輪番割当問題

河村彰星 (京大)

科研費
KAKENHI
JP23K28036

九州大学システム情報科学府

令和8年11月6日

以下 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k$ とする

輪番割当問題 (詰込型) (pinwheel scheduling) [HMRTV89]

各仕事 $i = 1, 2, \ldots, k$ は**どの連続する a_i 日にも一度以上**やる必要がある
これを満しながら毎日ひとつづつ仕事をやり続けることができるか

できるとき組 $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ は (詰込) **割当可能** であるという

例

日数

$(2, 4, 4)$ 割当可能 ・・・ 2 4 2 4 2 4 2 4 2 4 2 4 2 4 2 4 ・・・

$(2, 3, 4)$ 割当不可能 ($\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$ なので)

$(2, 3, 100)$ 割当不可能 ・・・ 2 2 ・・・

$(3, 4, 5, 8)$ 割当可能 ・・・ 3 4 5 3 8 4 3 5 3 4 5 3 8 4 3 5 ・・・
(甲 乙 甲 乙 甲 乙)

- $(3, 4, 6, 8)$ 割当可能
- $(4, 5, 6, 6, 8)$ 割当可能 (甲 乙)

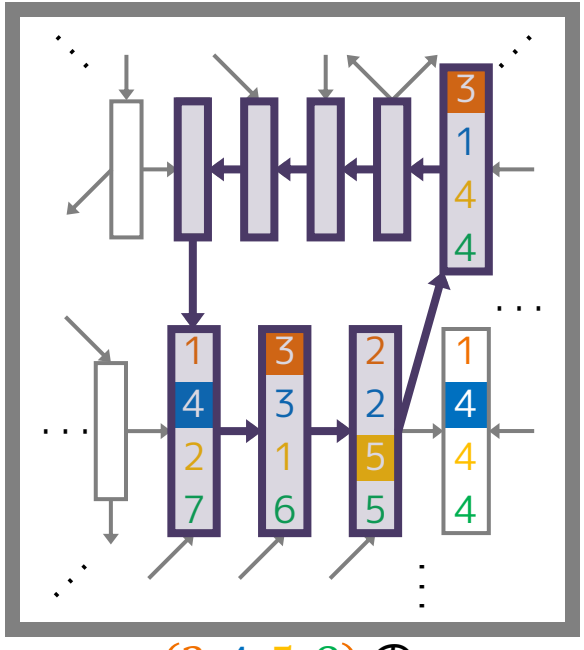
単調性 割当可能な組の或る数を
より大きい数に変えても割当可能

分割性 割当可能な組の或る数を
2 倍の数 2 個に変えても割当可能
(一般に N 倍の数 N 個)

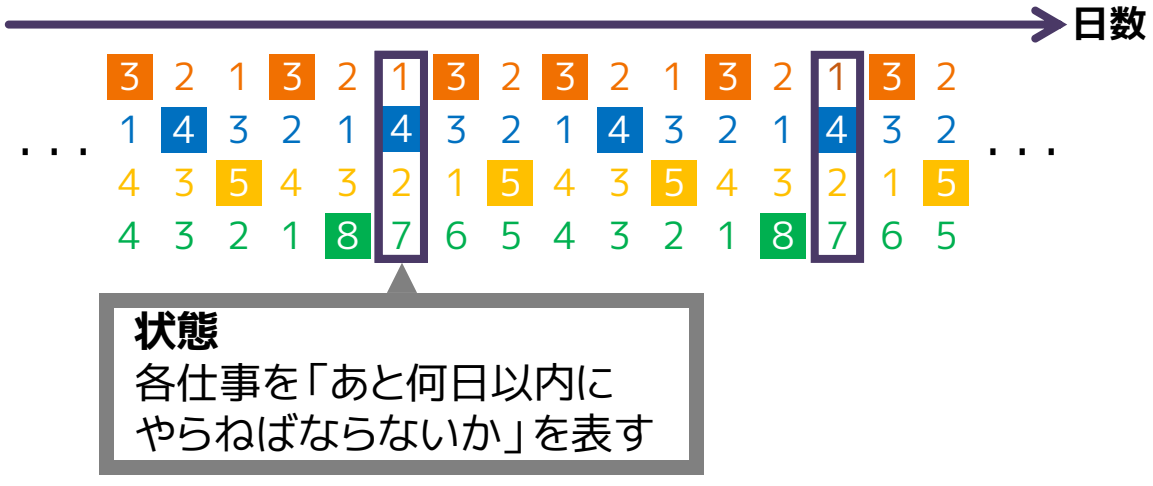
[HMRTV89] R. Holte, A. Mok, L. Rosier, I. Tulchinsky, D. Varvel. The pinwheel: a real-time scheduling problem. In Proc. 22nd Hawaii International Conference on System Sciences, 693–702, 1989.

