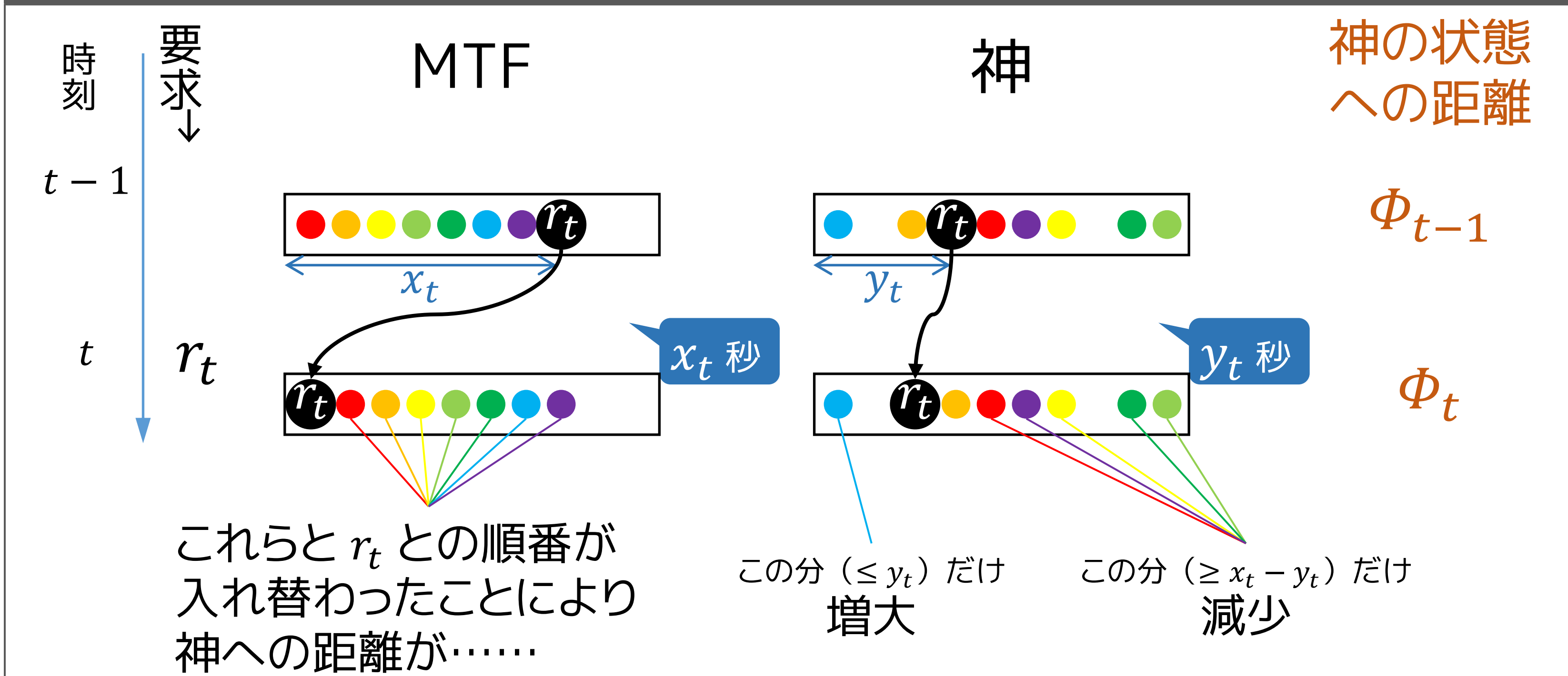
時刻 t（の直後）において　左図（MTF）と右図（神）との間で
位置関係が逆であるような二字の組の個数を Φ_t とする

すなわち　$\Phi_t = \sum_i \left\{ \begin{array}{l} \text{字 } i \text{ よりも　左図では前に現れるが} \\ \text{　　　　　　　右図では後に現れる字の個数} \end{array} \right\}$

補題

$$\Phi_t - \Phi_{t-1} \leq 2 \cdot y_t - x_t$$

証明



定理（再）

MTF の競合比は 2 以下

要求列 $r = r_1 \cdots r_f$ を任意に取り x_t, y_t, Φ_t を前頁の通り定義すると

補題

$$\Phi_t - \Phi_{t-1} \leq 2 \cdot y_t - x_t$$

定理の証明

補題より

$$\sum_{t=1}^{f} (2 \cdot y_t - x_t) \geq \sum_{t=1}^{f} (\Phi_t - \Phi_{t-1}) = \Phi_f \geq 0$$

なので

$$\mathrm{cost}_{\mathrm{MTF}}(r) = \sum_{t=1}^{f} x_t \leq 2 \cdot \sum_{t=1}^{f} y_t = 2 \cdot \mathrm{opt}(r)$$

定理

漢字提示問題に競合比 2 未満の応対戦略なし

証明概略

どの応対戦略を使っても
末尾の字ばかり要求してくる列はあり
その場合毎回 $n-1$ 秒かかる
一方この要求列全体を初めから知っていれば
初めの方で頻度順に並べたまま動かさないことにより
平均 $(n-1)/2$ 秒くらいにできる

4　作業員派遣問題

あなたは全国各地に配置された k 人の作業員を指揮しており，各作業員がどこにいるか常に把握している（初めは本社に全員いるとする）．毎回どこかで一つ仕事の依頼があり，あなたは作業員の一人を向わせる．仕事が終ると作業員はそこに留まる.

移動距離の総和を節約するには，各時点で派遣する作業員をどう選ぶべきか.

「距離」d は非負で以下を満すとする

$$d(x,x) = 0$$
$$d(x,y) = d(y,x)$$
$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

単純な戦略（貪欲法）

毎回最も近くにいる人を派遣

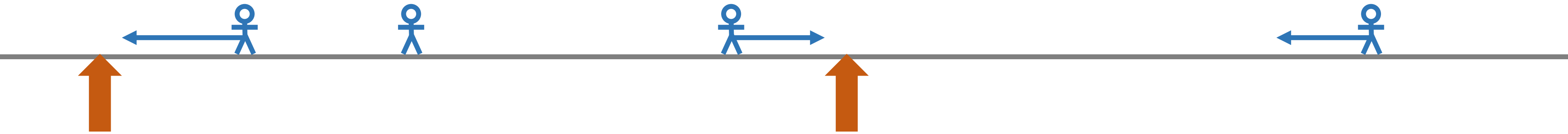
競合比は？　　　∞

目先の利益だけで行動するのは良くない（ことがある）

世界が一本の直線である場合

両側接近戦略

- 仕事の依頼が全作業員の外側に来たとき
  →最も近い作業員が対処
- 間に来たとき
  →最も近い作業員が対処
  　反対側の最も近い作業員も同じ距離だけ接近