与えられた組が割当可能か判定するには？

状態遷移図を作り　閉路があるか調べればよい



$(3, 4, 5, 8)$ の
状態遷移図
(頂点数 $\leq 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8$)



これにより割当可能性は PSPACE で判定できる

NP に属するか未解決

NP 困難であることが最近示された (後述)

定義

$A = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ の**密度** (density) とは $\mathrm{D}(A) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k}$

A が割当可能であるには明らかに $\mathrm{D}(A) \leq 1$ が必要
これは一般には十分条件でないが……

$\frac{1}{2}$ よりも大きな数で成立つか？

定理 [HMRTV89]

A の各数が前の数の倍数で
かつ $\mathrm{D}(A) \leq 1$ ならば　A は割当可能

∵ 仕事が一種類の場合に帰着される

例　$(4, 8, 8, 16, 16)$ は割当可能
　　← 分割性 ← $(4, 8, 8, 8)$ 割当可能
　　← 分割性 ← $(4, 4, 4)$ 割当可能

定理 [HRTV92]

A に現れる数が二種類以内で
かつ $\mathrm{D}(A) \leq 1$ ならば　A は割当可能

系 [HMRTV89]

$\mathrm{D}(A) \leq \frac{1}{2}$ ならば A は割当可能

∵ 各項を 2 冪に切捨てても密度 ≤ 1

例　$(6, 12, 13, 24, 25)$ 割当可能
　　← 単調性 ← $(4, 8, 8, 16, 16)$ 割当可能

うまく使うと切捨て時の無駄を
小さくできる (次頁の [CC93, CC92])

[HMRTV89] R. Holte, A. Mok, L. Rosier, I. Tulchinsky, D. Varvel. The pinwheel: a real-time scheduling problem. In Proc. 22nd Hawaii International Conference on System Sciences, pp. 693–702, 1989.
[HRTV92] R. Holte, L. Rosier, I. Tulchinsky, D. Varvel. Pinwheel scheduling with two distinct numbers. Theoretical Computer Science 100, 105–135, 1992.

定理 (再掲) [HMRTV89]

$\mathrm{D}(A) \leq \frac{1}{2}$ ならば A は割当可能

定理 [CC93]

$\mathrm{D}(A) \leq \frac{2}{3}$ ならば A は割当可能

定理 [CC92]

$\mathrm{D}(A) \leq \frac{7}{10}$ ならば A は割当可能

定理 [FL02]

$\mathrm{D}(A) \leq \frac{3}{4}$ ならば A は割当可能

$(= 0.75)$

定理 [Kaw26]

~~**予想**~~ [CC93]

$\mathrm{D}(A) \leq \frac{5}{6}$ なら A は割当可能

$(= 0.833\ldots)$

((2, 3, ●) が割当不可能なのでこれが限界)

部分的解決

定理 [LL97]

A に現れる数が三種類以内なら成立

定理 [FL02]

$a_1 = 2$ なら成立

定理 [GSW22]

$k \leq 12$ なら成立

□ は計算実験を含む

[CC92] M.Y. Chan, F. Chin. General schedulers for the pinwheel problem based on double-integer reduction. IEEE Transactions on Computers 41, 755–768, 1992.

[CC93] M.Y. Chan, F. Chin. Schedulers for larger classes of pinwheel instances. Algorithmica 9, 425–462, 1993.

[FL02] P.C. Fishburn, J.C. Lagarias. Pinwheel scheduling: achievable densities. Algorithmica 34, 14–38, 2002.

[GSW22] L. Gąsieniec, B. Smith and S. Wild. Towards the 5/6-density conjecture of pinwheel scheduling. In Proc. SIAM Symposium on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX), pp. 91–103, 2022.

[HMRTV89] R. Holte, A. Mok, L. Rosier, I. Tulchinsky, D. Varvel. The pinwheel: a real-time scheduling problem. In Proc. 22nd Hawaii International Conference on System Sciences, pp. 693–702, 1989.

[Kaw26] A. Kawamura. Proof of the density threshold conjecture for pinwheel scheduling. Proceedings of the National Academy of Sciences (PNAS), to appear.

[LL97] S. Lin, K. Lin. A pinwheel scheduler for three distinct numbers with a tight schedulability bound. Algorithmica 19, 411–426, 1997.

WIKIPEDIA
The Free Encyclopedia

Donate Create account Log in

Pinwheel scheduling

Add languages

～2024

is only $5/6 + 1/t_3$.[3]

Every instance of pinwheel scheduling with density at most $3/4$ has a solution,[4] and it has been conjectured that every instance with density at most $5/6$ has a solution.[3][5] Every instance with three distinct repeat times and density at most $5/6$ does have a solution.[5] Additionally, case analysis has confirmed that every instance with at most 12 tasks and density at most $5/6$ has a solution.[6][7]

Unsolved problem in computer science

Does every pinwheel scheduling problem with density at most 5/6 have a solution?

More unsolved problems in computer science

Periodicity and complexity

When a solution exists, it can be assumed to be periodic, with a period at most equal to

現在

this system is only $5/6 + 1/t_3$.[3]

In 1993, it was conjectured that, when the density of a pinwheel scheduling is at most $5/6$, a solution exists.[3] This was proven in 2024.[4]

Periodicity and complexity [edit]

When a solution exists, it can be assumed to be periodic, with a period at

輪番割当問題 (非整数への拡張)

1 以上の**実数**の組 $A = (a_1, \ldots, a_k)$ が与えられる
各仕事 i は**どの連続する $\lceil r \cdot a_i \rceil$ 日にも r 回以上**やる $(r = 1, 2, \ldots)$
これを満しながら毎日ひとつづつ仕事をやり続けられるか

例 $a_1 = \frac{12}{5} = 2.4$ は　仕事 1 を
どの 3 日間にも 1 回以上
どの 5 日間にも 2 回以上
どの 8 日間にも 3 回以上
どの 10 日間にも 4 回以上
どの 12 日間にも 5 回以上
行うべしという意味