※ 厳密には「一人だけを向わせる」という条件を満していないが
　動きを先延しすることにより満すようにできる

定理

両側接近戦略の競合比は k 以下

方針 漢字提示問題の MTF のときと同様に「神との違いを表す量」を作る

証明

勝手な要求列と神の最適行動とを一つ固定する

時刻 t での移動距離が　両側接近戦略では（2人の場合は合せて）x_t

t 個目の仕事が来た時のこと

最適行動では y_t であるとする

また時刻 t の直後の作業員の位置が　両側接近戦略では点 $s_1, \dots, s_k$

最適行動では点 $a_1, \dots, a_k$

になる（$s_1 \leq \cdots \leq s_k$，$a_1 \leq \cdots \leq a_k$）とき

$$\Phi_t = \boxed{\quad ? \quad}$$

$s_1, \dots, s_k$ と $a_1, \dots, a_k$ を使った非負の値

と定める　このとき

補題

$$\Phi_t - \Phi_{t-1} \leq k \cdot y_t - x_t$$

問3 うまく Φ_t を定めて補題を示し，定理の証明を完成せよ．

本棚問題は作業員問題の一部

どの二地点間も距離が 1 であるという

本棚問題

n 巻の事典のうち机上に k 巻

机上にない巻が見たくなったら

机にある巻のうち一つと取換え

このとき費用 1 が生ずる

作業員問題の 特殊な場合

n 個の町のうち k 個に作業員

いない町で仕事の依頼があると

どこかの町から作業員を移動

このとき費用 1 が生ずる

同じこと！

定理

（一般の距離空間における）

作業員問題に競合比 k 未満の応対戦略なし

∵　本棚問題という特殊な場合にすら無いので

競合比の限界は？

（一般の距離空間で）

未解決問題 競合比 k の応対戦略はあるのか？

他にも色々と特殊な場合については判っている

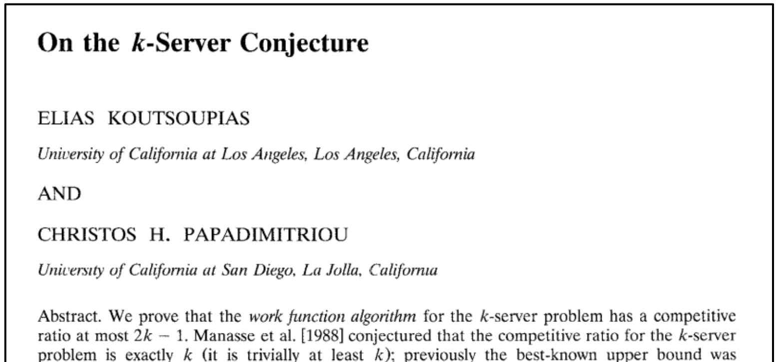
判っていること（既述）
- 一直線上という特殊な場合なら競合比 k にできる
- どの二点間も距離 1 という特殊な場合ですら競合比 k 未満は無理

一般の距離空間では

定理 ［KP95］

競合比 $\leq 2 \cdot k - 1$ の応対戦略あり

［KP95］
E. Koutsoupias and C. H. Papadimitriou.
On the k-server conjecture.
Journal of the ACM 42(5):971–983, 1995.


On the k-Server Conjecture

ELIAS KOUTSOUPIAS

University of California at Los Angeles, Los Angeles, California

AND

CHRISTOS H. PAPADIMITRIOU

University of California at San Diego, La Jolla, California

Abstract. We prove that the *work function algorithm* for the k-server problem has a competitive ratio at most $2k-1$. Manasse et al. [1988] conjectured that the competitive ratio for the k-server problem is exactly k (it is trivially at least k); previously the best-known upper bound was

仕事函数 $w_r(X)$

「要求列 r に応えてから状態 X に至る」のに要する最小の費用

現在の状態 X で　要求 r_t が来たら
作業員の一人が r_t にいるような状態 Y のうち

貪欲な人	$d(X,Y)$ が最小になるものへ行く
理想に拘泥し過ぎる人	$w_{r_{\le t}}(Y)$ が最小になるものへ行く
仕事函数法	$w_{r_{\le t}}(Y) + d(X,Y)$ が最小になるものへ行く

定理 ［KP95］

仕事函数法は
競合比 $\le 2 \cdot k - 1$

［KP95］
E. Koutsoupias and C. H. Papadimitriou.
On the k-server conjecture.
Journal of the ACM 42(5):971–983, 1995.

On the k-Server Conjecture

ELIAS KOUTSOUPIAS

University of California at Los Angeles, Los Angeles, California

AND

CHRISTOS H. PAPADIMITRIOU

University of California at San Diego, La Jolla, California

Abstract. We prove that the *work function algorithm* for the k-server problem has a competitive ratio at most $2k - 1$. Manasse et al. [1988] conjectured that the competitive ratio for the k-server problem is exactly k (it is trivially at least k); previously the best-known upper bound was

まとめ（1）

- 戦略（算法）
  - あらゆる入力に対処する一つの方法
  - あらゆる入力で一定の性能を達成するのが目標
- 性能の限界を証明する難しさ
  - 「どんな入力に対しても○○の性能を達成する」
  - 「どんな戦略でも○○までは達成できない」

まとめ（2）

- 問題設定･評価尺度の定式化
  - 漠然とした目標を明確にする
  - 単純で抽象的な問題を考えることで
他の状況に応用できるかも
- 競合比は良い評価尺度か？　→正直微妙な所も
  - 最悪の入力による評価でよいのか？（現実には普通
良く使う漢字とか客が多い地域とかは判っている）
  - そもそも神と比べて後悔するとかいう現実性の無さ
  - 他にも重要な側面は勿論いろいろある
（計算し易さとか　作業員間の公平さとか）

課題

スライド中の 問 のうち **1 つ**<u>以上</u> に答えて下さい

提出期限　6月12日 (金)

提出方法　KULMSの所定の場所に提出

京都大学大学院理学研究科　数学・数理解析専攻数理解析系

修士課程入試

https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/daigakuin/master.html

入試ガイダンス
[対面]　6月5日 (金) 16:45～
[オンライン]　6月10日 (水) 16:45～