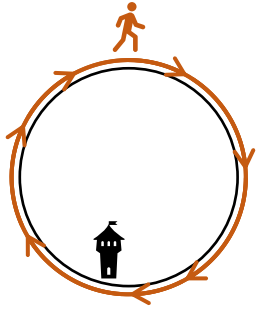
例 (2.4, 3.5, 3.5) は割当可能



これを満す一つの方法
ちょうど 2.4 日に一度 (時刻まで正確に) 起る出来事を考える
それが起る日に仕事 1 を行う



例えば
一日に $\frac{5}{12}$ 周する一郎君
が　塔を横切る



非整数に拡張してもやはり
単調性 分割性 は成立つ
密度は $\mathrm{D}(A) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k}$ で定義

定理

$k = 2$ (すなわち $A = (a_1, a_2)$) かつ $\mathrm{D}(A) \leq 1$ ならば A は割当可能

∵　次の「池のほとりの塔」法 (と 単調性) より

例　$a_1 = \frac{12}{5} = 2.4$ は　仕事 1 を

どの　3 日間にも 1 回以上
どの　5 日間にも 2 回以上
どの　8 日間にも 3 回以上
どの 10 日間にも 4 回以上
どの 12 日間にも 5 回以上

行うべしという意味

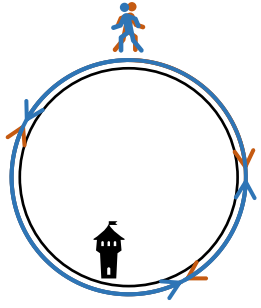
これを満すつの方法
ちょうど 2.4 日に一度 (
正確に) 起る出来事を考
それが起る日に仕事 1 を行う

$\left(\frac{12}{5}, \frac{12}{7}\right)$ に対する解



残った日に仕事 2 を行うと
$a_2 = \frac{12}{7}$ の条件を満す

一日に $\frac{5}{12}$ 周する一郎君
一日に $\frac{7}{12}$ 周する二郎君



系 (再掲) [HRTV92]

$A = (\underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{k_1}, \underbrace{e_2, \ldots, e_2}_{k_2})$ (二種類の数からなる) かつ $\mathrm{D}(A) \leq 1$ ならば A は割当可能

∵　$\left(\frac{e_1}{k_1}, \frac{e_2}{k_2}\right)$ が割当可能ゆえ 分割性 より

[HRTV92] R. Holte, L. Rosier, I. Tulchinsky, D. Varvel. Pinwheel scheduling with two distinct numbers. Theoretical Computer Science 100, 105–135, 1992.

定理 (再掲)

整数からなる

$\mathrm{D}(A) \leq \frac{5}{6}$ なる $A \subseteq \{2, 3, \dots\}$ は割当可能

補題

$\mathrm{D}(B) < \frac{29}{33}$ なる $B \subseteq \{2, 3, \dots, 22\} \cup (11, 22]$ は割当可能

計算機で確認
先程の状態遷移図の方法で調べ尽し

$A = (2, 5, 15, 40, 51, 87)$
→ ① → $(2, 5, 15, 40, 51, 51)$
→ ② → $(2, 5, 15, 25.5, 40)$
→ ① → $(2, 5, 15, 25.5, 25.5)$
→ ② → $B = (2, 5, 12.75, 15)$

「補題⇒定理」の証明

A が (定理に反して) 割当不可能だったとする

A の中身がみな 22 以下になるまで次の操作①②を繰返し　結果を B とする

① A の最大元が一つならば　それを減らしてゆく
② A の最大元が複数あれば　その二つ (a, a とする) を纏めて $\frac{a}{2}$ にする

すると B は割当不能で $\mathrm{D}(B) < \mathrm{D}(A) + \frac{1}{22} \leq \frac{29}{33}$ なので　補題に反する

操作 ①② は 単調性 分割性 の逆なので

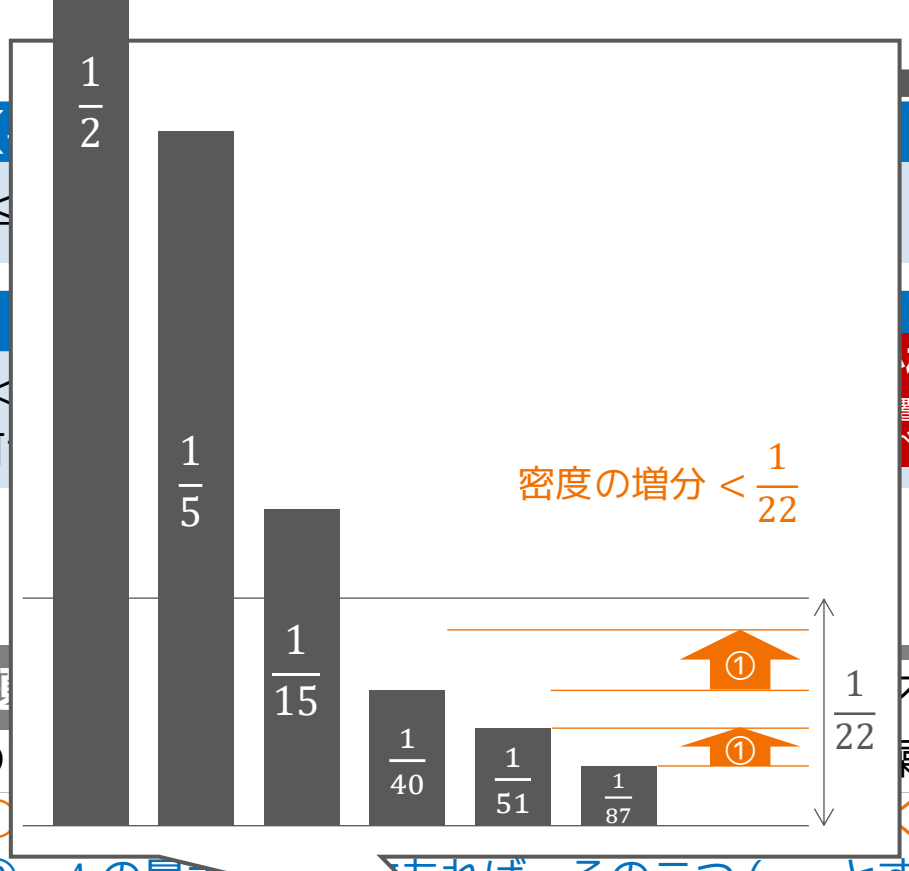
定理 (

$\mathrm{D}(A) \leq$

補題

$\mathrm{D}(B) <$

割当可



$A = (2, 5, 15, 40, 51, 87)$

①

$(2, 5, 15, 40, 51, 51)$

②

$(2, 5, 15, 25.5, 40)$

①

$(2, 5, 15, 25.5, 25.5)$

②

$B = (2, 5, 12.75, 15)$

確認

遷移図
べ尽し

「補題

A の

不可能だったとする

繰返し　結果を B とする

①

② A の最大元… …あれば　その二つ (a, a とする) を纏めて $\frac{a}{2}$ にする

すると B は割当不能で $\mathrm{D}(B) < \mathrm{D}(A) + \frac{1}{22} \leq \frac{29}{33}$ なので　補題に反する

操作 ①② は **単調性** **分割性** の逆なので

定理 (再掲)

整数からなる

$\mathrm{D}(A) \leq \frac{5}{6}$ なる $A \subseteq \{2, 3, \dots\}$ は割当可能

補題

$\mathrm{D}(B) < \frac{29}{33}$ なる $B \subseteq \{2, 3, \dots, 22\} \cup (11, 22]$ は

各数を整数に切捨てても　割当可能

計算機で確認
先程の状態遷移図の方法で調べ尽し

すなわち　$\mathrm{D}'(B') < \frac{29}{33}$ なる $B' \subseteq \{2, 3, \dots, 21\}$ は割当可能

D' は「11 以上の数には 1 足してから求めた密度」

$A = (2, 5, 15, 40, 51, 87)$
→ ①
$(2, 5, 15, 40, 51, 51)$
→ ②
$(2, 5, 15, 25.5, 40)$
→ ①
$(2, 5, 15, 25.5, 25.5)$
→ ②
$B = (2, 5, 12.75, 15)$
↓ 直下の整数に切捨て
$B' = (2, 5, 12, 14)$
$\mathrm{D}'(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}$

「補題⇒定理」の証明

A が (定理に反して) 割当不可能だったとする

A の中身がみな 22 以下になるまで次の操作①②を繰返し　結果を B とする

① A の最大元が一つならば　それを減らしてゆく
② A の最大元が複数あれば　その二つ (a, a とする) を纏めて $\frac{a}{2}$ にする

すると B は割当不能で $\mathrm{D}(B) < \mathrm{D}(A) + \frac{1}{22} \leq \frac{29}{33}$ なので　補題に反する

操作 ①② は 単調性 分割性 の逆なので

定理 (再掲)

整数からなる

$\mathrm{D}(A) \leq \frac{5}{6}$ なる $A \subseteq \{2, 3, \dots\}$ は割当可能

補題 (再掲)

$\mathrm{D}'(B') < \frac{29}{33}$ なる $B' \subseteq \{2, 3, \dots, 21\}$ は割当可能

そのような B' は 25 592 971 個ある

計算機を使わない (人が読める長さの) 証明は得られていない

実験で判ってきたこと

じつは危ういのは a_1 が小さい場合だけ

定理 [GJKLLMR24]

$\varepsilon(a) = O\left(\sqrt{1/a}\right)$ なる $\varepsilon\colon \mathbf{N} \to \mathbf{R}_+$ が存在して
任意の $\mathrm{D}(A) \leq 1 - \varepsilon(a_1)$ なる
$A = (a_1, \dots, a_k)$ は割当可能

予想

これは $\varepsilon(a) = \frac{a-1}{a(a+1)}$ で成立

$(a, a+1, a+1, \dots, a+1, b)$ が割当不能なぎりぎりの例

じつは整数条件は不要かも？

予想

$\mathrm{D}(A) \leq \frac{5}{6}$ なる A は
(非整数を含んでも) 割当可能

定理 [MFO25]

これは $k \leq 3$ なら成立つ

[MFO25] 宮城，藤原，大内．実数周期の輪番割当6分の5予想．2024年度冬の LA シンポジウム．令和7年1月．
[GJKLLMR24] L. Gąsieniec, T. Jurdziński, R. Klasing, C. Levcopoulos, A. Lingas, J. Min, T. Radzik. Perpetual maintenance of machines with different urgency requirements. Journal of Computer and System Sciences 139, 103476, 2024.

研究について (所感・雑談)

- 研究は先人の積み重ねの上に行うもの
  - 但し今回は考え始めて暫くの間　先行研究が見つけられなかった
    - 輪番割当はそこそこ有名なようだが　実質的に同じ問題が別の名前で扱われていたりする
  - 「未解決問題」は無数にある (重要なものも　しょぼいものも)
- すべてがうまくゆくことはほぼ無い
  - 本当は計算機に頼らない証明を得たかったが　できなかった
  - 多くの部分的結果が先行論文として書かれていたからこそできた
- 一つの題材にも様々な切り口
  - 与えられた $(a_1, \ldots, a_k)$ の割当可能性を判定する計算量は？
    - 先述の状態遷移グラフ による方法は　入力長に対する指数的な時間がかかる
    - 多項式時間でできるか不明　**NP** 困難か否かも 不明
  - 当初の目標は果せなくても　何らかのことはできる
- 基礎研究と応用研究
  - 現実の事象は複雑　→数学的に抽象化・単純化した問題で考える
  - 輪番割当にも多くの関連する応用問題がある
    - 「割当可能か否か」だけでなく　頻度条件を「なるべく満す」最適化
    - より現実的な設定でヒューリスティクスの評価などをする研究も数多い
- 真面目な研究と一発ネタ研究

各仕事 i を「a_i 日**以内**に一度」ではなく「a_i 日**ちょうど**」を要求すると……

輪番きっかり割当問題 (詰込型) [WL83・Sun92]

与えられた正整数の組 $(a_1, \dots, a_k)$ に対し　組 $(r_1, \dots, r_k)$ をうまく選んで
集合 $[r_i]_{a_i} = \{ a_i n + r_i \mid n \in \mathbf{Z} \}$ $(i = 1, \dots, k)$ を重なりなくできるか

できるとき組 $(a_1, \dots, a_k)$ は (詰込) **きっかり割当可能**であるという

例

- $(2, 2)$　き割当可能
- $(3, 5)$　き割当不可能 (中国剰余定理)
- $(4, 6)$　き割当可能 (∵ 次の仕事集合の一部なので)
- $(4, 4, 6, 6, 6)$　き割当可能 (∵ $(2, 2)$ から 分割性 で得られるので)
- $(4, 6, 10)$　き割当不可能 (∵ 偶または奇数日めに複数の仕事が入り …かる)
- $(6, 6, 10, 10, 15)$　き割当可能

きっかり割当可能性判定は
NP に属する

また **NP** 完全でもある (後述)

どの2行にも
相異なる列が
存在するように
記入できるか？
という問題

2 で割ると 0 余り
3 で割ると 0 余る

6 で割ると 0 余る

	2	3	5	
6	0	0		$[0,0]_{2,3} = [0]_6$
6	0	1		$[0,1]_{2,3} = [4]_6$
10	1		0	$[1,0]_{2,5} = [5]_{10}$
10	1		1	$[1,1]_{2,5} = [1]_{10}$
15		2	2	$[2,2]_{3,5} = [2]_{15}$

[WL83] W.D. Wei, C.L. Liu. On a periodic maintenance problem. Operations Research Letters 2, 90–93, 1983.
[Sun92] Z. Sun. On disjoint residue classes. Discrete Mathematics 104, 321–326, 1992.

「詰込」でなく「被覆」

輪番割当問題（被覆型） (point patrolling) [KS20]

各人 $i = 1, 2, \dots, k$ は **連続する a_i 日に一度以下** しか働けない
これを満しながら毎日だれか一人づつを働かすことはできるか

できるとき組 $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ は **（被覆）割当可能** であるという

例

$(2, 4, 4)$ 割当可能



$(2, 4, 5)$ 割当不可能 $\left(\because \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < 1 \text{ なので}\right)$ $(2, 3, 4)$ 割当可能

$(2, 3)$ 割当不可能 (4 日間さえも)

$(2, 3, 5)$ 割当不可能 (8 日間さえも)

$(2, 3, 5, 9)$ 割当不可能 (16 日間さえも)

$\vdots$

$(2, 3, 5, 9, \dots, 2^{k-1} + 1)$ 割当不可能

単調性 割当可能な入力の或る数を
より**小さい**数に変えても割当可能

分割性 割当可能な入力の或る数を
2 倍の数 2 個に変えても割当可能

先程と同様に　$\mathrm{D}(A) \geq 1$ は明らかに必要　$\mathrm{D}(A) \geq 2$ なら十分

定理 [河村・小林 (投稿中)]

$\mathrm{D}(A) \geq \mathrm{D}(2, 3, 5, 9, \dots)$ ならば A は割当可能
$(= 1.264\dots)$

[KS20] A. Kawamura, M. Soejima. Simple strategies versus optimal schedules in multi-agent patrolling. Theoretical Computer Science 839, 195–206, 2020.

輪番きっかり割当問題 (被覆型)

与えられた正整数の組 $(a_1, \dots, a_k)$ に対し　組 $(r_1, \dots, r_k)$ をうまく選んで
集合 $[r_i]_{a_i} = \{ a_i n + r_i \mid n \in \mathbf{Z} \}$ $(i = 1, \dots, k)$ が $\mathbf{Z}$ 全体を覆うようにできるか

例

$(2, 2)$	き割当可能	
$(2, 3, 3)$	き割当不可能	
$(2, 4, 4)$	き割当可能	
$(2, 3, 4, 6, 12)$	き割当可能	

詰込型よりも難しそう

与えられた組 $(r_1, \dots, r_k)$ が
条件を満すか判定する問題が既に
coNP 完全 (次頁)

「相異なる $a_1, \dots, a_k$ による被覆」についての
エルデシュの問題：

定理 [Hou15] ([Erd50] の予想を解決)

$10^{16} < a_1 < \cdots < a_k$ なる A はき割当不可能

[Hou15] B. Hough. Solution of the minimum modulus problem for covering systems. Annals of Mathematics 181, 361–382, 2015.
[Erd50] P. Erdős. On integers of the form $2^k + p$ and some related problems. Summa Brasiliensis Mathematicae 2, 113–123, 1950.

定理 [KKK25]

与えられた集合 $\{ (a_i, r_i) \mid i \in I \}$ に対し
$\bigcap_{i \in I} \overline{r_i \bmod a_i} \neq \emptyset$ か判定する問題は **NP** 完全（$\overline{\cdot}$ は補集合）

証明 3SATからの帰着

命題変数 $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ の現れる3CNF式 Φ

Φ を充足する割当が存在

$(b_1, \ldots, b_n) \in \{0,1\}^n$

次のように作る $\{ (a_i, r_i) \mid i \in I \}$

$\bigcap_{i \in I} \overline{r_i \bmod a_i}$ の元が存在

$[b_1, \ldots, b_n]_{p_1, \ldots, p_n}$

相異なる n 個の素数 $p_1, \ldots, p_n$ を用意して

■ 各変数 X_i に対し $(p_i, 2), (p_i, 3), \ldots, (p_i, p_i - 1)$

■ Φ の各節 $\neg^{e_1} X_{i_1} \vee \neg^{e_2} X_{i_2} \vee \neg^{e_3} X_{i_3}$ に対し $\left(p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot p_{i_3}, [e_1, e_2, e_3]_{p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}} \right)$

[KKK25] A. Kawamura, Y. Kobayashi and Y. Kusano. Pinwheel Covering. In Proc. 14th International Conference on Algorithms and Complexity. LNCS 15680, pp. 185–199, 2025.

まとめ

正整数の組 $A = (a_1, \dots, a_k)$ が与えられたとき
① 集合 $A_1, \dots, A_k \subseteq \mathbf{Z}$ であって
各 $i = 1, \dots, k$ と長さ a_i の任意の区間 I について
$|A_i \cap I|$ ② を満すものはあるか

詰込型	きっかり詰込型 (NP 完全)	
①互に交らない ② ≥ 1	①互に交らない ② $= 1$	$\mathrm{D}(A) \leq 1$ が必要

被覆型	きっかり被覆型 (NP 困難)	
① $\mathbf{Z}$ 全体を覆う ② ≤ 1	① $\mathbf{Z}$ 全体を覆う ② $= 1$	$\mathrm{D}(A) \geq 1$ が必要

密度 $\mathrm{D}(A) = 1$ に制限すると　これら四問題は一致
(整数全体を重なりなく分割する問題 [Zná69])

定理 [KLS26]
この問題すら 強 **NP** 完全
予想 [KS20] が解決された

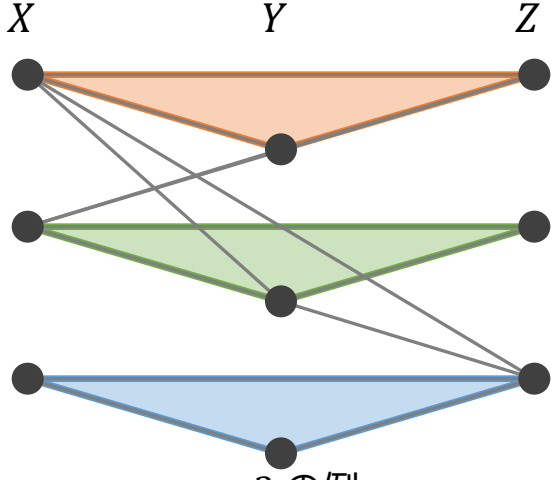
[Zná69] Š. Znám. On exactly covering systems of arithmetic sequences. Mathematische Annalen 180, 227–232, 1969.
[KS20] A. Kawamura, M. Soejima. Simple strategies versus optimal schedules in multi-agent patrolling. Theoretical Computer Science 839, 195–206, 2020.
[KLS26] Y. Kobayashi, B. Lin, J. Swernofsky. Dense pinwheel packing is strongly NP-complete. arXiv:2609.20075.

定理 [KLS26]

密度 $D(A) = 1$ に制限しても 輪番割当問題は強 **NP** 完全

周期 a_i を一進法で表しても **NP** 完全 という意味

証明概略 三部グラフの三角形分割からの帰着



$n = 3$ の例

入力 各部 n 頂点の三部グラフ G

問 G の頂点を 交わらない
n 個の三角形に分けられるか

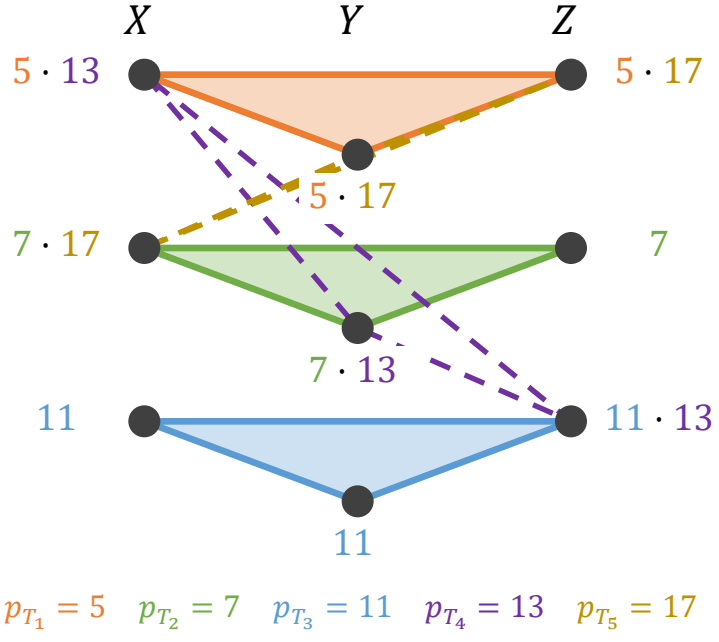
図の例では 色付きの三つで分けられる

補題

各頂点を含む三角形が 3 個以下のグラフに限っても **NP** 完全 [DF86]

[DF86] M. E. Dyer, A. M. Frieze. Planar 3DM is NP-complete. Journal of Algorithms 7(2), pp. 174–184, 1986.
[KLS26] Y. Kobayashi, B. Lin, J. Swernofsky. Dense pinwheel packing is strongly NP-complete. Preprint, arXiv:2609.20075, 2026.

証明　帰着の構成



各三角形 T に相異なる素数
$p_T > \max(3, n)$ を割り当てる

各頂点 v に $m_v := \prod_{T \ni v} p_T$

各頂点 v に次の仕事を作る

証人　周期 nm_v を 1 個

補充　周期 $3nm_v$ を $m_v - 3$ 個

頂点ごとの密度 $\frac{1}{nm_v} + \frac{m_v - 3}{3nm_v} = \frac{1}{3n}$

よって全体の密度は 1

仕事の数も周期も n の多項式

命題　G が三角形に分けられる ⇔ 作った仕事の列が割当可能

証明　割当可能 ⇒ 三角形に分けられる

密度 1 なので 割当可能とは 各仕事 i の
剰余類 $[r_i]_{a_i}$ を互いに交わらず選べること

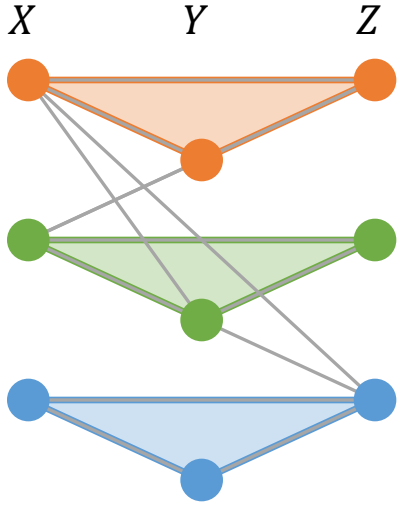
$[r]_a \cap [s]_b \neq \emptyset \Leftrightarrow r \equiv s \ (\mathrm{mod}\ \gcd(a,b))$　中華剰余定理

頂点 v の証人の剰余類を $[r_v]_{nm_v}$ とし
v の色を $c(v) := r_v \bmod n$ と定める

主張　三角形を共有しない u, v は色が異なる

$\gcd(m_u, m_v) = 1$ より $\gcd(nm_u, nm_v) = n$
よって色が同じなら証人どうしが交わる

- 同じ部の頂点は色が全て異なる
- 同色の 3 頂点は三角形をなす



頂点の色 $= c(v)$

色ごとに三角形が一つ決まり n 個の三角形に分けられる
補充の仕事は使っていない

証明　三角形に分けられる ⇒ 割当可能　(1) 証人

分割の三角形を $T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}$ とする

方針　T_i の頂点の仕事は全て $[i]_n$ の中に置く

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	…

$n = 3$ の例　周期は全て n の倍数なので 異なる T_i の仕事どうしは交わらない

定義　$T_i = \{x, y, z\}$ の証人の剰余を次のように選ぶ　$x \in X$　$y \in Y$　$z \in Z$

$$r_x \equiv r_y \equiv r_z \equiv i \pmod{n}$$
$$r_x \equiv 0 \quad r_y \equiv 1 \quad r_z \equiv 2 \pmod{p_{T_i}}$$

n と p_{T_i} は互いに素なので 中華剰余定理で選べる

主張　証人どうしは交わらない

- 異なる三角形の頂点どうし ⇒ $\bmod n$ で異なる
- 同じ三角形の頂点どうし ⇒ p_{T_i} が両方の周期を割り切り $\bmod p_{T_i}$ で異なる

証明　三角形に分けられる ⇒ 割当可能　(2) 補充

$T_i = \{x, y, z\}$ と $p := p_{T_i}$ を固定し $[i]_n$ の要素を $i + ns$ と書く

周期 nd の仕事は s で見ると周期 d　以下 s で考える

列 $= s \bmod p$

行 $= s \bmod 3$	0	1	2	3	4	…	$p-1$
0	x ●	y ●	z ●	x	x	…	x
1	x ●	y ●	z ●	y	y	…	y
2	x ●	y ●	z ●	z	z	…	z

証人　x の証人は ● の升に入る

$0, m_x, 2m_x$ は $\bmod p$ で全て $0 \bmod 3$ で相異なる

y z の証人も同様に ● ● の升

補充　x の升の残りを x の補充で埋める

升一つは $\bmod 3m_x$ の剰余 m_x/p 個に当たる　x の升は p 個

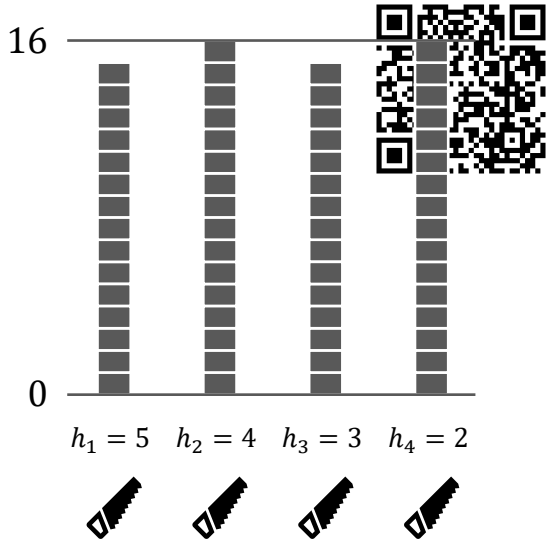
よって計 m_x 個　証人の 3 個を除くと ちょうど $m_x - 3$ 個

主張　占める升が重ならないので 全て交わらない

補充は周期が $3p$ の倍数なので升一つに 証人は列一つに収まる

竹叢伐採問題 (bamboo garden trimming) [GJKLLMR24]

各竹 $i = 1, \ldots, k$ が日速 h_i で伸びる
毎日一本づつ伐って　全体の高さをなるべく低く保ちたい



目標値 K に抑えるには？

竹 i を $a_i = \left\lfloor \frac{K}{h_i} \right\rfloor$ 日に一度以上伐れと
いう輪番割当と同じ

でもここでは　最適化問題である竹叢伐採 (なるべく低く) で
近似率を考えたい (「最適値の○○倍以内」と保証された解を見つける)

先程の密度限界は竹叢伐採の近似算法？

→ちがうけど　全く関係なくはない (次頁)

[GJKLLMR24] L. Gąsieniec, T. Jurdziński, R. Klasing, C. Levcopoulos, A. Lingas, J. Min, T. Radzik. Perpetual maintenance of machines with different urgency requirements. Journal of Computer and System Sciences 139, 103476, 2024.
※会議版SOFSEM 2017

竹叢伐採問題の ρ 近似（と実質的に同じ言換え） $\rho \geq 1$

輪番割当の割当可能な入力 $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ が与えられる
各項を少しだけ (ρ 倍以内だけ) 増やしたものを満す解を求めよ



$\{3,4,5,8\}$ の解は？

すみません、それは難しいが
$\{3,5,6,10\}$ の解なら○○です



$\frac{5}{4}$ 近似算法

定理 (再)

密度が $\leq \frac{1}{2}$ の集合は (詰込) 割当可能

割当可能な入力の各項を 2 倍すれば
(密度が $\leq 1/2$ になるので) 定理より割当可能

→竹叢伐採の 2 近似

定理 (再)

密度が $\leq \frac{5}{6}$ の集合は (詰込) 割当可能

割当可能な入力の各項を 6/5 倍以上すれば
(密度が $\leq 5/6$ になるので) 定理より割当可能

→竹叢伐採の 1.5 近似

a_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
$\lceil \frac{6}{5} \cdot a_i \rceil$	3	4	5	6	8	9	10	11	12	14	…
何倍？	1.50	1.33 …	1.25	1.20	1.33 …	1.28 …	1.25	1.22 …	1.20	1.27 …	



こいつさえ無ければ $\frac{4}{3} = 1.33\ldots$ 近似なのに……　(従来の近似率は $\frac{10}{7} = 1.42\ldots$ [HvS23])

[HvS23] F. Höhne and R. van Stee. A 10/7-approximation for discrete bamboo garden trimming and continuous trimming on star graphs. In Proc. 26th International Workshop on Approximation Algorithms for Combinatorial Optimization Problems (APPROX), Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs) 275, Article 16, 2023.

先程の例のように「3 日に一度やるべき仕事」をあえて 2 日後にやるべき時もある

$(3, 4, 5, 8)$ ・・・  ・・・

しかし「2 日に一度やるべき仕事」は　常にちょうど 2 日ごとにやるのが最良

$(2, \dots)$ ・・・  ・・・

同じ仕事を 2 日続けてやるのは
どう考えてもムダ

したがって次の算法が $\frac{4}{3}$ 近似を達成する

$a_1 = 2$ の場合

仕事 1 はちょうど 2 日ごとにやることに決めてしまう
残りの仕事は割当可能 (すなわち $\left\{\left\lfloor \frac{1}{2} \cdot a_2 \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{1}{2} \cdot a_k \right\rfloor\right\}$ は割当可能)
この $k-1$ 個の仕事に対して再帰的に解を求めればよい

$a_1 \neq 2$ の場合 (2 日に一度やるべき仕事というものがない場合)

各仕事の周期を $\frac{6}{5}$ 倍して切り上げると　密度 $\frac{5}{6}$ 以下なので解が求まる

今後の課題
- 近似率の改善
- これは「多項式時間」なのか？

今後の課題

密度による十分条件の証明について

- 計算機に頼らない証明が欲しい

与えられた $A = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ の割当可能性を判定する計算量

- 先述の状態遷移グラフ (頂点数 $\leq a_1 a_2 \cdots a_k$) による方法で **PSPACE**
- **NP** に属するか？　非きっかり型では不明
  (解の最短周期は入力長の多項式に収まらないことがある)
- $\mathrm{D}(A) = 1$ に制限しても 強 **NP** 完全 [KLS26]
- よって 非きっかり型も **NP** 困難

応用寄りの課題

- 仕事間に距離がある　頻度条件を破る度合によりコストがかかる　など
- より現実的な設定でヒューリスティクスの評価などをする研究も数多い

[KLS26] Y. Kobayashi, B. Lin, J. Swernofsky. Dense pinwheel packing is strongly NP-complete. arXiv:2609.20075.